ATTI

DELLA

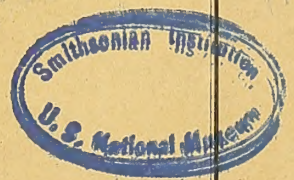
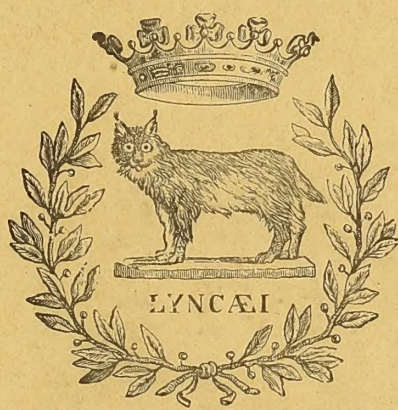
R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIV.

1897

SERIE QUINTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME II.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1898

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

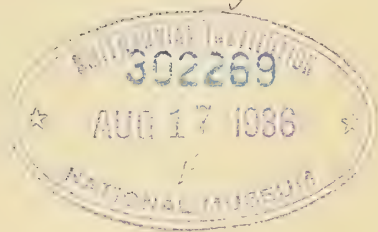
ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME II.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RELAZIONE

letta dal Socio S. Cannizzaro relatore, a nome anche del Socio E. Paternò, nella seduta del 7 aprile 1895, sopra la Memoria presentata dal dott. Americo Andreocci, intitolata: *Sui quattro acidi santonosi, e sopra due nuove santonine.*

« Il dottore Andreocci Americo avendo ripreso lo studio dell'acido santonoso destrogiro e di quello inattivo, che era stato detto isosantonoso, è riuscito ad ottenere due nuovi acidi isomeri di cui l'uno è il santonoso levogiro, e a dimostrare che l'isosantonoso è il composto racemico.

« A questo risultato egli è giunto ottenendo nuovi, importanti derivati intermedî tra la santonina e gli acidi suddetti.

« Ha così potuto interpetrare le modificazioni graduali che avvengono nella molecola della santonina e compiere in modo elegantissimo la dimostrazione della struttura chimica di quella sostanza e dei suoi immediati derivati, alla quale avevano condotto i varî lavori compiuti precedentemente nell'Istituto chimico di Roma.

« Il dottore Andreocci ha preparato e comparato con cura le serie parallelle dei derivati stereoisomeri dei varî acidi santonosi, fornendo così un importante contributo di fatti alla Stereochimica ed il materiale a pregevoli lavori cristallografici fatti nell'Istituto mineralogico della Università di Roma dal dott. Luigi Brugnatelli.

« Tutta questa copia di fatti nuovi col ricordo di quelli precedentemente noti e con tutte le deduzioni a cui dànno luogo sono stati riuniti dal dott. Andreocci in questa Memoria che può considerarsi una completa Monografia sugli acidi santonosi, pregevole pei dati sperimentali che contiene raccolti con ordine e descritti con precisione.

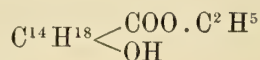
« La vostra commissione propone perciò che la Memoria dell'Andreocci sia inserita negli Atti della Accademia ».

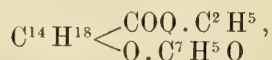
Sui quattro acidi santonosi e sopra due nuove santonine.
Memoria del dott. AMERICO ANDREOCCI

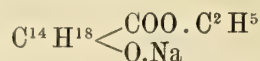
PARTE STORICA

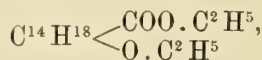
I prof. S. Cannizzaro e G. Carnelutti nel 1882 ottennero per riduzione della santonina ($C^{15}H^{18}O^{3}$) con acido jodidrico e fosforo rosso ([1]) l'acido $C^{15}H^{20}O^{3}$, che devia a dritta il piano della luce polarizzata e che chiamarono *santonoso* per distinguerlo dagli acidi santoninici e santonici, i quali contengono un atomo di ossigeno in più; ottennero anche in alcune circostanze un isomero inattivo, che chiamarono *isosantonoso*.

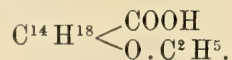
Dimostrarono che i due acidi santonosi contengono entrambi un carbossile ed un ossidrile fenico, avendo preparato dal santonito ed isosantonito etilico

$$C^{14}H^{18} \left\langle \begin{matrix} COO.C^{2}H^{5} \\ OH \end{matrix} \right.$$

i corrispondenti benzoil-santoniti

$$C^{14}H^{18} \left\langle \begin{matrix} COO.C^{2}H^{5}, \\ O.C^{7}H^{5}O \end{matrix} \right.$$

col sodio, i corrispondenti derivati sodici

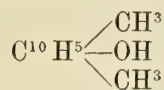
$$C^{14}H^{18} \left\langle \begin{matrix} COO.C^{2}H^{5} \\ O.Na \end{matrix} \right.$$

e da questi, col joduro d'etile gli etil-santoniti-etilici

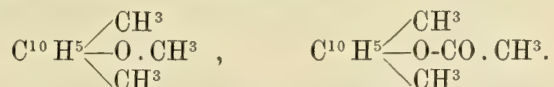
$$C^{14}H^{18} \left\langle \begin{matrix} COO.C^{2}H^{5}, \\ O.C^{2}H^{5} \end{matrix} \right.$$

i quali per azione della soluzione alcoolica d'idrato potassico furono convertiti negli acidi etil-santonoso ed etil-isosantonoso:

$$C^{14}H^{18} \left\langle \begin{matrix} COOH \\ O.C^{2}H^{5}. \end{matrix} \right.$$

Trovarono attivi sulla luce polarizzata tutti i derivati dell' acido santonoso, inattivi quelli dell'acido isosantonoso.

([1]) Gazz. chim. ital., vol. XII, p. 393.

Intrapresero lo studio del dimetil-naftol

$$C^{10}H^{5}\begin{cases}CH^{3}\\ OH\\ CH^{3}\end{cases}$$

che ottennero dall'acido santonoso, e dall'iso-santonoso per l'azione dell'idrato di bario a 360°, dimostrarono la natura fenica di questa sostanza e ne prepararono il dimetil naftolato metilico ed il derivato acetilico

$$C^{10}H^{5}\begin{cases}CH^{3}\\ O.CH^{3}\\ CH^{3}\end{cases}, \qquad C^{10}H^{5}\begin{cases}CH^{3}\\ O\text{-}CO.CH^{3}.\\ CH^{3}\end{cases}$$

Ossidando il dimetil-naftol, con acido cromico in soluzione acetica, ottennero una sostanza contenente un atomo di ossigeno in più del naftol che non è, nè un naftol, nè un chinone, che ridotto con acido jodidrico e fosforo rosso rigenera il medesimo dimetil-naftol. Convertirono il dimetil-naftol in dimetil-naftalina $C^{10}H^{6}(CH^{3})^{2}$ distillandolo con polvere di zinco e prepararono il composto picrico dell'idrocarburo così ottenuto. Moro e Giovanozzi (1) credettero avere ottenuto sinteticamente colla bibromonaftalina di Glaser fondente a 81°, joduro di metile e sodio, la stessa dimetil-naftalina, da loro riconosciuta per il composto coll'acido picrico.

Cannizzaro e Carnelutti distillarono con polvere di zinco anche l'acido santonoso e la santonina (2).

Dall'acido santonoso ottennero il dimetil-naftol identico a quello ottenuto per l'azione della barite, la dimetil-naftalina (identificata col composto picrico) ed oltre ai gas combustibili una piccola quantità di un olio bollente fra 137°-138°, che dalla densità del suo vapore fu ritenuto con probabilità per un dimetil-benzol. Dalla santonina ottennero i medesimi prodotti e facendo gorgogliare i gas attraverso il bromo separarono il propilene allo stato di bibromuro.

Nel 1883 il prof. Cannizzaro continuò da solo le ricerche sui prodotti di decomposizione dell'acido santonoso (3) e dopo una serie di esperienze, variando le quantità di acido santonoso e fermando la decomposizione ora ad una, ora ad altra temperatura ed esaminando attentamente tutti i prodotti, potè stabilire quanto segue:

Riscaldando l'acido santonoso a 300°, in atmosfera di anidride carbonica, distilla prima dell'acqua, poi un poco di acido santonoso e resta indietro un' anidride dell'acido santonoso coll'aspetto di resina fragile trasparente, che si trasforma nello stesso acido santonoso (destrogiro) per azione della potassa alcoolica. Innalzando la temperatura fra 360° e 400° distillano acido propionico, biidro-dimetil-naftol, il dimetil-naftol (già ottenuto per azione della barite sull'acido santonoso), un olio che colla potassa si scinde in acido propionico e biidro-dimetil-naftol, come l'etere propionico di quest'ultimo, e piccole quantità di dimetil-naftalina; resta nella storta un leggero residuo carbonoso.

Inoltre dimostrò come il biidro-dimetil-naftol si trasforma nel dimetil-naftol per

(1) *Sulla dimetil-naftalina,* Nota di G. Giovanozzi. Gazz. chim. ital., XII, p. 147.

(2) Loco citato, pag. 413-415.

(3) Gazz. chim. ital., vol. XIII, pag. 385.

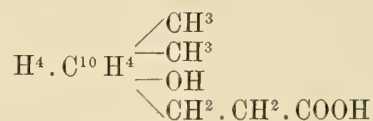
azione dello zolfo; e nella dimetil-naftalina per eliminazione di una molecola di acqua mediante il pentasolfuro di fosforo.

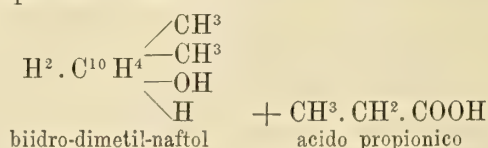
Il prof. Cannizzaro in seguito a queste esperienze emise le prime idee sulla costituzione dell'acido santonoso, le quali sono state la base delle ulteriori ricerche sui derivati della santonina.

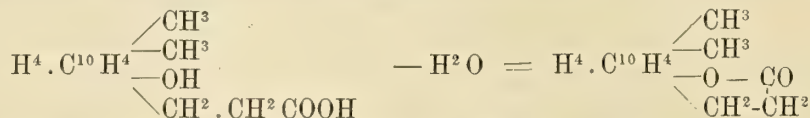
Riporto testualmente quanto il prof. Cannizzaro concludeva in fine della sua Memoria *Sui prodotti di decomposizione dell'acido santonoso* (1):

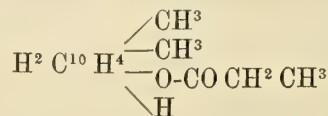
« I risultati descritti in questa mia Memoria e quelli precedentemente pubbli- « cati insieme a G. Carnelutti si possono interpetrare considerando l'acido santonoso « come un derivato tetra sostituito della tetraidro-naftalina ($H^4 . C^{10} H^8$).

« I gruppi sustituenti sarebbero: due metili nel posto dei due bromi della bibro- « mo-naftalina fondente ad 81°; un ossidrile nel posto (non ancor determinato) che « ha nel dimetil-naftol ed un residuo dell'acido propionico. Ciò che si esprime colla « seguente formola:

$$H^4 . C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH^2 . CH^2 . COOH \end{cases}$$

« Potrebbe dunque dirsi acido *tetraidro-dimetil-ossinaftil-propionico*. Col riscal- « damento due dei 4 atomi d'idrogeno aggiunti si impiegherebbero a distaccare il « residuo dell'acido propionico formando

$$\underset{\text{biidro-dimetil-naftol}}{H^2 . C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ H \end{cases}} + \underset{\text{acido propionico}}{CH^3 . CH^2 . COOH}$$

« La sostanza resinosa che si formerebbe per l'eliminazione di una molecola di « acqua sarebbe una anidride interna nella quale il residuo dell'acido propionico avendo « perduto l'ossidrile acido si sarebbe attaccato all'ossigeno fenico, come negli eteri « dei fenoli, ciò che è indicato dalla seguente equazione:

$$H^4 . C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH^2 . CH^2 COOH \end{cases} - H^2 O = H^4 . C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ O - CO \\ CH^2\text{-}CH^2 \end{cases}$$

« In quest'anidride per l'azione del calore due dei 4 atomi d'idrogeno aggiunti « distaccherebbero il residuo dell'acido propionico dal nucleo naftolico lasciandolo at- « taccato per l'ossigeno come radicale acido e formando così l'etere propionico del « biidro-dimetil-naftol, rappresentato dalla seguente formola:

$$H^2 C^{10} H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ O\text{-}CO\, CH^2\, CH^3 \\ H \end{cases}$$

« Potrebbe anche ammettersi che nell'acido santonoso non preesistano tutti e due « gli anelli della naftalina, ma che l'uno si formi per l'azione del calore.

(1) Gazz. chim. ital., vol. XIII, p. 394.

« Il fatto osservato da me e Carnelutti della formazione di un dimetil-benzol « nella scomposizione dell'acido santonoso darebbe qualche appoggio a questa ipotesi. « Gli ulteriori studî che continuo sull'acido santonoso e i suoi derivati daranno nuovi « argomenti per scoprire definitivamente la costituzione dell'acido santonoso e del suo « isomero ».

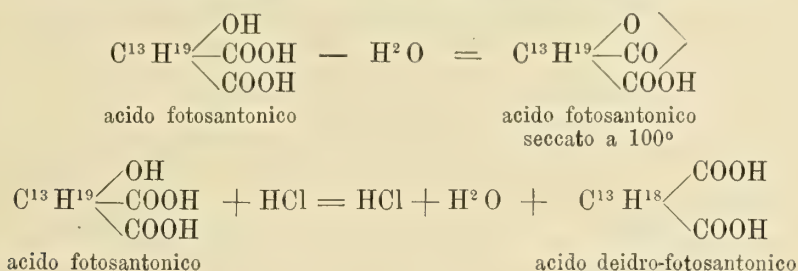
Nel 1885 il dott. Villavecchia riprese lo studio dell'acido fotosantonico, che il prof. Sestini (1) aveva ottenuto esponendo per lungo tempo alla luce solare la santonina disciolta nell'acido acetico, e dimostrò che quest'acido contiene il legame lattonico dimostrato da Hesse nella santonina, e che inoltre contiene un carbossile formatosi per l'apertura dell'anello naftalico di essa nel punto contenente il CO cetonico mediante l'addizione di una molecola di acqua.

Il Villavecchia (2) studiò altresì l'acido bibasico detto *deidro-fotosantonico* derivante dall'azione dell'acido cloridrico sul fotosantonico ed espresse la costituzione dei due acidi e la trasformazione del secondo nel primo nel modo seguente:

$$C^{13}H^{19}\begin{cases}OH\\COOH\\COOH\end{cases} - H^2O = C^{13}H^{19}\begin{cases}O\\CO\\COOH\end{cases}$$

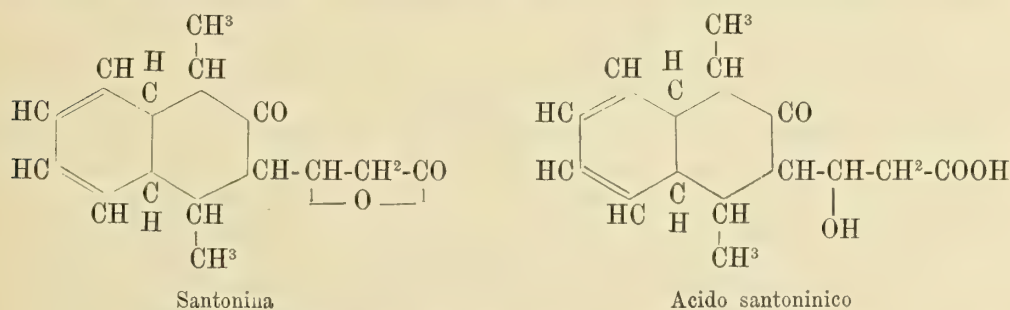
acido fotosantonico — acido fotosantonico seccato a 100°

$$C^{13}H^{19}\begin{cases}OH\\COOH\\COOH\end{cases} + HCl = HCl + H^2O + C^{13}H^{18}\begin{cases}COOH\\COOH\end{cases}$$

acido fotosantonico — acido deidro-fotosantonico

Contemporaneamente il prof. Cannizzaro (3) dimostrò per via diretta l'esistenza del CO cetonico della santonina preparandone l'ossima.

Fondandosi sugli studî sopracennati egli considerò l'acido santoninico di Hesse, di cui la santonina è il lattone, come un derivato dell'esaidro-naftalina con due metili in posizione $(\alpha . \alpha)$ in uno degli anelli, con un CO cetonico nel nucleo, un ossidrile alcoolico ed una catena laterale residuo dell'acido propionico. Ciò soltanto volle esprimere rappresentando la santonina e l'acido santoninico colle seguenti formole:

```
            CH3                                     CH3
            |                                       |
   CH  H    CH                            CH   H    CH
        C                                      C
HC          CO                         HC            CO
HC          CH-CH-CH2-CO               HC            CH-CH-CH2-COOH
        C       |__O__|                        C         |
   CH  H    CH                            HC   H    CH   OH
            |                                       |
            CH3                                     CH3
```

Santonina — Acido santoninico

Si affrettò però a notare che restava ancora a fissare le posizioni nei due anelli naftalici del CO cetonico, del residuo propionico, dell'ossidrile alcoolico e la posizione degli atomi d'idrogeno aggiunti.

(1) Gazz. chim. ital., vol. VI, p. 357 e Berl. Ber. IX, p. 1689.
(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1885, pag. 722 e Berl. Ber. XVIII, p. 2859.
(3) Berl. Ber. XVIII, p. 2746.

Ciò si proposero di fare P. Gucci e G. Grassi-Cristaldi studiando il primo (1) la santoninossima ed il secondo il santoninidrazone (2) e tutti e due i derivati dei suddetti composti (3). Essi convertirono la coppia $\begin{matrix}-CO\\ |\\ -CH^2\end{matrix}$, già dimostrata nella santonina, in $\begin{matrix}-CH.NH^2\\ |\\ -CH^2\end{matrix}$, riducendo l'ossima e l'idrazone di essa, e per la pronta eliminazione di NH^3 dall'ammina prodotta in $\begin{matrix}-CH\\ \|\\ -CH\end{matrix}$; ottennero così la iposantonina e la stereoisomera iso-iposantonina, le quali differiscono dalla santonina per un atomo di ossigeno in meno ed hanno, come essa, il gruppo lattonico essendo i lattoni di due ossiacidi stereoisomeri iposantoninici. Dimostrarono che le iposantonine contengono l'anello para-dimetil-benzenico, poichè per ossidazione dànno l'acido para-dimetil-ftalico; da cui si ottiene quantitativamente il para-dimetil-benzol.

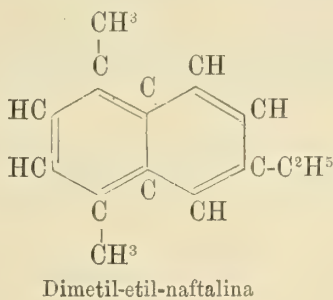
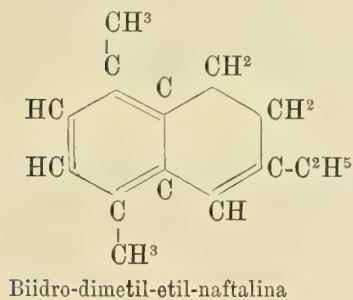
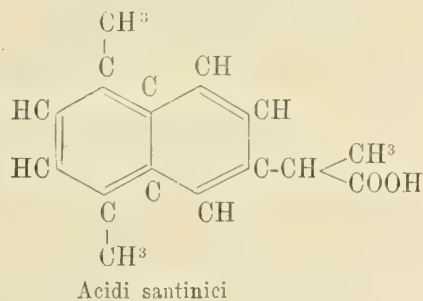
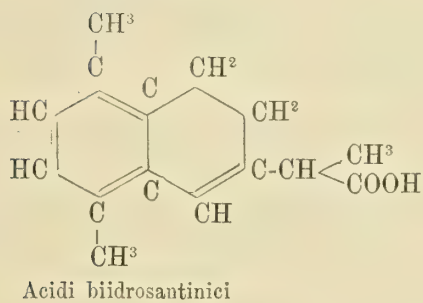
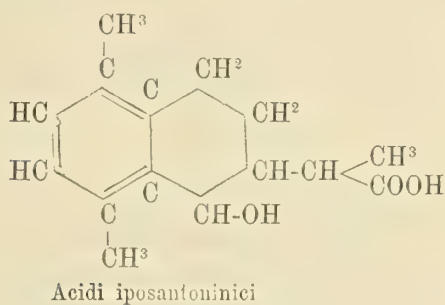
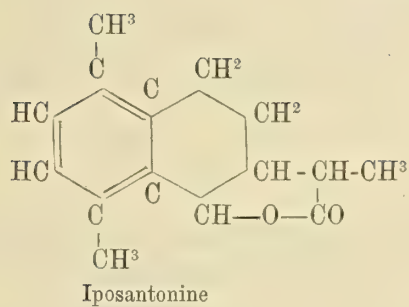
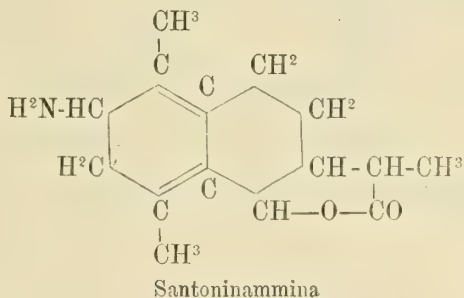
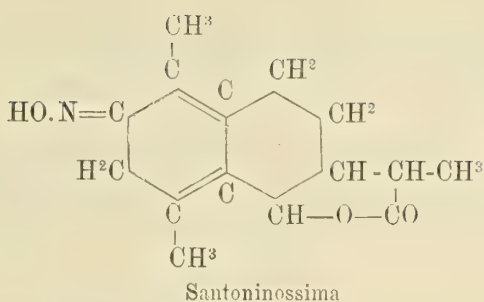
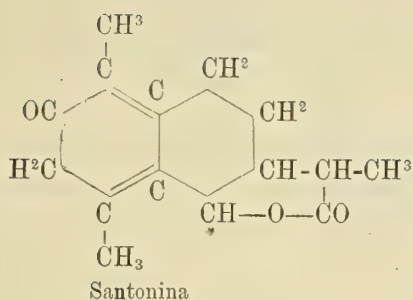
Da ciò dedussero: 1° che il CO cetonico è nello stesso anello in cui sono i due metili in posizione para; anello che diviene aromatico (para-dimetil-benzenico) nelle iposantonine; 2° che il residuo dell'acido propionico, il legame lattonico, ed i 4 atomi d'idrogeno aggiunti sono nelle iposantonine, e perciò nella santonina, nell'altro anello della naftalina che si disfà coll'ossidazione (4).

Argomentarono poi che il legame lattonico sia in un carbonico del nucleo differente da quello ove è innestata la catena propionica dal fatto che gli acidi biidro-santinici, che si ottengono per azione dell'acido cloridrico sulle iposantonine, non contengono alcun doppio legame etilenico, il che sarebbe dovuto avvenire se il legame lattonico fosse stato nella catena laterale tricarbonica o nel carbonio a cui questa era attaccata.

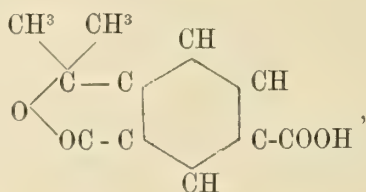
Per ispiegare infine il fatto che evvi un acido santinico attivo, contenente perciò un carbonio asimmetrico, ammisero che il residuo dell'acido propionico sia legato per il carbonio α.

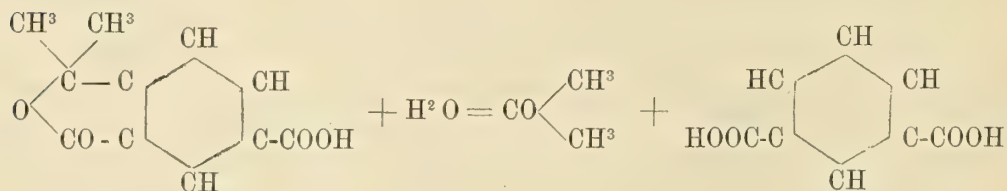
Per tutte le considerazioni sopra riassunte rappresentarono la santonina ed i derivati da loro studiati colle seguenti formole:

(1) Gazzetta chimica italiana, vol. XIX, p. 367 e Berl. Ber. XXII, p. 731.
(2) idem » » p. 382 » » » p. 732
(3) idem » XXII, p. 1

(4) Ossidando i biidro-derivati, cioè gli acidi biidro-santinici ottenuti per azione dell'acido cloridrico, in soluzione alcoolica, sulle iposantonine, si ottiene pure l'acido para dimetil-ftalico. Con quelli invece non idrogenati, come gli acidi santinici, che si ebbero per azione dello jodio sugli acidi biidro-santinici, oppure con quelli appartenenti al tipo esaidrogenato come la santonina e la santoninossima, non si arriva ad aver tracce del suddetto acido dimetil-ftalico. Ciò è d'accordo coi risultati delle esperienze di Bamberger fatte tanto negli α- e β- tetraidro-derivati aliciclici (Berl. Ber. XXII, 951-968) che dànno come prodotto finale, l'acido ftalico, quanto sugli α- e β- tetraidro-derivati aromatici, i quali coll'ossidazione conducono all'acido adipico. Berl. Ber. XXI, 1889.

Dopo i lavori sopra ricordati il prof. Cannizzaro e P. Gucci [1] ripresero lo studio dell' acido fotosantonico, e degli acidi deidro-fotosantonici che ne derivano affine di porre le loro formole e quelle della santonina in accordo coi nuovi fatti scoverti.

Ossidando i tre isomeri acidi deidro-fotosantonici e l'idrocarburo $C^{13}H^{20}$, che i sali dei suddetti danno decomponendosi coll'idrato di bario, ottennero un derivato che dimostrarono essere l'acido dimetil-ftalid-carbonico

```
    CH3  CH3     CH
      \  /      /  \
     /C — C          CH
   O<      |        |
     \OC - C        C-COOH ,
            \      /
               CH
```

il quale difatti si scompone cogli alcali in acetone ed acido isoftalico, secondo la seguente equazione:

```
CH3  CH3     CH                                                 CH
  \  /      /  \                                    HC       /    \     CH
 /C — C           CH                  /CH3                 |        |
O<     |         |      + H2O = CO<          +   HOOC-C        C-COOH
 \CO - C          C-COOH              \CH3                   \    /
         \      /                                              CH
            CH
```

Da ciò dedussero:

1° che nella trasformazione della santonina in acido fotosantonico si apre quell'anello naftalico contenente i due metili fissandosi gli elementi di una molecola d'acqua, per cui il C O cetonico diviene carbossile;

2° che in tale trasformazione rimane intatto l'altro anello aliciclico tetraidrogenato della santonina, che contiene la catena laterale propionica ed il legame lattonico;

3° che la trasformazione dell'acido fotosantonico negli isomeri deidro-fotosantonici per azione dell'acido cloridrico avviene in modo simile alla trasformazione delle iposantonine negli acidi biidro-santinici; in definitiva si scioglie il legame lattonico per mezzo di due dei quattro atomi d'idrogeno aggiunti all'anello benzenico il quale diviene perciò biidrogenato;

4° dedussero altresì, dalla formazione finale dell'acido isoftalico, la distanza tra il C O cetonico ed il punto d'inserzione della catena propionica nella santonina, e perciò espressero la costituzione di questa e dei derivati acidi fotosantonico e deidrofotosantonico colle seguenti formole:

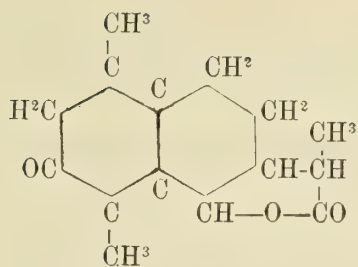
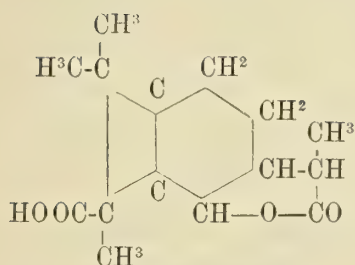
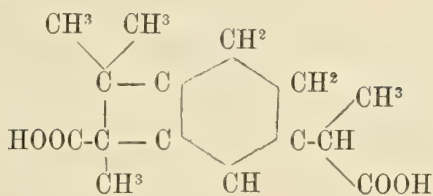
(1) Rendiconti R. Accademia Lincei 1892, 2° sem., p. 149 e Gazz. chim. ital., vol. XXIII, p. 286.

CH^3
C　　CH^2
H^2C　　C　　CH^2　CH^3
OC　　　　CH-CH
C　　C　　CH—O—CO
CH^3

Santonina

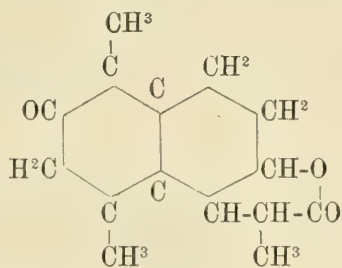
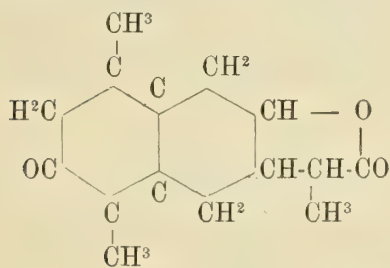
CH^3
H^3C-C　　C　　CH^2
　　　CH^2　CH^3
　　　CH-CH
HOOC-C　　C　　CH—O—CO
CH^3

Acido fotosantonico

CH^3　CH^3　　CH^2
C — C　　CH^2　CH^3
HOOC-C — C　　C-CH
CH^3　　CH　　COOH

Acidi deidro-fotosantonici

Notarono però che dall'insieme dei fatti si poteva dedurre soltanto la distanza del C O e del punto d'inserzione della catena propionica, ma non la loro assoluta posizione. Difatti le due seguenti formole soddisferebbero ugualmente alle conclusioni dedotte dall'esperienza.

CH^3
C　　C　　CH^2
H^2C　　　　CH — O
OC　　　　CH-CH-CO
C　　C　　CH^2　　CH^3
CH^3

CH^3
C　　C　　CH^2
OC　　　　CH^2
H^2C　　　　CH-O
C　　C　　CH-CH-CO
CH^3　　　　CH^3

Santonina

PARTE SPERIMENTALE

Nel 1893 preparai per incarico del prof. Cannizzaro una grande quantità di acido santonoso e trovai che per tale preparazione, se si fa agire sulla santonina sciolta nell'acido cloridrico concentrato il cloruro stannoso si ottengono risultati assai migliori di quelli ottenuti facendo agire l'acido jodidrico ed il fosforo rosso; conseguentemente volli studiare a parte l'azione del solo acido cloridrico fumante sulla santonina. Il frutto di questo studio superò la mia aspettativa, avendomi condotto alla scoverta di nuovi importanti derivati della santonina e di fatti che chiariscono le trasformazioni di essa e rimuovono alcuni dubbî sulla sua costituzione.

Descriverò in questa Memoria tali risultati e discuterò le conclusioni che possono trarsene richiamando, ove occorra, i fatti descritti dagli altri chimici sopra ricordati.

Azione dell'acido cloridrico e bromidrico sulla santonina.

La santonina si discioglie a freddo negli acidi cloridrico e bromidrico concentrati dando soluzioni limpide e quasi scolorate, che per l'aggiunta di molt'acqua riprecipitano la santonina abbastanza pura, come lo dimostra la seguente determinazione di potere rotatorio [1] fatta sul precipitato semplicemente lavato con acqua e seccato a 100°.

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %	1,9488
Temperatura	9°
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata	— 7°,35
Potere rotatorio specifico	— 171,7 [2]

Le dette soluzioni acide di santonina invece lasciate a sè alla temperatura ordinaria (15°) per un tempo assai lungo, oppure riscaldate per qualche ora a 60°, si colorano in giallo che passa al bruno e poi depongono una sostanza cristallina, che non ha più le proprietà della santonina e che sarà descritta nel seguente capitolo col nome di *Desmotropo-santonina.*

[1] Eccettuate alcune determinazioni di potere rotatorio, che ho gia pubblicato, fatte coll'apparecchio di Laurent, gentilmente messo a mia disposizione dal Laboratorio Chimico Centrale delle Gabelle di Roma, ho in seguito sempre adoperato l'apparecchio di Cornu. Come sorgente luminosa mi son servito della luce monocromatica del sodio.

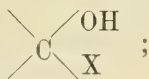
[2] Hesse (Ann. Liebig's CLXXVI, p. 125) trovò per la santonina disciolta in alcool a 97°

$$(\alpha)_D^{15^\circ} = -173^\circ,6.$$

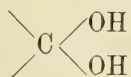
La santonina disciolta negli acidi cloridrico e bromidrico presenta un potere rotatorio quasi il doppio di quello che essa ha in solventi neutri, come l'alcool ed il cloroformio; ciò risulta dal quadro seguente:

Solvente	Concentrazione per 100 cc.	Temperatura	Lungh. del tubo in mm.	Deviazione osservata per $(\alpha)_D$	Potere rotatorio		Annotazioni
					Specifico	Molecolare	
Cloroformio	2,	15°	220	— 7°,56	— 171°,8	— 423	Hesse. (Ann. 176 p. 125)
Alcool assoluto	1,3524	18	200	— 4, 68	— 173, 0	— 426	Andreocci
» a 97°	1,	15			— 173, 6	— 427	Hesse. (loco citato)
» »	2,	»			— 174, 0	— 428	
» 90°	2,	»			— 175, 4	— 431	
» 80°	2,	»			— 176, 5	— 434	
» »	2,	22 5			— 176, 5	— 434	
Acido cloridrico (38 %)	2,46	10	219,65	— 18, 37	— 340, 0	— 836	Andreocci
» » »	1,23	»	»	— 9, 17	— 339, 4	— 835	
Ac. bromidrico (D. 1.38)	2,46	28	»	— 18, 72	— 346, 4	— 852	
» »	6,6452	»	»	— 50, 27	— 344, 3	— 847	

È probabile che il notevole potere rotatorio presentato dalle soluzioni cloridrica o bromidrica di santonina derivi dall'addizione dell'idracido al CO cetonico della santonina, convertendolo nel gruppo

$$>C<^{OH}_{X} ;$$

in tal caso diverrebbe asimmetrico un altro atomo di carbonio.

Quando la santonina è disciolta nell'alcool diluito per analogia si potrebbe ammettere che anche gli elementi dell'acqua si addizionano al CO cetonico convertendolo in

$$>C<^{OH}_{OH}$$

e ciò spiegherebbe:

1° l'aumento piccolo, ma progressivo del potere rotatorio delle soluzioni alcooliche man mano che si diluiscono con acqua, come risulta dal quadro sopra riportato;

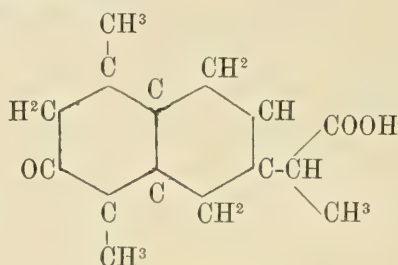
2° la formazione dell'acido fotosantonico che, come nella parte storica ho rammentato, deriva dalla santonina per la rottura di un anello naftalico, nel punto dove si trova il CO cetonico, per azione degli elementi dell'acqua.

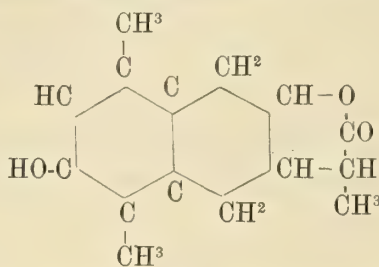
Non è però probabile che l'acqua e gli idracidi si aggiungano alla santonina sciogliendo il legame lattonico:

1° perchè, nel caso dell'acqua sopratutto, il potere rotatorio avrebbe dovuto diminuire in luogo di aumentare, dovendosi essere formato l'acido santoninico

che ha un potere rotatorio (— 25°,8 — 26°,5 [1]) molto minore della santonina (— 173°);

2° perchè se gli idracidi si addizionassero al gruppo lattonico, la santonina avrebbe probabilmente dovuto subire una trasformazione analoga a quelle delle iposantonine negli acidi biidro-santinici per azione dell'acido cloridrico [2], ossia si sarebbe dovuta trasformare nell'acido

```
              CH³
              |
              C       CH²
        H²C ⁄   ⁀ C ⁀   ⁀ CH
                                ⁄COOH
        OC  ⁀   ⁀ C ⁀   ⁀ C-CH
              C       CH²     ⁀CH³
              |
              CH³
```

e non, come avviene, nella desmotropo-santonina, la quale, come vedremo in seguito, si deve rappresentare colla seguente struttura:

```
              CH³
              |
              C       CH²
        HC   ⁀  C  ⁀     CH-O
                            |
                            CO
                            |
       HO-C  ⁀  C  ⁀     CH-CH
              C       CH²   CH³
              |
              CH³
```

3° perchè il potere rotatorio dell'acido santonico ($C^{15}H^{20}O^{4}$), che ha il CO cetonico, ma non il legame lattonico, aumenta relativamente ancor più di quello della santonina per l'aggiunta di acqua, o per la presenza dell'acido cloridrico, come risulta dalle seguenti determinazioni da me fatte con acido santonico purissimo:

Solvente	Temperatura	Concentrazione	Deviazione osservata con un tubo di mm. 219.65	Potere rotatorio	
				Specifico	Molecolare
Alcool assoluto	9°	2,64	— 2°,44	— 42°,1	— 111
Alcool 90 % in volume	»	2,64	— 3, 04	— 52, 2	— 138
» 50 » »	»	1,32	— 2, 15	— 74, 1	— 195
Acido cloridrico 9,5 % in peso	»	0,66	— 1, 275	— 87, 9	— 232
» » 19,0 »	»	1,32	— 3, 24	— 111, 7	— 295
» » 26,6 »	»	2,64	— 7, 28	— 125, 7	— 332
» » 38,0 »	»	1,32	— 4, 015	— 138, 5	— 366
» » 38,0 »	»	2,64	— 8, 04	— 138, 7	— 366

(1) Hesse (Liebig's Ann. CLXXVI, p. 127) trovò per l'acido santoninico i seguenti valori:

Alcool a 97° $(\alpha)_D^{22.5^\circ} = -25^\circ,8$

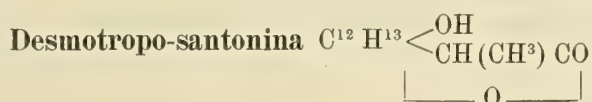
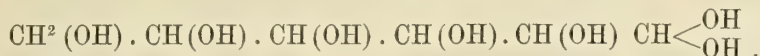
» » 80° $(\alpha)_D^{22.5^\circ} = -26,5$,

pei quali si potrebbe ritenere che anche il potere rotatorio dell'acido santoninico aumenta colla diluizione del solvente.

(2) Gucci e Grassi Cristaldi, Gazz. chim. ital., vol. XXII, parte I, p. 23.

Questa spiegazione data per l'aumento del potere rotatorio della santonina e dell'acido santonico ha un appoggio nel fenomeno di birotazione presentato dal glucosio, fenomono che Jacobi [1] ha dimostrato esser dovuto all'addizione di una molecola d'acqua al CO aldeidico, trasformando così il glucosio nell'alcool eptavalente:

$$CH^2(OH).CH(OH).CH(OH).CH(OH).CH(OH)\ CH<^{OH}_{OH}.$$

Desmotropo-santonina $C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH(CH^3)CO}$ (con ponte O tra OH e CO)

Preparai la desmotropo-santonina col seguente metodo:

Ogni chilogrammo di santonina si discioglie in 5 litri di acido cloridrico fumante e puro e si lascia che la reazione si effettui lentamente alla temperatura di circa 15° nell'oscurità. Dopo alcuni giorni la desmotropo-santonina si depone sulle pareti del recipiente cristallizzata in piccoli prismi duri colorati, alcuni in giallo, altri in rosso, da piccole quantità di materie estranee la di cui formazione è agevolata dalla luce, dall'ossigeno e dal calore. Dopo un mese circa i tre quarti di santonina si trasformano nella nuova sostanza ed il rimanente ci si trasforma in parte con più lentezza per l'aggiunta di altro acido cloridrico concentrato.

Si può anche effettuare la reazione in poche ore, però con leggero scapito nel rendimento, riscaldando la soluzione cloridrica di santonina a 60° ed agitando spesso. Sul primo si depongono dei cristalli leggermente colorati in porpora, poi altri inquinati da sostanze vischiose la di cui formazione è dovuta al riscaldamento.

Si raccoglie il prodotto su filtro d'amianto, si lava da prima con acido cloridrico fumante (sinchè il filtrato per l'aggiunta di acqua non precipita più la santonina inalterata) poi con acqua ed infine si cristallizza due o tre volte dall'alcool bollente. Il rendimento della preparazione a freddo è dell'82 % e di quella a caldo del 50 %.

La desmotropo-santonina cristallizza in aghi lucenti, è quasi insolubile nell'acqua fredda e nell'acido cloridrico, pochissimo solubile nell'acqua bollente, poco nell'etere e nel benzol, discretamente solubile a caldo nell'alcool e nell'acido acetico; fonde a 260°, però se si riscalda progressivamente con lentezza si decompone prima di raggiungere il suo punto di fusione.

L'analisi elementare corrisponde alla formola $C^{15}H^{18}O^3$, come risulta dalle cifre seguenti:

I. Sostanza (seccata a 100°) gr. 0,2577; CO^2. 0,6876; H^2O 0,1677
II. » (» ») » 0,2328; » 0,6262; » 0,1550

	calcolato	trovato I	trovato II
C	73,17	73,33	73,36
H	7,32	7,29	7,39

[1] Il glucosio sciolto in alcool assoluto ha per $(\alpha)_D$ un potere rotatorio $= +106,4$; mentre sciolto nell'acqua da qualche tempo $(\alpha)_D$ è $=$ a $+53,2$ (Ann. CCLXXII, p. 170).

Ho determinato, col metodo ebolliscopico in soluzione alcoolica, il peso molecolare di questa sostanza, comparativamente alla santonina purissima ed ho ottenuto i seguenti risultati:

	Desmotropo-santonina	Santonina	Teoretico
Concentrazione della soluzione per $^0/_0$ . .	2,2436	2,2000	
Innalzamento del punto d'ebollizione . .	0°,11	0°,11	
Coefficiente d' innalzamento	0, 049	0, 05	
Costante per l'alcool	12, 059	12, 30	11,50
Peso molecolare	235	230	246

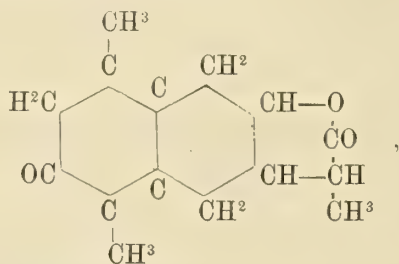
Da questi dati risulta che la desmotropo-santonina è un isomero della santonina ed ha in soluzione lo stesso peso molecolare, però oltre alle proprietà fisiche sopra descritte differisce anche dalla santonina:

Primo per il senso e l'intensità del suo potere rotatorio, come risulta da quanto segue:

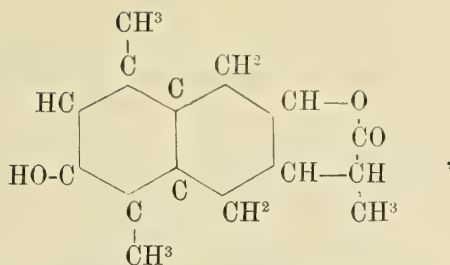
	Desmotropo-santonina		Santonina
	1ª determin.	2ª determin.	
Solvente	Acool assoluto	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Temperatura	10°	18°	18°
Concentrazione per $^0/_0$ . . .	0,3494	0,2498	1,3524
Lunghezza del tubo in mm. .	400	500	200
Deviazione osservata per $(\alpha)_D$.	+ 1°,567	+ 1°,36	— 4°,68
Potere rotatorio specifico . .	+ 112,1	+ 108,5 (1)	— 173,0
" " molecolare .	+ 276	+ 267	— 426

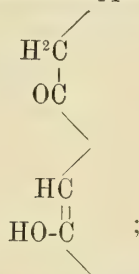
Secondo non reagendo, nè coll'idrossilammina, nè colla fenilidrazina, non contiene il CO cetonico della santonina, invece un OH di natura naftolica, perchè si discioglie molto più rapidamente della santonina nelle soluzioni fredde degli idrati alcalini ed alcalini-terrosi e ne riprecipita coll'anidride carbonica; forma inoltre i derivati acetilico, metilico, etilico e benzilico che hanno il comportamento di eteri fenolici.

Adottando per la santonina la formola

```
          CH³
          |
          C       CH²
               C
H²C                    CH—O
                       |
                        CO    ,
                       |
OC                     CH—CH
               C
          C       CH²      CH³
          |
          CH³
```

la desmotropo-santonina si deve rappresentare con questa struttura:

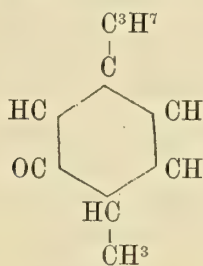
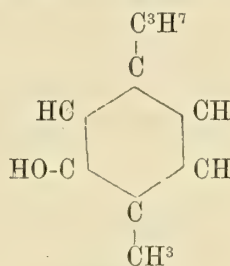
(1) La differenza di 3°,6 fra le due determinazioni rientra nei limiti degli errori, dovendosi impiegare soluzioni molto diluite per la poca solubilità a freddo della desmotropo-santonina.

```
            CH^3
             |
             C      CH^2
    HC   /      \ C /    \  CH—O
        |        |        |   |
        |        |        |   CO
  HO-C   \      / C \    /  CH—CH
             C        CH^2     |
             |                CH^3
            CH^3
```
,

poichè il lato della molecola contenente la coppia

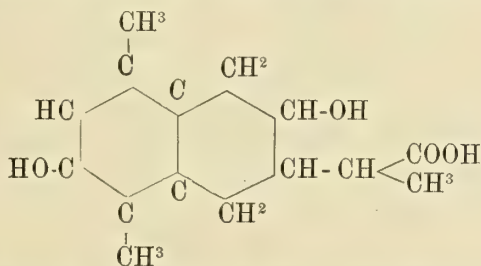
```
      /
   H^2C
     |
    OC
      \
```

si è mutato per desmotropia in

```
      /
    HC
     ||
  HO-C
      \
```
;

trasformandosi così l'anello biidrogenato della santonina in anello aromatico più stabile e rimanendo l'altro tetraidrogenato.

Ho chiamato questa nuova sostanza *desmotropo-santonina* per rammentarne la genesi, che ha qualche analogia colla trasformazione del carvol in carvacrol ([1])

```
        C^3H^7                         C^3H^7
         |                              |
         C                              C
  HC  /     \  CH               HC  /     \  CH
     |       |                     |       |
  OC  \     /  CH             HO-C  \     /  CH
        HC                              C
         |                              |
        CH^3                           CH^3
      Carvol (2)                     Carvacrol
```

La desmotropo-santonina è un lattone come la santonina; infatti colle soluzioni bollenti degli idrati alcalini ed alcalini terrosi si trasforma nei sali d'un ossiacido, isomero all'acido santoninico di Hesse, e che ha la costituzione di un acido *ossi-tetraidro-paradimetil-ossinaftil-propionico* rappresentato dallo schema seguente:

```
            CH^3
             |
             C      CH^2
    HC   /      \ C /    \  CH-OH
        |        |        |
        |        |        |              COOH
  HO-C   \      / C \    /  CH - CH <
             C        CH^2               CH^3
             |
            CH^3
```

Ho chiamato per brevità quest'acido *desmotropo-santoninico*, ed ora lo descrivo.

([1]) Il carvol si trasforma nel carvacrol per azione dell'anidride fosforica o della potassa (Völkel und Liebig's, Ann. LXXXV, p. 246; e Kekulè und Fleiscer, Berl. Ber., VI, p. 1088).

([2]) Goldschmidt, Berl. Ber., XX, p. 491.

Acido desmotropo-santoninico $C^{12}H^{13}\begin{cases} OH \\ CH(CH^3)COOH \\ OH \end{cases}$

Per ottenere l'ossiacido si prepara prima il sale baritico, sciogliendo il lattone nella soluzione acquosa d'idrato baritico, eliminando l'eccesso di barite con CO^2, che precipita anche un poco del lattone, portando a secco a b. m. la soluzione, riprendendo il residuo con acqua, filtrando e concentrando nel vuoto.

Il sale baritico per la sua grande solubilità nell'acqua e nell'alcool difficilmente si ottiene cristallizzato; si può però precipitare dalla soluzione alcoolica con etere.

La determinazione di bario del sale, diseccato a 150°, ha fornito i seguenti dati: gr. 0,2381 dànno gr. 0,0832 di SO^4Ba

	calcolato per $(C^{15}H^{19}O^4)^2$ Ba	trovato
Ba	20,64	20,53

La soluzione acquosa del suddetto sale raffreddata a 0° si comporta in modo del tutto simile a quella del santoninato baritico, cioè coll'acido cloridrico diluito, freddo e in difetto non dà alcun precipitato. Estraendo con etere, svaporando a temperatura ordinaria si ottiene l'acido desmotropo-santoninico dapprima vischioso e poi cristallino, che non si conserva lungo tempo, perchè lentamente sfiorisce mutandosi nel lattone. Invece un eccesso di acido cloridrico aggiunto alla soluzione del sale baritico a caldo precipita direttamente il lattone, come avviene col sale baritico dell'acido santoninico.

Acetil-desmotropo-santonina $C^{12}H^{13} < \begin{matrix} O.CO.CH^3 \\ CH(CH^3)CO \end{matrix}$ (con ponte —O— tra $C^{12}H^{13}$ e CO)

Si scioglie la desmotropo-santonina nel decuplo del suo peso di anidride acetica insieme al doppio d'acetato sodico fuso, si fa bollire per mezz'ora, quindi si elimina a pressione ridotta l'eccesso d'anidride acetica e si lava con acqua sopra un filtro il residuo che poi si cristallizza dall'etere.

L'acetil-derivato cristallizza in aghi lucenti, fusibili a 156°, solubili facilmente nell'alcool e nell'acido acetico, e nell'etere.

L'analisi elementare ed il peso molecolare, determinato col metodo crioscopico in soluzione acetica, conducono alla formola $C^{17}H^{20}O^4$ infatti:

a) Determinazione del C e dell'H.

gr. 0,1784 di sostanza (seccata 100°) danno gr. 0,4630 di CO^2 e gr. 0,1124 di H^2O.

	calcolato	trovato
C	70,83	70,78
H	6,94	7,00

b) Determinazione del peso molecolare.

		Teoretico
Concentrazione della soluzione per %	2, 21	
Abbassamento del punto di congelazione . . .	0°,28	
Coefficiente d'abbassamento	0,12674	
Costante per l'acido acetico	36, 50	39,00
Peso molecolare	307	288

È destrogiro come la demotropo-santonina da cui deriva.

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per % . .	1,322
Temperatura	18°
Lunghezza del tubo in mm.	200
Deviazione osservata	+ 2°,46
Potere rotatorio: specifico	+ 92,9
Potere rotatorio: molecolare	+ 268

Quest'acetil-derivato bollito sia con potassa, sia con acido cloridrico, ridà facilmente la desmotropo-santonina.

Metil-desmotropo-santonina $C^{12} H^{13} < \begin{matrix} O \cdot CH^3 \\ CH (CH^3) CO \end{matrix}$ (— O —)

Preparai la metil-desmotropo-santonina facendo agire sul composto sodico della demotropo-santonina il joduro di metile nel modo seguente:

Si disciolgono in cc. 10 di alcool metilico assoluto grammi 0,2 di sodio, poi raffreddato il liquido gr. 1 di demotropo-santonina e si aggiungono 2 cc. di joduro di metile. La reazione si compie alla temperatura ordinaria e termina, generalmente dopo 24, al più 48 ore, quando il liquido da alcalino è diventato neutro; si può anche compiere in un paio d'ore, se si riscalda a pressione in apparecchio a ricadere, ma in tal caso si forma una quantità assai notevole dell'isomero metil-isodesmotropo-santonina.

Il prodotto principale della reazione alcune volte si separa in parte cristallizzato in aghi, però sempre conviene distillare l'eccesso di joduro di metile e l'alcool metilico, decolorare il liquido oleoso restante con qualche goccia di anidride solforosa, precipitare con acqua, ed estrarre subito con etere prima che si solidifichi la sostanza vischiosa che si è separata, poichè così vischiosa è molto più solubile nell'etere. Svaporando l'etere si depone la metil-desmotropo-santonina cristallizzata in lunghissimi aghi setacei ed incolori, più solubili a caldo che a freddo nell'etere e nell'alcool, quasi insolubili nell'acqua e ricristallizzati dall'alcool fondono a 152°-153°.

Nella soluzione eterea resta la metil-isodesmotropo-santonina inquinata da altre sostanze che ne impediscono la cristallizzazione. La maggior o minor quantità di quest'isomero dipende dalla temperatura colla quale si è effettuata la reazione, poichè gli alcoolati sodici trasformano facilmente a caldo la desmotropo-santonina in iso-desmotropo-santonina, come vedremo quando descrivendo la preparazione dell'etil-desmotropo-santonina m'intratterò sull'azione del solo etilato sodico sulla desmotropo-santonina.

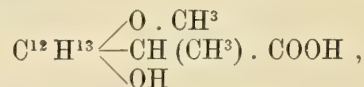
La composizione ed il potere rotatorio della metil-desmotropo-santonina, seccata a 100°, risultano dai dati seguenti:

sostanza gr. 0,2335 ; CO^2 gr. 0,6291 ; H^2O 0,1694.

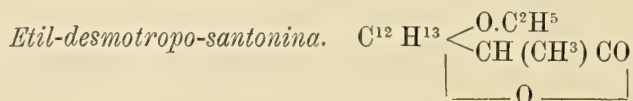
	calcolato per $C^{16}H^{20}O^3$	trovato
C	73,84	73,48
H	7,70	7,85

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per $^0/_0$.	1,718
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{27^\circ}$ . . .	+ 3°,47
Potere rotatorio { specifico	+ 91,9
Potere rotatorio { molecolare	+ 239

La metil-desmotropo-santonina è insolubile a freddo nelle soluzioni acquose d'idrato potassico, poichè il metile sostituisce l'H del OH naftolico; si discioglie però dopo lungo riscaldamento in quelle bollenti trasformandosi nel sale potassico dell'acido metil-desmotroposantoninico.

$$C^{12}H^{13} \begin{cases} O\,.\,CH^3 \\ CH\,(CH^3)\,.\,COOH \\ OH \end{cases} ,$$

che libero è pochissimo stabile, infatti elimina subito una molecola di acqua e si ritrasforma nella metil-desmotropo-santonina

Il metile non si distacca coll'idrato potassico; però, come quello d'un etere fenolico, per azione dell'acido jodidrico a 127° si elimina allo stato di joduro di metile, ma non si rigenera la desmotropo-santonina essendo questa ridotta ulteriormente dall'acido jodidrico.

Etil-desmotropo-santonina. $C^{12}H^{13} \begin{cases} O.C^2H^5 \\ CH\,(CH^3)\,CO \end{cases}$ (con ponte —O— tra $C^{12}H^{13}$ e CO)

Si prepara l'etil-desmotropo-santonina nella stessa maniera del corrispondente derivato metilico, sostituendo soltanto all'alcool metilico ed al joduro di metile l'alcool etilico ed il ioduro d'etile. Anche in questo caso è preferibile che la reazione si compia alla temperatura ordinaria, poichè a caldo si forma una maggior quantità dell'isomero etil-iso-desmotropo-santonina.

Il prodotto della reazione viene dalla soluzione alcolica, concentrata per distillazione, precipitato coll'acqua sotto forma di una materia vischiosa che si deve estrarre subito con etere. Per svaporamento si ottiene la etil-desmotropo-santonina cristalizzata in aghi, e si purifica perfettamente con una sola cristallizzazione dall'alcool, mentre nei residui resta l'etil-iso-desmotropo-santonina, la quale richiede talvolta più di un mese per cristallizzare.

La formazione di quest'ultima sostanza si deve alla trasformazione della desmotropo santonina, nell'iso-desmotropo-santonina per azione dell'alcoolato sodico, infatti facendo bollire entro apparecchio a ricadere e colla pressione aumentata di una atm., 1 p. di desmotropo-santonina sciolta in 20 d'alcool etilico assoluto, nel quale vi sono già state disciolte 0,2 di sodio, si depone lentamente una sostanza cristallina, che raccolta rapidamente su filtro, lavata con pochissimo alcool assoluto, seccata fra mattoni assorbenti entro un esiccatore sull'acido solforico e quindi disciolta in acqua con un acido (Cl H) si può precipitare l'iso-desmotropo-santonina, però mescolata ad un po' di desmotropo-santonina.

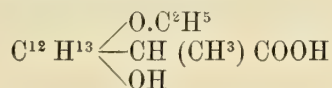
Identificai l'iso-desmotropo-santonina coll'esame delle sue proprietà fisiche (punto di fusione e potere rotatorio) e coll'esame delle proprietà, del suo prodotto di riduzione, acido levo santonoso, e del levo-santonito etilico.

L'etil-desmotropo-santonina è quasi insolubile nell'acqua, si discioglie più a caldo che a freddo nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico e fonde a 168°-169°.

Devia il piano della luce polarizzata a destra, come risulta dal seguente specchio:

	I	II
Solvente	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione per $^0/_0$	1,0464	1,2300
Lunghezza del tubo in mm. . .	219,65	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D{}^{28^\circ}$.	+ 2°,62	+ 3°,086
Potere rotatorio { specifico . .	+ 114,0	+ 114,2
Potere rotatorio { molecolare . .	+ 313	+ 313

È insolubile nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini, si discioglie lentamente in quelle bollenti formando il sale dell'ossiacido

$$C^{12}H^{13}\begin{cases} O.C^2H^5 \\ CH\ (CH^3)\ COOH \\ OH \end{cases}$$

pochissimo stabile, che perde spontaneamente una molecola d'acqua rigenerando la etil-desmotropo-santonina.

Benzil-desmotropo-santonina $C^{12}H^{13}<\begin{matrix} O\text{-}CH^2.C^6H^5 \\ CH\ (CH^3)\text{-}CO \end{matrix}$ (con ponte —O— tra C)

In questo Istituto chimico il dottore Nicola Castoro [1] facendo reagire sopra ogni molecola di desmotropo-santonina due molecole di alcoolato sodico e due moleeole di cloruro di benzile ottenne la benzil-desmotropo-santonina nel modo seguente:

Si discioglie il sodio nell'alcool assoluto, si raffredda, si aggiunge la desmotropo-santonina, che si discioglie rapidamente, ed infine il cloruro di benzile. La reazione si compie a freddo e richiede per completarsi circa una settimana.

La benzil-desmotropo-santonina si separa in parte dal liquido cristallizzata in aghi ed il rimanente cristallizza per concentrazione del liquido. Si purifica lavandola

[1] Gazzetta chimica italiana, anno XXV, vol. II, pag. 352.

con acqua, per eliminare il cloruro di sodio, e poi cristallizzandola dall'alcool, nel quale è molto più solubile a caldo che a freddo.

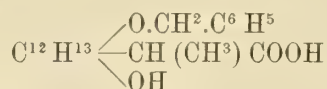
Cristallizza in lunghi aghi lucenti, fusibili a 182°.

Il potere rotatorio risulta dal seguente specchietto:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per % .	0,204
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazone osservata per $(\alpha)_D^{18°}$ . . .	+ 0°,46
Potere rotatorio { specifico	+ 102,6
Potere rotatorio { molecolare	+ 345.

Questi valori però sono approssimativi, perchè la piccolissima solubilità della benzil-composto in tutti i solventi a freddo non ha permesso di adoperare una soluzione più concentrata.

La benzil-desmotropo-santonina è insolubile nelle soluzioni degli idrati alcalini a freddo, mentre si discioglie in quelle bollenti trasformandosi nel sale dell'acido benzil-desmotropo-santoninico.

$$C^{12}H^{13} \begin{cases} O.CH^2.C^6H^5 \\ CH(CH^3)COOH \\ OH \end{cases}$$

Quest'acido essendo meno solubile nell'acqua degli altri acidi desmotropo-santoninici si può precipitare per mezzo di un acido minerale e lavato con acqua si conserva abbastanza bene; però bollito nell'acqua si trasforma nella benzil-desmotropo-santonina.

Iso-desmotropo-santonina $C^{12}H^{13} \begin{cases} OH \\ CH(CH^3)\text{-}CO \end{cases}$ (O ponte tra OH e CO)

La desmotropo-santonina fusa al di là di 300° con idrato potassico si decompone profondamente formando materie brune e vischiose; se invece si riscalda a 210° essa si trasforma rapidamente nel sale potassico di un ossiacido, isomero al desmotropo-santoninico, che messo in libertà per mezzo di un acido minerale, perde facilmente anch'esso gli elementi di una molecola d'acqua trasformandosi in un nuovo lattone, che chiamo sin d'ora *iso-desmotropo-santonina.*

Ho comparativamente voluto riscaldare la santonina con potassa caustica a 210°; essa in modo analogo si trasforma nel sale di un ossiacido isomero all'acido santoninico di Hesse; cioè nello stesso acido santonico, ottenuto dai prof.[i] Cannizzaro e Sestini, per l'azione prolungata della barite sulla santonina ([1]) che ho identificato col punto di fusione e anche coll'esame delle proprietà dei suoi eteri etilico e metilico.

È probabile che l'idrato potassico modifichi similmente la molecola della santonina e quella della desmotropo-santonina, nel convertire l'una in acido santonico e l'altra in acido iso-desmotropo-santoninico.

([1]) Gazz. chim. ital., vol. III, pag. 241.

La desmotropo-santonina si trasforma in parte, anche a temperatura più bassa in iso-desmotropo-santonina per azione dell'alcoolato sodico, come ho già accennato parlando dell'etil-desmotropo-santonina.

È però preferibile preparare quest'altro isomero della santonina, col seguente metodo:

S'introducono in palloni a collo stretto, della capacità di 100 cc., gr. 5 di-desmotropo-santonina, gr. 5 d'idrato potassico puro e 5 cc. di acqua; quindi s'immergono i palloni in bagno di lega riscaldato fra 210° e 220°.

Sul primo si discioglie il tutto nell'acqua, poi per rapida ebollizione il liquido si concentra sinchè si rapprende in una massa solida biancastra. Allora il recipiente viene subito tolto dal bagno, poichè per un ulteriore riscaldamento il contenuto imbrunirebbe.

Durante il riscaldamento col vapor acqueo non si sviluppano nè gas, nè altri vapori.

La soluzione acquosa del contenuto dei palloncini saturata con anidride carbonica non precipita nessuna sostanza di natura esclusivamente fenica o naftolica, mentre poi con acido solforico diluito aggiunto, poco a poco, si precipita una sostanza molle che si ridiscioglie agitando il liquido sinchè resta del bicarbonato potassico.

Il precipitato da molle diviene spontaneamente duro e cristallino dopo qualche ora e subito se si riscalda a 100°, e così modificato non è più solubile nei carbonati alcalini.

La purificazione del prodotto si raggiunge facilmente con successive cristallizzazioni dall'alcool, dall'etere e dal cloroformio.

Il rendimento è teoretico.

L'iso-desmotropo-santonina si presenta in aghi solubili, più a caldo che a freddo, nell'alcool e nell'acido acetico, discretamente solubili nell'etere e nell'acqua bollente; fonde fra 188°-189° con leggera scomposizione.

I risultati dell'analisi di un campione seccato a 100° conducono alla formola: $C^{15}H^{18}O^{3}$:

sostanza gr. 0,1913 ; CO^2 0,5134 ; H^2O 0,1285

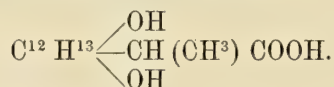
	calcolato	trovato
C	73,17	73,19
H	7,32	7,46

L'iso-desmotropo-santonina devia come la desmotropo-santonina il piano della luce polarizzata a destra, ma con maggior intensità.

	I.	II.
Solvente	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per °/₀ .	1,3204	2,8184
Lunghezza del tubo in mm.	219,65	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$ . . .	+ 3°,706	+ 8°,03
Potere rotatorio specifico	+ 127,9	+ 129,7
Potere rotatorio molecolare	+ 315	+ 319

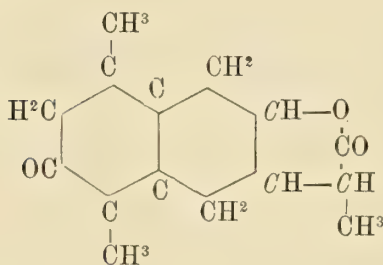
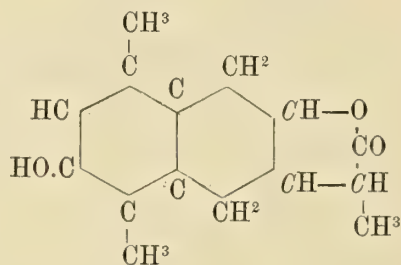
Mentre per la desmotropo-santonina il valo e medio di $(\alpha)_D$ è $+110,{}^{\cdot}3$

L'iso-desmotropo-santonina contiene, come la desmotropo-santonina, l'OH naftolico al posto del CO cetonico della santonina, infatti anch'essa non reagisce nè coll'idrossilammina, nè colla fenilidrazina; invece dà i derivati acetilico, metilico, etilico e benzilico che hanno il comportamento di veri eteri fenolici; si discioglie a freddo nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini e riprecipita in parte coll'anidride carbonica, mentre a caldo, contenendo il gruppo lattonico come la santonina, si trasforma nei sali del suo corrispondente ossiacido

$$C^{12}H^{13}\begin{cases} OH \\ CH(CH^3)COOH. \\ OH \end{cases}$$

Insomma il comportamento chimico dell'iso-desmotropo-santonina è perfettamente analogo a quello della desmotropo-santonina. Queste due sostanze ed i loro derivati differiscono invece notevolmente nei caratteri fisici, difatti i composti desmotropo sono meno solubili, fondono ad una temperatura più alta ed hanno un potere rotatorio più piccolo del loro isomero iso-desmotropo, come risulta per queste due ultime proprietà, nel quadro posto infine della presente Memoria.

Probabilmente l'isomeria delle due desmotropo-santonine dipende soltanto da una diversa configurazione nello spazio della loro melecola, mentre nel piano devono essere rappresentate con un medesimo schema.

Come la formola di struttura adottata per la santonina, quella che serve a rappresentare le due desmotropo-santonine

CH³				CH³		
C	CH²			C	CH²	
H²C	C	*C*H—O		HC	C	*C*H—O
		CO				CO
OC	C	*C*H—*C*H		HO.C	C	*C*H—*C*H
C	CH²	CH³		C	CH²	CH³
CH³				CH³		

Santonina — Desmotropo-santonine

contiene tre atomi di carbonio asimetrici; per i quali essendo possibili sei stereoisomeri sarebbe, per lo meno per ora, molto azzardato voler rappresentare nello spazio la configurazione delle due nuove santonine.

Il punto di fusione della desmotropo-santonina così elevato (260°) e la debole sua solubilità in tutti i suoi solventi mi ha fatto dubitare che essa sia un *polimero*, od un *racemo-parziale*; ossia un racemo risultante dall'unione di due molecole attive per compensazione di uno o due dei tre atomi di carbonio asimmetrici.

Ho dovuto abbandonare l'idea d'un polimero, poichè la grandezza molecolare, come abbiamo visto, corrisponde per la formola semplice $C^{15}H^{18}O^3$; il che però non esclude la probabilità d'*un racemo parziale*, essendo i racemi in soluzione sempre dissociati nei loro due componenti attivi.

La formazione della desmotropo-santonina per opera dell'acido cloridrico concentrato appoggierebbe quest'ultima probabilità, poichè esso è uno degli agenti più adattati per trasformare le sostanze otticamente attive nei loro racemi.

Avrò occasione di ritornare su questo argomento, però sin d'ora intendo far queste ipotesi con la massima riserva.

$$\textit{Acido iso-desmotropo-santoninico}\quad C^{12}H^{13}\begin{cases}OH\\CH(CH^3)COOH\\OH\end{cases}$$

Si prepara il sale di bario dell'ossiacido corrispondente alla iso-desmotropo-santonina disciogliendo questa nella barite, saturando l'eccesso di barite con anidride carbonica (la quale però oltre al carbonato di bario precipita a lungo andare anche un poco di lattone) ed infine svaporando la soluzione filtrata nel vuoto.

Il sale baritico si presenta in croste cristalline molto solubili nell'acqua.

La determinazione di bario del sale suddetto seccato a 150° dà i seguenti risultati:

gr. 0,3999 dànno gr. 0,1423 di SO^4Ba

	calcolato per $(C^{15}H^{19}O^4)^2Ba$	trovato
Ba	20,64	20,90

La soluzione del sale baritico acquosa, diluita e raffreddata a 0°, con acido cloridrico, pure freddo, diluito ed in difetto, non dà nessun precipitato, però estraendo con etere per evaporazione resta l'acido iso-desmotropo-santoninico, che dapprima è vischioso e poi si rapprende in una massa cristallina formata da minutissimi aghi; esso si conserva alla temperatura ordinaria, ed è perciò un poco più stabile dell'acido desmotropo-santoninico che come ho detto, spontaneamente sfiorisce e si converte nel lattone corrispondente. Se si scalda a b. m. l'acido iso-desmotropo-santoninico in soluzione acquosa elimina anch'esso una molecola di acqua e si converte nel suo lattone, che si depone cristallino.

La maggiore stabilità dell'acido iso-desmotropo-santoninico relativamente al desmotropo-santoninico, e quella dell'acido santonico relativamente all'acido santoninico fa supporre che l'azione della potassa a 210°, tanto sulla desmotropo-santonina, quanto sulla santonina, produca, come ho già accennato, una simile modificazione per la quale i due nuovi ossiacidi che ne derivano, sono più stabili degli ossiacidi corrispondenti alle santonine adoperate. È anche possibile che la stabilità degli ossiacidi dipenda dalla solubilità nell'acqua del loro lattone, infatti la desmotropo-santonina che è meno solubile della santonina e della iso-desmotropo-santonina, dà un ossiacido instabilissimo e non si discioglie che difficilmente ed in piccole quantità, nelle soluzioni bollenti dei carbonati alcalini, mentre si conservano meglio gli ossiacidi delle altre due santonine e queste si disciolgono completamente nelle soluzioni dei carbonati alcalini dopo una prolungata ebollizione.

Acetil-iso-desmotropo-santonina $C^{12}H^{13}<{O\text{-}OC\,CH^3 \atop CH\,(CH^3)\,CO}$ (with O bridging CH(CH³) and CO)

L'acetil-composto si prepara facendo bollire per circa mezz' ora l'iso-desmotropo-santonina disciolta nel decuplo del suo peso di anidride acetica con il doppio di acetato sodico fuso. Dopo aver distillato l'eccesso di anidride acetica a pressione ridotta, si lava con acqua il residuo, che si purifica con ripetute cristallizzazioni dall'etere. L'acetil-derivato cristallizza in piccoli prismi lucenti, fusibili a 154°, solubili nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico; saponificato con idrato potassico si scinde in acido acetico e nell'iso-desmotropo-santonina (fusibile a 187°); mentre l'acetil-derivato della desmotropo-santonina che fonde quasi alla stessa temperatura (156°) ha invece un'altra apparenza cristallina e saponificato colla potassa caustica ridà la desmotropo-santonina fusibile a 260°. I due acetil-derivati differiscono anche fra loro per l'intensità del potere rotatorio, infatti, per l'acetil-desmotropo-santonina $(\alpha)_D^{18°}$ è = a + 92°,9 e per l'acetil-iso è $(\alpha)_D^{18°}$ = a + 122,6, quest'ultimo valore risulta dai seguenti dati:

Solvente	. . . .	Alcool assoluto
Concentrazione per %	. . . .	1,3556
Temperatura	. . . .	28°
Lunghezza del tubo in mm.	. . . .	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$	. . . . . .	+ 3°,65
Potere rotatorio	specifico	+ 122,6
	molecolare	+ 353

Metil-iso-desmotropo-santonina $C^{12}H^{13}<{O\text{-}CH^3 \atop CH\,(CH^3)\,CO}$ (with O bridging CH(CH³) and CO)

Si prepara la metil-iso-desmotropo-santonina disciogliendo in 10 p. di alcool metilico assoluto, prima 0,2 di sodio, poi 1 di iso-desmotropo-santonina, infine aggiungendo 4 di joduro di metile e riscaldando per un paio di ore in un apparecchio a ricadere coll'aumento di 1 atmosfera di pressione. La reazione è terminata quando il liquido da alcalino è diventato neutro, o leggermente acido. Per distillazione si allontana la più gran parte dell'alcool metilico, che trascina tutto l'eccesso di joduro di metile; si decolora il liquido restante con anidride solforosa e si precipita con acqua il prodotto della reazione sotto forma d'una materia vischiosa, che si estrae con etere.

Per svaporamento nel vuoto della soluzione eterea si depone un miscuglio di metil-iso-desmotropo-santonina e di metil-desmotropo-santonina insieme ad una piccola quantità di un' altra sostanza, che fonde al di là di 200° e che si separa facilmente dai due isomeri per la sua poca solubilità nell'etere.

Però la separazione dei due isomeri riesce oltremodo difficile, a causa della loro presso a poco uguale solubilità nei solventi; conviene disciogliere il miscuglio nell'alcool etilico diluito e bollente e quindi con molta cura sorvegliare la cristallizzazione. Sul primo si depone la metil-iso-desmotropo-santonina cristallizzata in

mammelloni opachi, poi la metil-desmotropo in piccoli prismi trasparenti e concentrando torna a deporsi la metil-iso-desmotropo.

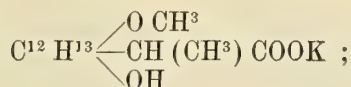
I due isomeri così separati non sono puri, perchè l'uno inquina ancora l'altro; conviene sottoporli entrambi ad un'altra cristallizzazione frazionata.

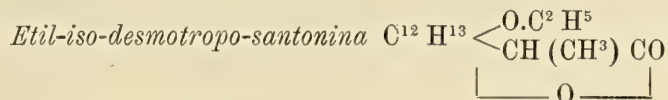
La metil-desmotropo-santonina, così ottenuta, cristallizza in aghi setacei fusibili a 152° e 153°, come quella preparata dalla desmotropo-santonina.

L'iso-metil-desmotropo-santonina cristallizza invece in piccoli aghi riuniti a mammelloni, fusibili fra 111° e 112°; è solubile nell'alcool vinico e metilico, nell'etere, nel cloroformio, nell'etere acetico, ed è insolubile nell'acqua. Il suo potere rotatorio risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	3,8036
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{27°}$	+ 9°,88
Potere rotatorio specifico	+ 118,2
Potere rotatorio melecolare	+ 301

È insolubile a freddo nelle soluzioni d'idrato potassico, vi si discioglie a caldo trasformandosi nel sale

$$C^{12}\,H^{13} \begin{cases} O\,CH^3 \\ CH\,(CH^3)\,COOK \\ OH \end{cases} ;$$

il di cui acido, come gli altri ossiacidi desmotropo-santoninici, è poco stabile, perde una molecola d'acqua e si ritrasforma nel suo lattone.

Etil-iso-desmotropo-santonina $C^{12}\,H^{13} \begin{cases} O.C^2\,H^5 \\ CH\,(CH^3)\,CO \end{cases}$ (CH e CO legati da O)

L'etil-iso-desmotropo-santonina, sempre mescolata alla etil-desmotropo, si può ottenere tanto dall'iso-desmotropo-santonina, quanto dalla desmotropo.

Quando s'impiega la desmotropo-santonina la produzione dei due isomeri suddetti si deve, come ho già dimostrato, alla trasformazione parziale della desmotropo-santonina nell'iso-desmotropo per l'azione dell'alcoolato sodico; quando invece s'impiega l'iso-desmotropo-santonina si può ammettere, o la trasformazione inversa, oppure la conversione dell'etil iso-desmotropo nell'etil-desmotropo.

Intendo in seguito riprendere lo studio delle condizioni per le quali si effettua il reciproco passaggio da una serie all'altra, poichè spero con tali ricerche potere in qualche modo spiegare l'isomeria delle due desmotropo-santonine.

Il miglior metodo di preparare la etil-iso-desmotropo-santonina è il seguente:

Si discioglie l'iso-desmotropo-santonina in una soluzione bollente d'etilato sodico, si raffredda, si aggiunge il joduro di etile, poi si riscalda all'ebollizione per 2 ore in un apparecchio a ricadere coll'aumento di un atmosfera di pressione. Si allontana per distillazione il joduro d'etile e la più gran parte dell'alcool etilico, si

decolora il residuo con anidride solforosa e coll'acqua si precipita il prodotto della reazione oleoso, che si estrae con etere.

Per svaporamento della soluzione eterea si depone prima l'etil-desmotropo-santonina cristallizzata in aghi fusibile a 166° e dopo molto tempo (talvolta anche più d'un mese) dal liquido vischioso restato si separa l'etil-iso-composto in grosse tavole esagonali, giallognole e con un paio di cristallizzazioni dall'etere, o dall'alcool si ottiene puro, ben cristallizzato, in tavole incolore, con lucentezza adamantina, però alla luce solare ingiallisce leggermente alla superficie.

Fonde a 82°; è solubilissimo nell'etere, nell'alcool, nel cloroformio ed è quasi insolubile nell'acqua. Polverizzato nell' oscurità presenta la curiosa proprietà di dar sprazzi luminosi.

La sua composizione centesimale corrisponde per la formola $C^{15}H^{17}O^{2}, OC^{2}H^{5}$.

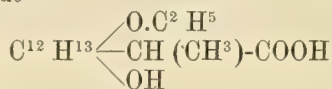
sostanza (seccata nel vuoto) gr. 0,2246; $H^{2}O$ gr. 0,1696; CO^{2} gr. 0,6135

	calcolato	trovato
C	74,45	74,50
H	8,03	8,39

Il suo potere rotatorio risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione per %	5,1312	6,0480
Lunghezza del tubo in mm. . .	219,65	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{27°}$.	+ 14°,57	+ 17°,22
Potere rotatorio { specifico . . .	+ 129,3	+ 129,6
Potere rotatorio { molecolare . .	+ 355	+ 355

Anch'esso si discioglie soltanto a caldo nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini formando il sale dell'ossiacido

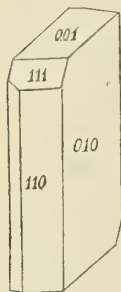
$$C^{12}H^{13}\begin{cases} O.C^{2}H^{5} \\ CH(CH^{3})\text{-}COOH \\ OH \end{cases}$$

pochissimo stabile, che perde facilmente una molecola d'acqua rigenerando l'etil-iso-desmotropo-santonina.

L'etil-iso-desmotropo-santonina fu studiata nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Roma dall'egregio dott. Luigi Brugnatelli, il quale gentilmente mi comunicò i seguenti risultati:

Cristalli tabulari generalmente allungati secondo l'asse verticale appartenenti al gruppo emimorfo del sistema monoclino (fig. 1). Il carattere emimorfo dei cristalli è dato dalla frequente mancanza delle facce (110) e $(\bar{1}\bar{1}0)$ del prisma }110{ e dalla costante presenza di }111{ colle sole facce (111) e $(\bar{1}1\bar{1})$. Solo in due cristalli tra i numerosissimi osservati si notò anche la faccia $(1\bar{1}1)$. Sottoposti alla prova piroelettrica col metodo di Kundt si osserva che per raffreddamento su (010) si deposita il minio (*polo analogo*) e su $(0\bar{1}0)$ lo zolfo (*polo antilogo*).

Fig. 1.

Forme osservate:

}001{, }010{, }110{, }111{, $\}0\bar{1}0\{$, $\}1\bar{1}0\{$, $\}1\bar{1}\bar{1}\{$.

Costanti cristallografiche:

$a:b:c = 0,2718:1:0,2556$

$\beta = 80° 20'$

	valori osservati	val. calcolati	n.
(010):(110)	75° —	*	9
(110):(001)	80 40	*	7
(110):(111)	40 59	*	4
(010):(111)	80 30	80° 21 ½	5
(001):(111)	39 44	39 41	4
(001):(100) (sfald.)	80 11	80 20	1

I cristalli sfaldano perfettamente secondo }100{ ed imperfettamente secondo }010{. Il piano degli assi ottici è parallelo a }010{. La bisettrice acuta è nell'angolo ottuso β e fa con [001] un angolo di circa 52° (*luce media*). Dispersione degli assi ottici notevolissima $\varrho < v$; angolo degli assi ottici piccolo. Doppia rifrazione energica e positiva.

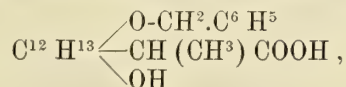
Benzil-iso-desmotropo-santonina $C^{12} H^{13} < \begin{matrix} O\text{-}CH^2.C^6 H^5 \\ CH (CH^3) CO \end{matrix}$ (O bridge between CH and CO)

Il dottore Nicola Castoro [1] preparò la benzil-iso-desmotropo-santonina col metodo già descritto per la preparazione della benzil-desmotropo-santonina, effettuando la reazione a caldo, invece che a freddo. La benzil-iso-desmotropo-santonina si forma insieme ad un po' del suo isomero; si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'alcool e dall'etere, dai quali solventi prima si depone l'isomero e poi l'iso-benzil-desmotropo, che è molto più solubile e che fonde a 82°.

Il potere rotatorio della benzil-iso-desmotropo-santonina risulta dal seguente specchietto:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per % . .	2,0872
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21°}$	+ 6°,26
Potere rotatorio { specifico	+ 136,5
Potere rotatorio { molecolare	+ 459.

La benzil-iso-desmotropo-santonina è solubile nelle soluzioni degli idrati alcalini formando il corrispondente sale dell'acido benzil-iso-desmotropo-santoninico

$$C^{12} H^{13} \begin{cases} O\text{-}CH^2.C^6 H^5 \\ CH (CH^3) COOH, \\ OH \end{cases}$$

il quale si può precipitare con un acido e lavato con acqua si conserva alla temperatura ordinaria, ma riscaldato anche in seno all'acqua si ritrasforma nella benzil-iso-desmotropo-santonina.

[1] Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. II, pag. 354.

Riduzione della santonina.

Acido destro-santonoso $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH}$

L'acido santonoso destrogiro fu preparato la prima volta da Cannizzaro e Carnelutti per riduzione della santonina con acido jodidrico bollente (127°) e fosforo rosso ([1]).

Per una preparazione in grande di acido santonoso questo metodo oltre ad essere poco economico fornisce un prodotto assai impuro, che richiede una laboriosa purificazione e per conseguenza dà un rendimento meschino.

Provando altri riduttori trovai che il cloruro stannoso in soluzione cloridrica a freddo ([2]) soddisfa pienamente allo scopo, poichè con minor lavoro e spesa trasforma completamente la santonina in acido santonoso senza produrre quegli acidi vischiosi, che sempre inquinano l'acido santonoso preparato coll'acido jodidrico.

Inoltre la soluzione cloridrica di cloruro stannoso può servire per un numero infinito di preparazioni; anzi si va sempre più arricchendo di sale stannoso, soltanto richiede di essere riportata alla concentrazione voluta e saturata di acido cloridico gassoso ogni volta che si riadopera.

Preparai diversi chilogrammi di acido santonoso nel modo seguente:

Si discioglie entro un recipiente di 10 litri di capacità un chilogramma di santonina polverizzata in 5 litri di acido cloridrico puro (D. 1,187) esente di ferro, poi si aggiungono litri 2,5 di una soluzione di cloruro stannoso saturata di gas acido cloridrico a 20°, corrispondente a kgr. 1,250 di stagno; infine si introducono nel recipiente 500 grammi di stagno in verghe disponendolo in modo che il liquido sia per tutta la sua altezza a contatto col metallo.

La reazione si lascia compiere in un ambiente oscuro, nel quale la temperatura sia costantemente di circa 15°. Si deve rimescolare la soluzione almeno due volte al giorno.

Dopo due ore già incomincia a separarsi l'acido santonoso bianco e cristallino e dopo dieci giorni la riduzione è completa.

Si raccoglie il prodotto su filtro d'amianto e separata la soluzione stannosa filtrata, che come ho detto può essere impiegata per ridurre altra santonina, si lava il contenuto del filtro prima con acido cloridrico fumante, sinchè il filtrato non intorbida più con acqua; poi con acqua per allontanare l'acido cloridrico, infine si disecca nel vuoto a 100°.

Il rendimento è quasi teoretico, poichè si ottiene un peso di acido santonoso uguale a quello della santonina adoperata e basta una sola cristallizzazione dall'alcool per avere un prodotto purissimo.

Nelle acque madri si rinvengono piccole quantità di acido racemo-santonoso.

La riduzione della santonina in acido destro-santonoso si può esprimere colla seguente equazione:

$$C^{15}H^{18}O^3 + SnCl^2 + 2HCl = SnCl^4 + C^{15}H^{20}O^3.$$

([1]) Gazz. chim. ital., vol. XII, p. 393.

([2]) *Sulla riduzione della santonina.* Rend. R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1893, pag. 329.

Il cloruro stannico però impedisce il proseguire della riduzione e pertanto occorre lo stagno per riconvertirlo in sale stannoso.

L'acido santonoso così preparato è identico a quello ottenuto coll'acido jodidrico, infatti:

1° Fonde fra 179° e 180°.

2° Il potere rotatorio corrisponde a quello trovato da Cannizzaro e Carnelutti [1] come risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione	5,0235
Lungheza del tubo in mm.	200
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{20°}$	+ 7°,53
Potere rotatorio { specifico	+ 74,9
Potere rotatorio { molecolare	+ 186

3° La sua composizione corrisponde alla formola $C^{15}H^{20}O^3$.
sostanza gr. 0,1942 (seccata a 100°); H^2O gr. 0,1401; CO^2 gr. 0,5180

	calcolato	trovato
C	72,58	72,74
H	8,06	8,02

Come pure il peso molecolare che ho determinato col metodo crioscopico in soluzione acetica:

		Teoretico
Concentrazione della soluzione per %	2,59	
Abbassamento del punto di congelazione . . .	0°,38	
Coefficiente d'abbassamento	0°,1467	
Costante per l'acido acetico	36,37	39
Peso molecolare	266	248

L'acido destro-santonoso cristallizza in piccoli aghi fusibili a 179°-80°, distilla inalterato fra 200°-230° alla pressione di 5 mm. di mercurio; e solo in parte alla pressione ordinaria poichè si altera profondamente. È solubilissimo nell'alcool e nell'etere, poco nell'acqua bollente, pochissimo in quella fredda; si discioglie nei carbonati alcalini formando sali solubili nell'acqua e nell'alcool.

Il *sale sodico* $C^{15}H^{19}O^3Na$ si precipita con etere dalla soluzione alcoolica cristallizzato in aghetti minutissimi.

Il *sale di argento* annerisce anche nell'oscurità.

Il *sale baritico*, seccato a 130°, corrisponde alla formola Ba $(C^{15}H^{19}O^3)^2$, ed è solubile nell'acqua.

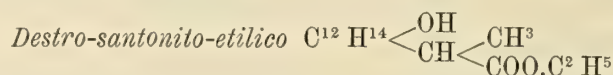
Destro-santonito-metilico $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH}<^{CH^3}_{COO.CH^3}$

[1] Loco citato, pag. 400 per $(\alpha)_D 20°$ trovarono una media di + 74,6.

Cannizzaro e Carnelutti (1) per l'azione dell'acido cloridrico ed alcool metilico sull'acido destro-santonoso ottennero il destro-santonito-metilico che è solubilissimo nell'etere e nell'alcool; perciò gli riuscì assai difficile il purificarlo per cristallizzazione nei detti solventi. Io ripreparando quest'etere, per determinarne il potere rotatorio e per compararlo col levo-santonito metilico, son riuscito a purificarlo facilmente cristallizzandolo dal miscuglio di etere e ligroina; così fonde a 86°, invece di 81°-84°, come avevano trovato i due sopra citati chimici.

Il potere rotatorio del destro-santonito metilico risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %	4,4608
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{18°}$	+ 8°,32
Potere rotatorio { specifico	+ 84,9
Potere rotatorio { molecolare	+ 222

Destro-santonito-etilico $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH<^{CH^3}_{COO.C^2H^5}}$

Il destro-santonito-etilico fu preparato da Cannizzaro e Carnelutti (2) per azione dell'acido cloridrico gassoso sulla soluzione alcoolica di acido santonoso. È bianco ben cristallizzato, solubile nell'alcool e nell'etere e fonde a 116°-17°.

Trovarono che il potere rotatorio specifico di quest'etere è uguale per $(\alpha)_D^{20°}$ (3):

in soluzione alcoolica	a	+ 72,7
" " cloroformica	"	+ 77,8
" " benzolica	"	+ 77,8
" " acetica	"	+ 67,2

Io ne ho rideterminato il potere rotatorio in alcool assoluto, ed ho ottenuto i seguenti valori:

Concentrazione per %	1,354
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{27°}$	+ 2°,11
Potere rotatorio { specifico	+ 71
Potere rotatorio { molecolare	+ 196

Il destro-santonito etilico cristallizzato diviene fosforescente quando si polverizza nell'oscurità.

Benzoil-destro-santonito-etilico $C^{12}H^{14}<^{O-CO.C^6H^5}_{CH(CH^3)COO.C^2H^5}$

Il benzoil-derivato del destro-santonito etilico, ottenuto da Cannizzaro e Carnelutti per azione del cloruro di benzoile (4), è una sostanza bianca solubilissima nell'etere,

(1) Loco citato p. 395.
(2) Loco citato p. 395.
(3) " " 400.
(4) Loco citato pag. 397.

dal quale cristallizza in lunghi aghi fusibili costantemente a 75° e non a 78°, come fu detto dai sopra citati chimici.

Di questo composto benzoilico ho determinato il potere rotatorio come qui risulta:

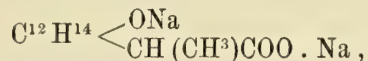
Solvente		Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %		4,00
Lunghezza del tubo in mm.		219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{20°}$		$+$ 5°,26
Potere rotatorio	specifico	$+$ 59,9
	molecolare	$+$ 227

Per azione dell'idrato potassico in soluzione alcoolica il benzoil-destro-santonito etilico si scinde in benzoato e santonito potassico, ma se l'azione della potassa non è prolungata si ottiene un po' di santonito etilico, il che dimostra che esce prima il benzoile e poi l'etile.

Sodio-destro-santonito-etilico $C^{12}H^{14}<^{ONa}_{CH(CH^3)COO\,.\,C^2H^5}$

Il composto sodico del santonito etilico fu preparato da Cannizzaro e Carnelutti [1] per azione del sodio metallico in soluzione eterea. Io l'ho ripreparato più facilmente colla quantità calcolata di alcoolato-sodico.

Il sodio-composto è bianco e decomponibile immediatamente dall'acqua fredda in santonito-etilico ed idrato-sodico; però ho osservato che la sua decomposizione è parziale, poichè filtrando subito per separare il santonito etilico, coll'anidride carbonica si precipita un'ulteriore quantità di quest'etere. Se invece dell'acqua si adopera una soluzione acquosa concentrata d'idrato sodico il composto sodico vi si discioglie completamente senza alterazione e coll'anidride carbonica se ne può precipitare il santonito etilico, purchè non si attenda molto tempo, infatti l'eccesso d'idrato sodico, anche a freddo, tende a trasformare il sodio-santonito etilico nel sodio-santonito sodico

$$C^{12}H^{14}<^{ONa}_{CH(CH^3)COO\,.\,Na},$$

il quale poi coll'anidride carbonica si cangia nel santonito sodico

$$C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)\,.\,COO\,Na},$$

che è solubile nell'acqua.

Ho inoltre osservato che aggiungendo una soluzione acquosa d'idrato sodico ad una alcoolica concentrata di santonito etilico non si forma alcun precipitato e nè quest'etere viene lì per lì saponificato, poichè è precipitato quasi tutto inalterato dall'anidride carbonica. Anche la soluzione acquosa e concentrata d'idrato sodico discioglie il santonito etilico trasformandolo nel sodio-derivato.

La formazione del composto sodico, sia col metallo, sia coll'alcoolato e sopratutto colla soluzione acquosa d'idrato, conferma l'esistenza di un OH nell'acido san-

(1) Loco citato, pag. 398.

tonoso, già dimostrato col derivato benzoilico, e nello stesso tempo ci fa conoscere la natura fenica di quest'ossidrile.

Più tardi dimostrerò, che anche gli altri tre acidi santonosi contengono l'ossidrile fenico, e quale è la sua provenienza e posizione nel nucleo naftalico.

Acido metil-destro-santonoso $C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O \,.\, CH^3 \\ CH\,(CH^3) \,.\, COOH \end{matrix}$

Ho preparato l'acido metil-destro-santonoso facendo agire il metilato sodico ed il joduro di metile, tanto sull'acido destro-santonoso, quanto sul destro-santonito etilico.

a) *Preparazione coll'acido destro-santonoso.*

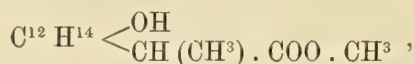
Acido santonoso	gr.	10
Sodio	»	2 [1]
Joduro di metile	cc.	10
Alcool metilico anidro	cc.	80

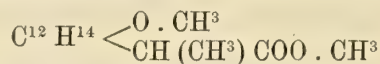
Si discioglie nell'alcool metilico prima il sodio, quindi l'acido santonoso, dopo aver raffreddato si aggiunge il joduro di metile, si lascia per 12 ore alla temperatura ordinaria e poi si riscalda per un paio d'ore in un apparecchio a ricadere sotto pressione. La reazione è completa quando il liquido è neutro o leggermente acido; allora distillando l'alcool metilico e l'eccesso di joduro di metile, restano i seguenti prodotti della reazione:

Il sale sodico dell'acido metil-destro-santonoso

$$C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O \,.\, CH^3 \\ CH\,(CH^3)\, COO \,.\, Na \end{matrix}$$

ed un poco di santonito sodico, che si separano trattando il residuo con acqua; il destro santonito metilico

$$C^{12}H^{14} < \begin{matrix} OH \\ CH\,(CH^3) \,.\, COO \,.\, CH^3 \end{matrix} ,$$

che resta in soluzione, allo stato di sodio-santonito metilico, quando si discioglie il residuo, già precedentemente lavato con acqua, in poco alcool e poi si aggiunge una soluzione acquosa d'idrato sodico; mentre così si precipita, come una materia vischiosa, il prodotto principale della reazione; cioè il metil-destro-santonito metilico

$$C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O \,.\, CH^3 \\ CH\,(CH^3)\, COO \,.\, CH^3 \end{matrix}$$

b) *Preparazione coll'etere etilico dell'acido destro-santonoso.*

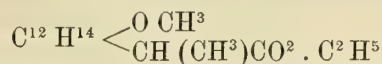
Santonito etilico	gr.	10
Sodio	»	1,5 [2]
Joduro di metile	cc.	10
Alcool metilico	»	60

La reazione si effettua nelle medesime condizioni descritte per la preparazione a).

[1] La quantità del sodio corrisponde a poco più di 2 atomi per ogni molecola di acido santonoso.

[2] La quantità del sodio corrisponde a circa tre atomi per ogni due molecole di etere santonoso.

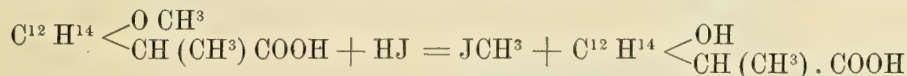
Il prodotto della reazione è il destro metil-santonito-etilico

$$C^{12} H^{14} < \begin{matrix} O\,CH^3 \\ CH\,(CH^3)CO^2 . C^2 H^5 \end{matrix}$$

misto ad un po' di santonito etilico, che non ha reagito e che si elimina disciogliendo il miscuglio in poco alcool e riprecipitando con una soluzione acquosa di soda, nella quale resta soltanto disciolto il santonito etilico.

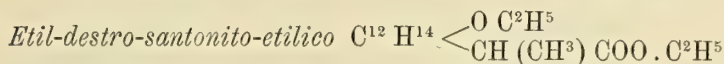
Gli eteri metilico ed etilico dell'acido metil-destro-santonoso ottenuti con questi metodi sono vischiosi e difficilmente potrebbero essere purificati per cristallizzazione, anche perchè devono fondere ad una temperatura molto bassa; perciò ho creduto conveniente saponificarli con una soluzione idro-alcoolica d' idrato sodico e di purificare invece l'acido metil-destro-santonoso per ripetute cristallizzazioni da un miscuglio d'etere e ligroina.

Quest' acido cristallizza in prismi riuniti a mammelloni, fonde a 116°-117°, è insolubile nell'acqua, solubilissimo nell'alcool, nell'etere e solubile nella ligroina.

Si discioglie nei carbonati alcalini a freddo; coll'acido jodidrico, bollente a 127°, si scinde nettamente in joduro di metile ed acido destro-santonoso (che identificai coll'esame di tutti i caratteri fisici non escluso il potere rotatorio) secondo l'equazione:

$$C^{12} H^{14} < \begin{matrix} O\,CH^3 \\ CH\,(CH^3)\,COOH \end{matrix} + HJ = JCH^3 + C^{12} H^{14} < \begin{matrix} OH \\ CH\,(CH^3) . COOH \end{matrix}$$

Il potere rotatorio dell'acido metil-destro-santonoso risulta dai dati seguenti:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	4,6196
Lunghezza del tubo in mm	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{27°}$	+ 7°,32
Potere rotatorio { specifico	+ 72,2
Potere rotatorio { molecolare	+ 189

Etil-destro-santonito-etilico $C^{12} H^{14} < \begin{matrix} O\,C^2H^5 \\ CH\,(CH^3)\,COO . C^2H^5 \end{matrix}$

L'etil-destro-santonito etilico fu preparato da Cannizzaro e Carnelutti [1] per azione del joduro d'etile sul sodio-destro-santonito etilico. Io l'ho ripreparato con questo metodo ed anche dall'acido destro-santonoso, e dal destro-santonito etilico, col joduro d'etile ed etilato sodico in soluzione alcoolica, riscaldando in apparecchio a ricadere sotto pressione.

Cristallizza in aghi fusibili fra 31°-32°; è solubile nell'alcool e nell'etere.

Ho determinato il suo potere rotatorio, come risulta dai dati seguenti:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	4
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21°}$	+ 6°,194
Potere rotatorio { specifico	+ 70,5
Potere rotatorio { molecolare.	+ 214

(1) Loco citato, pag. 398.

Acido etil-destro-santonoso $C^{12}H^{14}<^{O\,.\,C^2H^5}_{CH\,(CH^3)\,COOH}$

L'acido etil-destro-santonoso fu ottenuto da Cannizzaro e Carnelutti [1] saponificando il suo etere etilico con idrato potassico in soluzione alcoolica e purificato per ripetute cristallizzazioni nell'alcool diluito sinchè fondeva fra 115°,5 e 116°.

Ho ripreparato quest'acido e cristallizzandolo più volte in un miscuglio d'etere e ligroina l'ho ottenuto perfettamente bianco, in minuti aghetti fusibili a 120°.

L'acido etil-destro-santonoso è solubilissimo nell'etere e nell'alcool, mentre non è molto solubile nella ligroina; il suo potere rotatorio specifico secondo le determinazioni di Cannizzaro e Carnelutti [2] ha nei varî solventi per $(\alpha)_D^{20°}$ i seguenti valori:

Alcool	+ 74°,8
Cloroformio	+ 77, 9
Benzol	+ 77, 9

Ho rideterminato il potere rotatorio di quest'acido purissimo, fusibile a 120°, sciolto in alcool assoluto, come qui risulta:

Concentrazione per %	. . . .	4
Lunghezza del tubo in mm.	. . . .	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{15°}$	. . . .	+ 6°,42
Potere rotatorio	specifico	+ 73,1
	molecolare	+ 202

L'acido etil-destro-santonoso coll'alcool etilico e l'acido cloridrico ridà l'etil-destro-santonito etilico fusibile a 31°-32°; coll'acido jodidrico bollente (127°) si scinde nettamente in joduro d'etile ed acido destro-santonoso, che identificai coll'esame delle principali proprietà fisiche, specialmente quella caratteristica del potere rotatorio come risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %	1,7048
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$	+ 2°,80
Potere rotatorio specifico	+ 74,7

Questo valore corrisponde perfettamente con quelli trovati per l'acido destro-santonoso, pure in soluzione alcoolica, da Cannizzaro e Carnelutti ($(\alpha)_D^{20°} = + 74°,6$) e da me ($(\alpha)_D^{20°} = + 74°,9$).

Acido benzil-destro-santonoso $C^{12}H^{14}<^{O\,.\,CH^2\,.\,C^6H^5}_{CH\,(CH^3)\,COOH}$

L'acido benzil-destro-santonoso è stato preparato da Nicola Castoro [3] per azione

(1) Loco citato, pag. 399.
(2) » » 400.
(3) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. II, pag. 357.

dell'alcoolato sodico e del cloruro di benzile sul destro-santonito etilico, saponificando poi con potassa alcoolica il composto intermedio

$$C^{12}\,H^{14} < \begin{matrix} O\,.\,CH^2\,C^6H^5 \\ CH\,(CH^3)\,COO\,.\,C^2H^5 \end{matrix}$$

e precipitando con acido cloridrico.

L'acido benzil-destro-santonoso è gommoso e perciò non fu possibile averlo puro.

Bromo-destro-santonito-etilico $C^{14}H^{17}\,Br < \begin{matrix} OH \\ COO\,.\,C^2H^5 \end{matrix}$

L'acido destro-santonoso e gli altri suoi isomeri non si addizionano, per quanti tentativi abbia fatto, in veruna condizione coll'acido bromidrico e col bromo; il bromo invece si sostituisce all'idrogeno con gran facilità, dando prodotti mono-bromati.

Ancor meglio dell'acido destro-santonito reagisce col bromo il suo etere etilico nelle seguenti condizioni:

Si sospendono 50 gr. di destro-santonito-etilico finamente polverizzato su 500 cc. di cloruro di carbonio, che alla temperatura ordinaria ne discioglie soltanto una piccola parte; quindi, raffreddando in un miscuglio di neve e sale, si aggiungono poco per volta, agitando sempre il liquido, gr. 29 di bromo (corrispondenti a 2 atomi per ogni molecola di etere santonoso) disciolto in 100 cc. di cloruro di carbonio.

Si svolge subito acido bromidrico, ed il composto bromurato formatosi immediatamente si discioglie nel cloruro di carbonio. Appena che tutto l'etere santonoso è trasformato, il liquido diviene limpido ed un leggerissimo eccesso di bromo lo colora persistentemente, purchè si mantenga nel miscuglio frigorifero.

Se invece si fa la reazione alla temperatura ordinaria l'etere santonoso reagisce rapidamente con la prima molecola di bromo, poi lentamente con una seconda, ed anche più lentamente con una terza e con una quarta molecola.

La soluzione dell'etere bromo-santonoso si concentra a bagno maria per allontanare l'acido bromidrico ed il cloruro di carbonio; quindi il residuo oleoso, che non tarderebbe a solidificare, si riprende col miscuglio d'etere e ligroina e per evaporazione si ottengono dei grossi e brillantissimi cristalli trasparenti, appartenenti al sistema trimetrico contenenti le facce del tetraedro (1), fusibili a 86°, solubilissimi nell'etere, nell'alcool e nell'etere acetico e meno solubili nella ligroina.

La formola $C^{17}H^{23}BrO^3$ di questo bromo-derivato è confermata dalle seguenti analisi:

a) *Determinazione del bromo.*

gr. 0,5323, diseccati nel vuoto, dànno gr. 0,2864 di Ag Br

	calcolato	trovato
Br	22,48	22,89

(1) La forma cristallina fu studiata dall'egregio dott. Luigi Brugnatelli; vedi levo-bromo-santonito etilico.

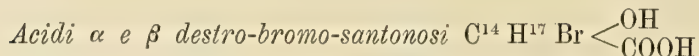
b) *Determinazione del carbonio e dell'idrogeno.*

sostanza (seccata nel vuoto) gr. 0,1910; CO^2 gr. 0,4026; H^2O gr. 0,1108

	calcolato	trovato
C	57,50	57,49
H	6,48	6,45

Il potere rotatorio risulta dai dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %.	4
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{15°}$	+ 6°,00
Potere rotatorio { specifico	+ 68,2
Potere rotatorio { molecolare.	+ 242

Acidi α e β destro-bromo-santonosi $C^{14}H^{17}Br<^{OH}_{COOH}$

Il bromo-destro-santonito etilico è solubile a freddo nella soluzione acquosa e concentrata d'idrato potassico e riprecipita, quasi completamente, per azione dell'anidride carbonica; però se si lascia a sè qualche tempo, o si riscalda per pochi minuti la soluzione alcalina suddetta, l'etere si saponifica trasformandosi nel composto bipotassico dell'acido α destro-bromo-santonoso.

Invece, se si fa bollire 10 gr. di bromo-destro-santonito etilico per due ore disciolto in una soluzione di 5 gr. d'idrato sodico in 75 cc. di alcool etilico, dopo aver allontanato l'alcool e ripreso il residuo con acqua, mediante l'acido solforico diluito si precipita l'acido α bromo-destro-santonoso insieme ad un altro acido isomero, che ho chiamato β bromo-destro-santonoso. La separazione dei due acidi è facile, poichè l'acido α è molto più solubile nell'etere dell'acido β.

L'acido α soltanto, eterificato con acido cloridrico ed alcool etilico, ridà l'etere da cui derivava (fusibile a 86°); invece l'acido β dà un etere vischioso, che non sono riuscito a cristallizzare.

L'acido α-bromo-destro-santonoso cristallizza difficilmente dall'etere, ma discretamente bene in un miscuglio d'etere e ligroina, dal quale si depone in forma di tavole racchiudenti una notevole quantità di solvente, che perde al punto di fusione 110°. Una volta fuso raffreddato lentamente verso 80° risolidifica e torna poi a fondere fra 115°-116°.

Ho determinato per perdita di peso e raccolto in un tubicino raffreddato con neve e sale il solvente incluso nei cristalli, che dall'odore ho riconosciuto facilmente essere dell'etere misto ad una piccola quantità di ligroina.

L'acido α ridotto in polvere finissima e lasciato anche nel vuoto, o per varî mesi all'aria, non perde il solvente e la quantità di questo corrisponde a mezza molecola di etere per una di acido, come qui risulta:

I gr. 0,2563 di acido α, cristallizzato e seccato nel vuoto, al punto di fusione perdono grammi 0,0250 di solvente

II gr. 4,350 di acido α, polverizzato e lasciato per 4 mesi all'aria, perdono al punto di fusione grammi 0,420 di solvente

	calcolato per $(C^{15}H^{19}BrO^3)^2, C^4H^{10}O$	trovato I	trovato II
Ossido d'etile	10,17	9,75	9,66

Il solvente probabilmente non è incluso, ma forma una combinazione coll'acido.

La quantità del bromo contenuto nell'acido α-destro-bromo-santonoso corrisponde alla formola $C^{15}H^{19}BrO^3$, come risulta dai seguenti dati:

I gr. 0,1854 di acido, fuso e riscaldato sino a 120°, dànno gr. 0,1048 di Ag Br

II gr. 0,1738 di acido, fuso e riscaldato sino a 120°, dànno gr. 0,0978 di Ag Br

	calcolato	trovato I	trovato II
Br	24,41	24,06	23,95

Il potere rotatorio dell'acido α-bromo-destro-santonoso sciolto nell'alcool assoluto risulta dal seguente specchietto:

	Acido fuso e riscaldato sino a 120°	Acido cristallizzato con 9,66 per % di solvente
Concentrazione per %	4,00	4,428 (¹)
Lunghezza del tubo in mm.	219,65	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{14°}$	+ 6°,12	+ 6°,12
Potere rotatorio { specifico	+ 69,7	
Potere rotatorio { molecolare	+ 228	

L'acido β-bromo-destro-santonoso cristallizza in piccoli mammelloni, fusibili fra 159°-160°, poco solubili nell'etere e nell'alcool; ha un potere rotatorio inferiore, ma nello stesso senso di quello dell'acido α, come risulta dalla seguente determinazione fatta in alcool assoluto:

Concentrazione della soluzione per %	2,00
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{14°}$	+ 2°,72
Potere rotatorio { specifico	+ 61,9
Potere rotatorio { molecolare	+ 202

Le quantità del C, dell'H e del Br corrispondono alla formola $C^{15}H^{19}BrO^3$, infatti:

I gr. 0,2042 di sostanza dànno gr. 0,4113 di CO^2 e gr. 0,1078 di H^2O

II gr. 0,2453 di sostanza dànno gr. 0,1408 di Ag Br

	calcolato	trovato
C	55,09	54,93
H	5,81	5,86
Br	24,41	24,42

(¹) Questa concentrazione corrisponde al 4 % di acido senza solvente.

L'acido β è dunque isomero all'acido α; ne differisce per le proprietà fisiche, perchè non cristallizza come questo con il solvente ed infine perchè non ridà il bromo destro-santonito etilico da cui deriva. Probabilmente l'isomeria dipende da una diversa disposizione nello spazio degli atomi, o gruppi d'atomi disposti intorno ad uno, o più carbonî asimmetrici.

Mi riserbo riprendere in seguito lo studio degli *acidi bromo-santonosi.*

Azione degli ossidanti sull'acido destro-santonoso.

Ho provato sopra l'acido destro-santonoso l'azione di varî ossidanti sperando potere stabilire dai prodotti di ossidazione la sua struttura.

Col permanganato potassico e coll'acido cromico non ottenni nulla di ben definito; col fenicianuro di potassio in soluzione alcalina ottenni un acido bruno e vischioso.

Avrei ancora insistito con questi ossidanti se, come vedremo, non avessi dimostrata direttamente la struttura degli acidi santonosi con reazioni nette e quantitative per una via molto più agevole. Pur non di meno riprenderò lo studio di queste ossidazioni.

Ho ancora provato l'azione del jodio sull'acido destro-santonoso, cercando di eliminare l'idrogeno aggiunto al nucleo naftalico e di ottenere così composti meno idrogenati di quest'acido.

Il jodio però non solo elimina l'idrogeno additivo, ma introduce ancora un atomo di ossigeno; infatti l'acido destro-santonoso si trasforma in una materia verde, amorfa la di cui composizione, come vedremo, si avvicina a quella di un naftochinone.

Ecco come ho fatto reagire il jodio:

Una parte di acido destro-santonoso, sciolta in 12 di acido acetico concentrato, viene riscaldata in apparecchio a ricadere per 4 ore con 3 di jodio, che corrispondono a circa 6 atomi per ogni molecola di acido. Sul primo si sublima del jodio che è poi disciolto dall'acido jodidrico formatosi. Si distilla a pressione ridotta per concentrare il liquido, si decolora con quanto basta di anidride solforosa per eliminare l'eccesso di jodio, indi si precipita con acqua il prodotto della reazione nero e molle come la pece, che si discioglie nel carbonato di sodio con una intensa colorazione verde-azzurro e riprecipita con acido cloridrico allo stato di polvere amorfa verde-scuro. Questa polvere seccata nel vuoto, lavata con etere per asportare una materia rossa-bruna che la inquina, acquista un color verde e si discioglie nelle soluzioni acquose alcaline e nell'alcool in verde con bella fluorescenza azzurra, e dalla soluzione alcoolica con acqua precipita come una gelatina semi-trasparente.

La suddetta sostanza, così purificata, seccata a 100° ed analizzata ha dato i seguenti valori, per i quali gli competerebbe la formola $C^{14}H^{14}O^{4}$, oppure un multiplo di questa:

sostanza gr. 0,1662; CO^{2} gr. 0,4153, $H^{2}O$ gr. 0,0860

	calcolato	trovato
C	68,29	68,15
H	5,69	5,74

Però questi dati non sono d'accordo con quelli forniti da un altro campione di materia verde ottenuto da una seconda preparazione, per i quali invece si ricava la formola $C^{15}H^{14}O^{4}$, corrispondente ad un *acido dimetil-naftochinon-propionico*.

sostanza gr. 0,2174; CO^2 gr. 0,5604; H^2O gr. 0,1126

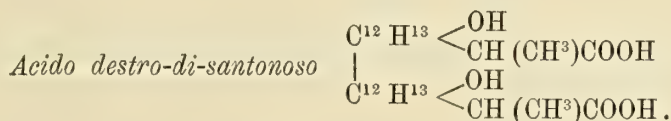
	calcolato	trovato
C	69,77	70,30
H	5,47	5,75

Per le discordanze fra i dati analitici dei due campioni preparati e purificati nelle stesse condizioni e perchè il prodotto essendo amorfo non presenta alcuna garanzia della sua purezza, non intendo far congetture sulla sua possibile struttura e nemmeno stabilirne la formola bruta; si può solo ritenere, con qualche probabilità, per un chinone di una naftalina sostituita, meno idrogenata di quella da cui deriva l'acido santonoso.

Ho ottenuto migliori risultati coll'impiego del cloruro ferrico, il quale condensa due molecole di acido destro-santonoso mediante eliminazione di 2 atomi d'idrogeno trasformandolo nell'acido destro-di-santonoso che ora descriverò.

Analogamente all'acido destro, si comportano col cloruro ferrico anche gli acidi santonosi levo, racemo, e desmotropo.

Acido destro-di-santonoso

$$\begin{array}{l} C^{12}H^{13} < \begin{array}{l} OH \\ CH\,(CH^3)COOH \end{array} \\ | \\ C^{12}H^{13} < \begin{array}{l} OH \\ CH\,(CH^3)COOH. \end{array} \end{array}$$

Si disciolgono 100 gr. di acido destro-santonoso in litri 3,5 di acido acetico bollente al 40 % e seguitando a far bollire la soluzione si aggiungono, poco a poco, gr. 150 di cloruro ferrico disciolto in 500 cc. di acqua. Il liquido si colora in rosso e dopo alcuni minuti s'intorbida deponendo l'acido destro-di-santonoso sotto forma di minuti cristalli. Si fa bollire ancora per cinque minuti, si filtra il liquido alla pompa, si lava il precipitato con acido acetico diluito e bollente e poi con acqua.

L'acido destro-di-santonoso purificato con ripetute cristallizzazioni dall'alcool si presenta in piccoli aghi fusibili con leggera alterazione fra 250° e 250°,5; è solubile più a caldo che a freddo nell'alcool e nell'acido acetico, pochissimo nell'etere, nel benzol, è insolubile nell'acqua e si discioglie nei carbonati alcalini. Ha un potere rotatorio più forte di quello dell'acido santonoso da cui deriva, come risulta da quanto segue:

Solvente	. . . .	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	. . . .	4,00
Lunghezza del tubo in mm.	. . . .	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21°}$	. . . .	+ 7°,55
Potere rotatorio	specifico	+ 85,9
	molecolare	+ 424

Per l'acido destro-santonoso il potere rotatorio specifico è per $(\alpha)_D$ + 74°,8.

I dati analitici dell'acido destro-di-santonoso sono i seguenti:

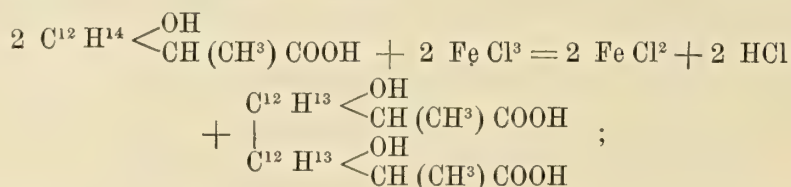
sostanza gr. 0,1944 ; CO^2 gr. 0,5185 ; H^2O gr.0,1375

calcolato per $C^{30}H^{38}O^6$		trovato
C	72,87	72,74
H	7,69	7,85

La sua grandezza molecolare, determinata col metodo crioscopico in soluzione acetica, conferma che esso deriva dal condensamento di due molecole di acido santonoso, come risulta dai seguenti dati:

	I	II	Teoretico
Concentrazione della soluzione per % . . .	0,487	0,506	
Abbassamento del punto di fusione	0°,04	0°,04	
Coefficiente d'abbassamento	0,082	0,079	
Costante per l'acido acetico	40,51	39,04	39
Peso molecolare	475	493	494

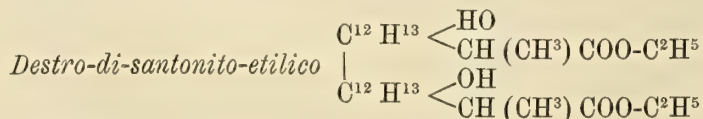
Stabilita così dall'analisi e dalle determinazioni della grandezza molecolare la formola dell'acido destro-di-santonoso, l'azione del cloruro ferrico sull'acido santonoso si può esprimere colla seguente equazione:

$$2\ C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} + 2\ Fe\,Cl^3 = 2\ Fe\,Cl^2 + 2\ HCl + \begin{array}{l} C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} \\ | \\ C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} \end{array} ;$$

analogamente alle condensazioni di alcuni fenoli e naftoli che col cloruro ferrico dànno i di-fenoli ed i di-naftoli corrispondenti, per eliminazione d'idrogeno sotto forma di H Cl.

L'acido destro-di-santonoso contenendo due ossidrili naftolici reagisce facilmente coll'anidride acetica e col cloruro d'acetile dando un acetil-derivato e col cloruro di benzoile un benzoil-derivato. I due suddetti derivati sono vischiosi e non suscettibili ad essere purificati; per cui non posso dire se essi sieno derivati mono, o bi-sostituiti, soltanto coll'idrato potassico in soluzione alcoolica ho potuto distaccare il radicale acido e riottenere l'acido destro-di-santonoso.

Quest' acido essendo bibasico può dare anche due specie di eteri, una con un solo radicale alcoolico solubile nei carbonati alcalini e l'altra con tutti i due carbossili eterificati, perciò insolubile nei carbonati alcalini, ma solubile negli idrati per gli ossidrili naftolici.

Ho studiato soltanto l'etere bi-etilico che si ottiene, facilmente ed in quantità predominante, per azione dell'acido cloridrico gassoso e dell'alcool etilico sull'acido destro-di-santonoso. Probabilmente coll'alcoolato sodico ed i joduri alcoolici si potrà sostituire anche l'idrogeno dei due ossidrili naftolici.

Destro-di-santonito-etilico $\begin{array}{l} C^{12}H^{13}<^{HO}_{CH\,(CH^3)\,COO\text{-}C^2H^5} \\ | \\ C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COO\text{-}C^2H^5} \end{array}$

Si satura a freddo di acido cloridrico gassoso la soluzione di p. 1 di acido destro-di-santonoso sciolto in 15 di alcool etilico al 95 %, si riscalda per un'ora

a bagno-maria e poi distillando a pressione ridotta si concentra il liquido a piccolo volume. Il residuo si versa in una soluzione acquosa di carbonato sodico in eccesso, la quale discioglie l'acido di-santonoso inalterato ed il suo etere mono-etilico, mentre si precipita l'etere bi-etilico che raccolto, lavato, seccato e poi cristallizzato dall'etere si presenta in prismi incolori, fusibile a 183°, solubili nell'alcool, nell'etere, nel benzol e nell'acido acetico. L'etere bi-etilico è solubile anche nelle soluzioni acquose e concentrate degli idrati alcalini e se non si attende molto tempo si può riprecipitare inalterato coll'anidride carbonica.

I dati analitici e la determinazione della sua grandezza molecolare corrispondendo alla formula $C^{34} H^{46} O^{6}$, riconfermano quella dell'acido da cui deriva.

a) *Determinazione del* C *e dell'*H.

sostanza gr. 0,2121; CO^{2} gr. 0,5746; $H^{2}O$ gr. 0,1586

	calcolato	trovato
C	74,18	73,88
H	8,36	8,31

b) *Determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico nel benzol.*

		Teoretico
Concentrazione della soluzione per °/₀	2,145	
Abbassamento del punto di fusione	0°,21	
Coefficiente d'abbassamento	0,097	
Peso molecolare	505	550
Costante per il benzol	53,3	49

Un miscuglio di eteri metilici si ottengono eterificando l'acido destro-di-santonoso con acido cloridrico ed alcool metilico; uno fonde a 158° ed è solubilissimo nell'etere; un altro meno solubile fonde a 215°.

Riduzione della santonina collo stagno a caldo.

Octoidro-para dimetil-etil-naftalina $C^{10} H^{13} \begin{cases} CH^{3} \\ CH^{3} \\ C^{2}H^{5} \end{cases}$

Ho fatto anche reagire lo stagno sulla santonina sciolta in acido cloridrico alla ebollizione. Quantunque la riduzione avvenga rapidamente questo metodo non è consigliabile per preparare l'acido destro-santonoso, perchè insieme a quest'acido ed a un poco di acido santonoso inattivo si formano notevoli quantità di altri acidi vischiosi, come quando si riduce coll'acido jodidrico. Però durante l'ebollizione avendo notato un lento sviluppo di anidride carbonica e contemporaneamente la formazione di un olio, che distillava coi vapori della soluzione cloridrica e ricadeva col condensarsi di questi, ho più volte ridotto a caldo la santonina collo stagno, modificando le condizioni della reazione sinchè col metodo seguente ho ottenuto l'olio suddetto con un discreto rendimento.

Entro palloni della capacità di litri 5 si disciolgono gr. 250 di santonina in litri 2,5 di acido cloridrico concentrato, si aggiungono gr. 400 di stagno in verghe e gr. 2,5 di cloruro rameico, che rende più rapido l'attacco dello stagno. Si adatta al collo del pallone a smeriglio un refrigerante a ricadere e si riscalda all'ebollizione per circa 10 ore su bagno di sabbia, o a fiamma diretta. L'acido santonoso si separa vischioso, si svolge anidride carbonica e ricade insieme ai vapori condensati l'olio, che in fine dell'operazione si separa distillandolo con una parte del liquido. Da un chilogramma di santonina ho ottenuto così circa 20 grammi di olio. Se invece si tratta all'ebollizione la santonina con la soluzione cloridrica di cloruro stannoso in presenza di stagno si ottengono soltanto piccole quantità di olio, però migliora il rendimento e la purezza dell'acido santonoso.

Ho cercato di purificare l'olio suddetto come segue:

1° L'olio distillato in corrente di vapore, lavato con carbonato sodico e seccato contiene cloro, ma in quantità così piccola da non corrispondere a quella di un possibile composto monoclorurato, infatti:

gr. 0,4730 di olio dànno gr. 0,0761 di AgCl, che corrispondono al 3,98 per cento di cloro.

2° Distillato alla pressione ordinaria bolle fra 250° e 270° svolgendo acido cloridrico; poi bollito a ricadere per tre ore, sinchè non sviluppa più quest'acido, distilla fra 251° e 265°.

3° Lasciato per qualche tempo in contatto dell'idrato potassico fuso e fatto bollire a ricadere altre tre ore distilla fra 248° e 260° e contiene ancora cloro, come risulta dalla seguente determinazione della frazione più grande, bollente fra 248°,5 e 251°:

gr. 0,4676 di olio dànno gr. 0,0090 di AgCl che corrispondono a 0,47 per cento di cloro.

4° Con l'ebollizione a ricadere sul sodio per due ore l'olio perde ogni traccia di cloro e distilla tutto in un grado fra 247° e 248°, ma non è ancora purissimo, come risulta dalla prima combustione; però migliora dopo un prolungato riscaldamento a ricadere sul sodio, come risulta dalle altre due combustioni:

I gr. 0,3233 di olio, bollito per 2 ore nel sodio, dànno gr. 0,9404 di CO^2 e gr. 0,2949 di H^2O

II gr. 0,2236 di olio, bollito per 4 ore nel sodio, dànno gr. 0,7139 di CO^2 e gr. 0,2461 di H^2O

III gr. 0,2245 di olio, bollito nel sodio per 12 ore, dànno gr. 0,7191 di CO^2 e gr. 0,2489 di H^2O

Da questi dati per la composizione centesimale dell'idrocarburo si ottengono i seguenti valori:

C	86,97	87,07	87,36
H	12,18	12,23	12,32
Totale	99,15	99,30	99,68

Ho insistito facendo bollire l'idrocarburo altre 12 ore sul sodio e frazionandolo in

due porzioni, l'una bollente da 247° a 247°,5 e l'altra fra 247°,5 e 248°; però l'analisi della prima frazione non dà risultati più esatti, infatti:

IV gr. 0,2207 di olio dànno gr. 0,7064 di CO^2 e gr. 0,2424 di H^2O, ossia:

C	87,25
H	12,20
Totale	99,45

6° Ho di nuovo frazionato tutto l'idrocarburo rimasto e colla porzione intermedia bollente fra 247°,4 e 247°,8 ho determinato la densità di vapore col metodo di Meyer, in atmosfera d'idrogeno, riscaldando coi vapori di difenilammina, come qui risulta:

Peso della sostanza	gr.	0,0715
Volume d'idrogeno spostato	cc.	8,5
Temperatura		13°,2
Pressione (corr.)	mm.	754,3
Densità riferita all'H = 1		100
Peso molecolare		200

Da queste esperienze ed analisi si deduce:

1° Lo stagno in presenza d'acido cloridrico a caldo riduce facilmente la santonina in acido santonoso e parzialmente converte quest'acido, oppure direttamente la santonina, in un idrocarburo.

2° L'idrocarburo si deve addizionare, per lo meno parzialmente, ad una molecola di acido cloridrico trasformandosi in un composto clorurato, più idrogenato, poco stabile, che si dissocia in gran parte distillato alla pressione ordinaria ed anche in corrente di vapore, come risulta dalla prima determinazione di cloro; che bollito per qualche tempo a ricadere perde quasi tutto il cloro sotto forma di acido cloridrico, ed il sodio infine gli elimina le ultime tracce di cloro. Il composto clorurato deve bollire ad una temperatura più alta dell'idrocarburo, poichè il loro miscuglio bolle fra 250° e 270°, mentre l'idrocarburo a 247-248°.

3° L'idrocarburo così ottenuto non è purissimo, quantunque bolla in un grado e sia perfettamente limpido ed incolore; forse è inquinato da piccolissime quantità di una sostanza ossigenata, alla quale si deve probabilmente attribuire l'odore di menta che esso possiede. Tale impurezza non si può eliminare frazionando il liquido, viene soltanto ritenuta in parte dal sodio per una prolungata ebollizione a ricadere, come risulta dalle prime tre combustioni, mentre la quarta combustione mostra che l'impurezza inquina maggiormente la frazione dell'idrocarburo bollente da 247° a 247°,5.

4° I valori ottenuti dalla terza combustione e dalla determinazione della densità di vapore della frazione bollente da 247°,4 a 247°,8 sono sufficienti, come vedremo, per stabilire la formola dell'idrocarburo; intanto essi si accordano colle formole possibili C^{15} H^{26} e C^{14} H^{24} e non con le altre pure possibili, C^{15} H^{24} e C^{14} H^{22}, come risulta dal seguente specchietto:

	Calcolato per				Trovato
	$C^{15} H^{24}$	$C^{14} H^{22}$	$C^{15} H^{26}$	$C^{14} H^{24}$	
Carbonio	88,23	88,42	87,38	87,50	87,36
Idrogeno	11,77	11,58	12,62	12,50	12,32
Peso molecolare . . .	204	190	206	192	200

Considerando poi che la formazione dell'idrocarburo e del suo composto d'addizione coll' acido cloridrico avviene contemporaneamente allo sviluppo d'anidride carbonica e che la santonina e l' acido santonoso sono composti a 15 atomi di carbonio, si deve necessariamente attribuire all' idrocarburo la formula $C^{14} H^{24}$ e non l' altra $C^{15} H^{26}$, poichè adottando questa si dovrebbe ammettere la trasformazione del carbossile della catena propionica nel gruppo metile, cosa poco probabile, anche per la natura del riducente e le condizioni della reazione; inoltre non si dovrebbe tener conto dello sviluppo di anidride carbonica, che deve provenire evidentemente dal distacco del carbossile, per azione dell'acido cloridrico, su quella parte d'acido santonoso, o di santonina, che si trasforma in idrocarburo, tanto più che il volume dell'anidride carbonica raccolta corrisponde a circa una molecola, per ogni molecola, d' idrocarburo formatosi.

5° L'idrocarburo derivando dalla santonina deve essere probabilmente una para-dimetil-etil-octoidro-naftalina; il labile composto clorurato forse una para-dimetil-etil-decaidro-cloro-naftalina e la loro formazione potrebbe esprimersi nel modo seguente:

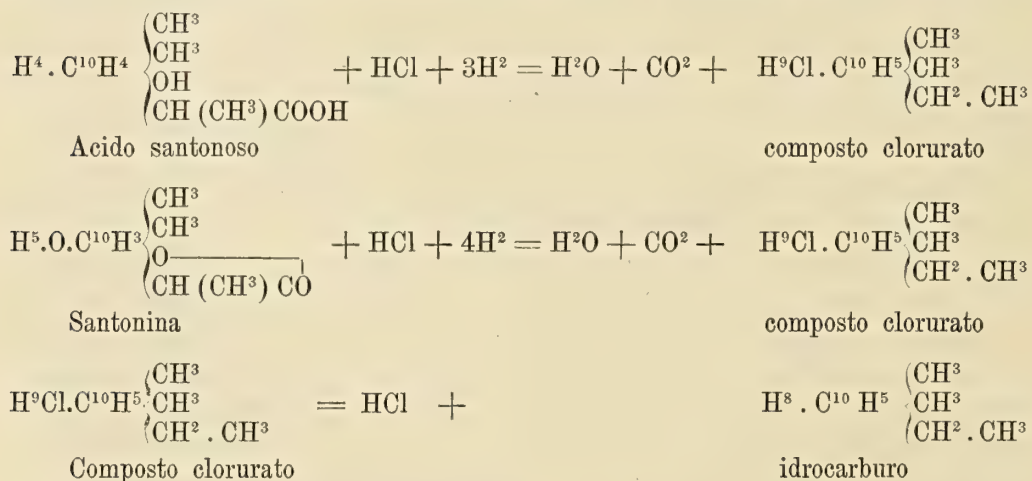
$$H^4 . C^{10}H^4 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH\,(CH^3)\,COOH \end{cases} + HCl + 3H^2 = H^2O + CO^2 + H^9Cl . C^{10}H^5 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ CH^2 . CH^3 \end{cases}$$

Acido santonoso — composto clorurato

$$H^5.O.C^{10}H^3 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ O \text{———} \\ CH\,(CH^3)\,CO \end{cases} + HCl + 4H^2 = H^2O + CO^2 + H^9Cl . C^{10}H^5 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ CH^2 . CH^3 \end{cases}$$

Santonina — composto clorurato

$$H^9Cl.C^{10}H^5 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ CH^2 . CH^3 \end{cases} = HCl + H^8 . C^{10} H^5 \begin{cases} CH^3 \\ CH^3 \\ CH^2 . CH^3 \end{cases}$$

Composto clorurato — idrocarburo

L' idrocarburo può essere rappresentato in un piano con una delle sette possibili formole, nelle quali l'idrogeno additivo del nucleo che porta l' etile è distribuito in tutte ugualmente, come è distribuito nella santonina e negli acidi santonosi, mentre nel nucleo bimetilato gli altri 4 atomi d' idrogeno aggiunti sono disposti differentemente. Il probabile composto clorurato sarebbe il derivato d'una naftalina completamente idrogenata.

Lo studio dell' idrocarburo e del composto clorurato ha una certa importanza, anche perchè una volta stabilita indiscutibilmente la loro struttura dalla santonina si sarebbero così ottenuti derivati in tutte le serie dal tipo naftalina al più idrogenato; cioè al tipo decaidro, come risulta dalla seguente tavola, colla quale credo opportuno rammentarne i principali rappresentanti.

Tipo naftalina $C^{10}H^8$

Para-dimetil-naftalina . . . . $C^{10}H^6 . (CH^3)^2$

Para-dimetil-naftol . . . . $C^{10}H^5 . OH . (CH^3)^2$

Para-dimetil-etil-naftalina . . . . $C^{10}H^5 . (CH^3)^2 . C^2H^5$

Acidi para-dimetil-isopropion-naftoici, od acidi santinici . . . . $C^{10}H^5 . (CH^3)^2 . CH <\begin{smallmatrix} CH^3 \\ COOH \end{smallmatrix}$

Tipo biidro-naftalina $H^2 . C^{10}H^8$

Biidro-para-dimetil-naftol . . . . $H^2 . C^{10}H^5 . OH . (CH^3)^2$

Biidro-para-dimetil-etil-naftalina . . . . $H^2 . C^{10}H^5 . (CH^3)^2 . C^2H^5$

Acidi biidro-para-dimetil-isopropion-naftoici, od acidi biidro-santinici . . . . $H^2 . C^{10}H^5 . (CH^3)^2 . CH <\begin{smallmatrix} CH^3 \\ COOH \end{smallmatrix}$

Tipo tetraidro-naftalina $H^4 . C^{10}H^8$

Acidi tetraidro-ossi-para-dimetil-isopropion-naftoici, od acidi santonosi . . . . $H^4 . C^{10}H^4 \left\{ \begin{array}{l} - OH \\ = (CH^3)^2 \\ - CH <\begin{smallmatrix} CH^3 \\ COOH \end{smallmatrix} \end{array} \right.$

Lattoni degli acidi tetraidro-para-dimetil-ossi-iso propion-naftoici, od iposantonine . . . . . $H^4 \; C^{10}H^4 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ \overline{- O -} \\ - CH\;CO \\ \;\;| \\ \;\;CH^3 \end{array} \right.$

Lattoni degli acidi tetraidro-ossi-para-dimetil-ossi-isopropion-naftoici, o desmotropo-santonine . $H^4 . C^{10}H^3 \left\{ \begin{array}{l} - OH \\ = (CH^3)^3 \\ \overline{- O -} \\ - CH - CO \\ \;\;| \\ \;\;CH^3 \end{array} \right.$

Tipo esaidro-naftalina $H^6 . C^{10}H^8$

Lattone dell' acido esaidro-cheto-para-dimetil-ossi-iso-propion-naftoico, oppure santonina. . . . $H^5 . O . C^{10}H^3 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ \overline{- O -} \\ - CH - CO \\ \;\;| \\ \;\;CH^3 \end{array} \right.$

Santoninammina . . . . $H^6 . \; C^{10}H^3 \left\{ \begin{array}{l} - NH^2 \\ = (CH^3)^2 \\ \overline{- O -} \\ - CH - CO \\ \;\;| \\ \;\;CH^3 \end{array} \right.$

Tipo octoidro-naftalina $H^8 . C^{10}H^8$

Octoidro-para-dimetil-etil-naftalina . . . . . . $H^8 . C^{10}H^5 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - C^2H^5 \end{array} \right.$

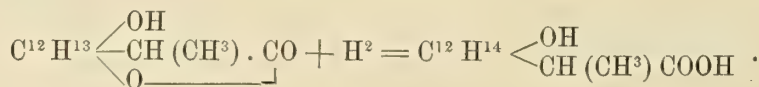
Tipo decaidro-naftalina $H^{10} . C^{10}H^8$

Decaidro-cloro-para-dimetil-etil-naftalina ? . . . $H^9Cl . C^{10}H^5 \left\{ \begin{array}{l} = (CH^3)^2 \\ - C^2H^5 \end{array} \right.$?

Riduzione dell'iso-desmotropo-santonina.

Acido levo-santonoso $C^{12} H^{14} <\begin{array}{l} OH \\ CH (CH^3) COOH \end{array}$

L'idrogeno nascente trasforma l'iso-desmotropo-santonina nell'acido levo-santonoso secondo l'equazione:

$$C^{12} H^{13} \begin{array}{l} \diagup OH \\ - CH (CH^3) . CO \\ \diagdown O \text{———} \lrcorner \end{array} + H^2 = C^{12} H^{14} < \begin{array}{l} OH \\ CH (CH^3) COOH \end{array}$$

L'acido levo-santonoso ha una grande importanza avendomi, come vedremo, svelato e dimostrato evidentemente la stereoisomeria e stabilita la struttura dei due antichi acidi santonosi di Cannizzaro e Carnelutti.

Per prepararlo ho impiegato con buoni risultati la polvere di zinco ed acido acetico nel modo seguente:

Si aggiunge un eccesso di polvere di zinco alla soluzione di una parte d'iso-desmotropo-santonina in 40 di ac. acetico al 72 %; si riscalda per 6 ore a b. m., si filtra a caldo per separare la polvere di zinco restata e si precipita infine l'acido levo-santonoso con molt'acqua.

Alcune volte quest'acido così precipitato è puro, altre volte è misto ad una piccola quantità di una sostanza fusibile a 198° (che ancora non ho studiato), dalla quale si separa per mezzo di una soluzione fredda di carbonato sodico, che discioglie soltanto l'acido levo-santonoso.

Quest'acido purificato con ripetute cristallizzazioni dall'alcool si presenta in aghetti facilmente solubili nell'alcool, nell'etere e nell'acido acetico, quasi insolubili nell'acqua e fusibili fra 179°-180°.

I dati analitici di un campione seccato a 100° corrispondono alla formola $C^{15} H^{20} O^3$, infatti:

I sostanza gr. 0,1776; CO^2 gr. 0,4727; H^2O gr. 0,1282
II " " 0,1881; " " 0,4988; " " 0,1374

	calcolato	trovato	
		I	II
C	72,58	72,58	72,32
H	8,06	8,02	8,12

È dunque isomero dell'acido destro-santonoso; di più confrontando le loro pro-

prietà si direbbero identici, se non si tenesse in considerazione, che deviano in senso contrario il piano della luce polarizzata, quantunque con un'eguale intensità.

Questa perfetta rassomiglianza fra i due acidi santonosi naturalmente esiste anche fra i loro corrispondenti derivati, i quali differiscono solo per il senso del potere rotatorio, perciò è così ampiamente dimostrata la stereoisomeria dei due acidi santonosi e dei loro derivati.

Nel seguente quadro ho riunito i valori del potere rotatorio che ho trovato per l'acido levo con quelli trovati per l'acido destro da me e da Cannizzaro e Carnelutti [1]:

	Acido levo-santonoso (Andreocci)				Acido destro-santonoso			
					Andreocci		Cannizzaro e Carnelutti	
	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
Concentrazione della soluzione per %	4,9068	4,320	5,684	5,3944	5,0235	1,7048	6,1787	1,7921
Lunghezza del tubo in mm.	219,65	219,65	219,65	219,65	200	219,65	219,65	219,65
Temperatura	28°	22°	22°	22°	20°	28°	20°	20°
Deviazione osservata per $(\alpha)_D$	—8°,03	— 7°,05	— 9°,30	— 8°,81	+ 7°,53	+ 2°,80	+10°,14	+ 2°93
Potere rotatorio specifico .	— 74,5	— 74,3	— 74,4	— 74,3	+ 74,9	+ 74,7	+ 74,7	+ 74,4
Potere rotatorio molecolare	— 185	— 184	— 185	— 184	+ 186	+ 185	+ 185	+ 185

Non appena stabilita la stereoisomeria fra i due acidi santonosi levo e destro, volli riunirli per averne il racemo che, a priori, ritenni essere identico all'acido isosantonoso inattivo (fusibile 153°-155°) ottenuto da Cannizzaro e Carnelutti [2] insieme al dimetil-naftol per azione della barite sull'acido destro-santonoso, ed anche in piccola quantità nella riduzione della santonina con acido jodidrico più volte usato per la stessa preparazione.

Le mie previsioni furono pienamente realizzate, infatti il *racemo* risultante dall'unione a parti uguali dei due acidi levo e destro è identico coll'acido *isosantonoso* e così pure sono identici tutti i racemi ottenuti dal miscuglio dei derivati destro e levo-santonosi con i corrispondenti composti preparati direttamente dall'acido iso-santonoso da Cannizzaro e Carnelutti ed in seguito da me.

Levo-santonito metilico $C^{12}H^{14} <^{OH}_{CH(CH^3)COO.CH^3}$

Si discioglie nell'alcool metilico l'acido levo-santonoso, si satura la soluzione con HCl gassoso a freddo, si scalda in apparecchio a ricadere per un' ora, si concentra per distillazione sinchè il volume sia ridotto ad un quarto e si versa il residuo

(1) Loco citato, p. 400

(2) Loco citato, pag. 400. 401.

in una soluzione acquosa di carbonato sodico. L'etere metilico si depone vischioso e si purifica per cristallizzazioni ripetute da un miscuglio d' etere e ligroina.

Si presenta, come il suo isomero destro, in grossi cristalli prismatici fusibili a 86° solubilissimi nell' alcool, nell'etere ed un po' meno nella ligroina.

Levo-santonito-etilico $C^{12}H^{14} <^{OH}_{CH(CH^3)COO \,.\, C^2H^5}$

Ho preparato il levo-santonito etilico con alcool etilico a 95° ed acido cloridrico nelle stesse condizioni descritte da Cannizzaro e Carnelutti per il destro-santonito etilico. Come questo cristallizza in grossi prismi appartenenti al sistema monoclino solubili nell' alcool e nell'etere, fusibili fra 116°-117°, e diviene fosforescente quando si polverizza nell' oscurità.

Il potere rotatorio risulta dai dati seguenti:

Solvente		Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %		1,354	4,15
Lunghezza del tubo in mm. . . .		219,65	219,65
Temperatura		27°	22°
Deviazione osservata per $(\alpha)_D$ . . .		— 2°,10	— 6°,40
Potere rotatorio	specifico	— 70,6	— 70,2
	molecolare . . .	— 195	— 194

Il potere rotatorio specifico del destro-santonito etilico è per $(\alpha)_D^{27°} = +71°$.

La forma cristallina dei due santoniti etilici, destro, e levo, fu studiata dall'egregio dott. Luigi Brugnatelli, il quale gentilmente mi comunicò quanto segue:

I cristalli di questi due eteri appartengono al sistema monoclino. Benchè siano otticamente attivi pure nella loro forma cristallina non si nota alcun indizio di emimorfismo (fig. 2ª). Però il comportamento piroelettrico dei cristalli dimostra che l'asse di simmetria è polare, infatti per raffreddamento si osserva che nei cristalli dell'etere destrogiro l'estremità positiva dell'asse di simmetria si elettrizza negativamente mentre la estremità negativa si elettrizza positivamente. L'inverso avviene per i cristalli dell'etere levogiro. Dunque malgrado la distribuzione oloedrica delle facce i cristalli appartengono al gruppo emimorfo del sistema monoclino (¹).

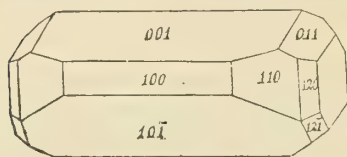



Fig. 2.

Costanti cristallografiche:

$$a:b:c = 0{,}5628:1:0{,}6959$$
$$\beta = 71°28'$$

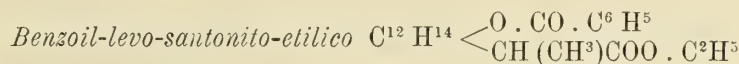
Forme observate: }100{, }001{, }1̄01{, }010{, }011{, }110{, }120{, }1̄21{, }01̄0{, }01̄1{, }11̄0{, }12̄0{, }12̄1̄{.

(¹) Mentre questa Memoria era in corso di stampa si ottennero da una soluzione in alcool ed acido cloridrico dei cristalli di questo etere distintamente emimorfi ciò che conferma la sopraesposta conclusione.

	valori osservati	valori calcolati	n.
(100):(001)	71°28′	*	7
(001):(011)	33 25	*	12
(110):($\bar{1}$10)	123 50	*	9
(001):($\bar{1}$01)	62 44	62°38	4
(100):($\bar{1}$01)	45 46	45 54	5
(010):(120)	42 40	42 23	7
(110):(120)	18 43	19 32	9
(110):(001)	73 42	73 43	8
(001):(120)	77 23	77 30	3
($\bar{1}$10):($\bar{1}$01)	52 —	52 8	10
(011):($\bar{1}$01)	67 36	67 26	4
(011):(110)	60 24	60 26	2
(010):($\bar{1}$21)	44 38	45 1	2
($\bar{1}$01):($\bar{1}$21)	45 21	44 59	2
($\bar{1}$10):($\bar{1}$21)	39 56	39 55	1
(011):($\bar{1}$21)	48 42	48 39	1

I cristalli sono incolori, brillantissimi. Sono sempre allungati secondo [010] e frequentemente tabulari secondo }001{ o secondo }$\bar{1}$01{. Sono dotati di sfaldatura perfetta secondo }001{.

Il piano degli assi ottici è normale a }010{ e la bisettrice acuta è nell'angolo ottuso β e poco inclinata sulle lamine di sfaldatura. Doppia rifrazione energica, positiva.

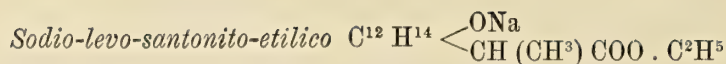
Benzoil-levo-santonito-etilico $C^{12}H^{14} <\begin{matrix} O . CO . C^6H^5 \\ CH(CH^3)COO . C^2H^5 \end{matrix}$

Ho preparato il benzoil-derivato del levo-santonito etilico colle stesse norme indicate da Cannizzaro e Carnelutti per la preparazione del destro-benzoil-santonito-etilico. Come questo cristallizza in lunghi aghi solubilissimi nell'etere e fusibili a 75°.

Per azione di una soluzione alcoolica di potassa si scinde in levo santonito e benzoato, ma se l'azione della potassa non è prolungata si può avere un po' di santonito-etilico; il che mostra che per l'azione dell'idrato potassico esce più facilmente il radicale acido dell'etile, appunto come era stato osservato per l'isomero destro.

Il potere rotatorio del levo-benzoil-santonito etilico risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per °/₀	4,0000
Lunghezza del tubo in mm	219,65
Deviazione esservata per $(\alpha)_D^{20°}$	— 5°,25
Potere rotatorio { specifico	— 59,8
Potere rotatorio { molecolare.	— 227

Il potere rotatorio specifico dell'isomero destro è per $(\alpha)_D^{20°} = 59°,9$.

Sodio-levo-santonito-etilico $C^{12}H^{14} <^{ONa}_{CH(CH^3)COO.C^2H^5}$

Il sodio composto, che si ottiene dal levo-santonito-etilico per azione del sodio metallico in soluzione eterea, o dell' etilato sodico in soluzione alcoolica, esiste, ma per poco tempo, anche quando si discioglie a freddo l' etere levo-santonoso in una soluzione concentrata d'idrato sodico e si comporta perfettamente come il sodio-destro-santonito-etilico.

Acido metil-levo-santonoso $C^{12}H^{14} <^{OCH^3}_{CH(CH^3)COOH}$

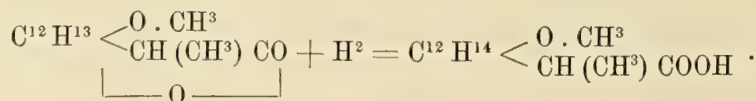
Ho preparato l'acido metil-levo-santonoso con questi due metodi:

1° Per azione del metilato sodico e del joduro di metile sull'acido levo-santonoso, seguendo le norme che ho già indicate per la preparazione dell'acido destro-metil-santonoso.

2° Per riduzione della metil-iso-desmotropo-santonina mediante acido acetico e polvere di zinco nel modo seguente:

Si discioglie 1 parte di metil-iso-desmotropo-santonina in 40 di acido acetico al 72 %, si fa reagire a b. m. per circa 4 ore con polvere di zinco, si filtra a caldo per separare il zinco e con acqua dal filtrato si precipita l'acido metil-levo-santonoso allo stato di una massa vischiosa, che talvolta tarda a solidificare e che si purifica per ripetute cristallizzazioni da un miscuglio di etere e ligroina.

La produzione di quest'acido con quest'ultimo metodo viene indicata dall'equazione:

$$C^{12}H^{13} <^{O.CH^3}_{\underbrace{CH(CH^3)CO}_{O}} + H^2 = C^{12}H^{14} <^{O.CH^3}_{CH(CH^3)COOH}$$

L'acido metil-levo-santonoso come il suo isomero destro, cristallizza in mammelloni fusibili a 116°-117°, solubilissimi nell'etere, un po' meno solubili nella ligroina ed insolubili nell'acqua. Coll'acido jodidrico bollente (127°) si scinde nettamente in joduro di metile ed acido levo-santonoso.

Etil-levo-santonito-etilico $C^{12}H^{14} <^{O.C^2H^5}_{CH(CH^3)COO.C^2H^5}$

Ottenni l'etil-levo-santonito etilico facendo agire con ogni molecola d'acido levo-santonoso, o del suo etere etilico, due molecole d'etilato sodico ed un eccesso di joduro d'etile, il tutto sciolto in alcool assoluto, riscaldando in apparecchio a ricadere sotto pressione, oppure eterificando con acido cloridrico gassoso ed alcool etilico l'acido etil-levo-santonoso.

Preparato con uno qualunque dei suaccennati metodi e purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool raffreddato con neve e sale, come il suo isomero destro, cristallizza in aghi fusibili a 31°-32°, solubilissimi nell'alcool e nell'etere.

Ho determinato il suo potere rotatorio che risulta da quanto segue:

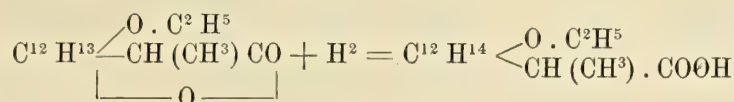
Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	4,0000
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata $(\alpha)_D^{21°}$	— 6°,172
Potere rotatorio { specifico	— 70,3
Potere rotatorio { molecolare.	— 214

Il potere rotatorio specifico dell'isomero destro è per $(\alpha)_D{}^{21°} = + 70°,5$.

Acido etil-levo-santonoso $C^{12}H^{14} <^{O\,.\,C^2H^5}_{CH\,(CH^3)\,COOH}$

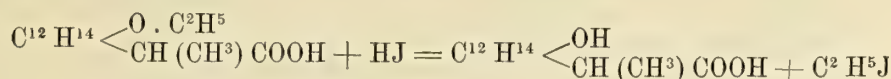
Ho preparato l'acido etil-levo-santonoso saponificando con potassa alcoolica l'etil-santonito-etilico levogiro; ed anche riducendo l' etil-iso-desmotropo-santonina con polvere di zinco in soluzione acetica, seguendo le norme che ho indicate nella preparazione dell'acido levo-santonoso per riduzione dell' iso-desmotropo-santonina.

La formazione dell'acido etil-levo-santonoso ottenuto con quest'ultimo metodo si deve indicare nel modo seguente:

$$C^{12}H^{13} \begin{cases} O\,.\,C^2H^5 \\ CH\,(CH^3)\,CO \end{cases} (\text{CH e CO uniti da } O) + H^2 = C^{12}H^{14} <^{O\,.\,C^2H^5}_{CH\,(CH^3)\,.\,COOH}$$

Preparato o coll'uno, o coll'altro metodo e purificato per ripetute cristallizzazioni da un miscuglio di etere e ligroina cristallizza, come il suo isomero destro, in aghi incolori, fusibili a 120°, solubilissimi nell'etere e nell'alcool, un po' meno nella ligroina.

Essendo molto importante per la costituzione degli acidi santonosi lo stabilire l'identità fra i due campioni di acido levo-etil-santonoso, l'uno proveniente dall'acido levo-santonoso e l'altro dalla etil-iso-desmotropo-santonina ho eseguito sui due campioni le seguenti ricerche:

1° Con acido jodidrico bollente (127°) si scindono nettamente in joduro d'etile e nell'acido levo-santonoso (fusibile grezzo 179°-180° (secondo l'equazione:

$$C^{12}H^{14} <^{O\,.\,C^2H^5}_{CH\,(CH^3)\,COOH} + HJ = C^{12}H^{14} <^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} + C^2H^5J$$

2° Con alcool ed acido cloridrico gassoso dànno l'etil-levo-santonito-etilico, caratteristico, fusibile a 32°, che fuso con parti uguali del suo isomero destro dà il racemo, pure caratteristico, fusibile a 54°.

3° Fusi separatamente con un peso uguale di acido destro-etil-santonoso dànno lo stesso acido etil-racemo-santonoso fusibile a 144°-45°.

4° Le determinazioni del potere rotatorio dànno valori così vicini, che solo per essi non vi sarebbe alcun dubbio sulla identità dei due campioni, infatti:

	Acido etil-levo-santonoso proveniente dall'acido levo-santonoso	Acido etil-levo-santonoso proveniente dall'etil-iso-desmotropo-santonina
Solvente	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per °/₀	4,0000	3,0992
Lunghezza del tubo in mm. . . .	219,65	219,65
Temperatura	15°	28°
Deviazione osservata per $(\alpha)_D$ . . .	— 6°,43	— 4°,95
Potere rotatorio specifico.	— 73,2	— 72,9
Potere rotatorio molecolare	— 202	— 201

Per l'isomero destrogiro, $(\alpha)_D^{15°}$ e = 73°,1.

Acido benzil-levo-santonoso $C^{12} H^{14} <^{O\text{-}CH^2 . C^6H^5}_{CH (CH^3) COOH}$

È stato preparato dal dott. Nicola Castoro (1) riducendo la benzil-iso-desmotropo-santonina con acido acetico e polvere di zinco nelle stesse condizioni già descritte per la riduzione delle altre desmotropo-santonine.

È gommoso, quasi incoloro e non fu potuto ottenere mai cristallizzato in nessuno dei suoi solventi.

Bromo-levo-santonito etilico $C^{12} H^{13} Br <^{OH}_{CH (CH^3) COO . C^2 H^5}$

Il levo-santonito etilico polverizzato e sospeso nel cloruro di carbonio, raffreddato nel miscuglio di neve e sale, reagisce con una sola molecola di bromo, dando per eliminazione di acido bromidrico il mono-bromo-levo-santonito-etilico.

La reazione si effettua nel modo già indicato per la preparazione dell'isomero destro. Come questo, cristallizza dall'etere, o da un miscuglio d'etere e ligroina, od anche dall'etere acetico in grossi e brillantissimi prismi trasparenti, trimetrici-fusibili a 86°.

Il suo potere rotatorio risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per °/₀	4,000
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{15°}$.	— 6°,03
Potere rotatorio specifico	— 68,5
Potere rotatorio molecolare	— 243

Per l'isomero destrogiro il potere rotatorio specifico è per $(\alpha)_D^{15°} = + 68°,2$.

La forma cristallina dei due bromo-santoniti etilici, destro e levo, fu studiata dal dott. Luigi Brugnatelli, il quale gentilmente mi comunicò i seguenti risultati:

(1) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. II, pag. 368.

Cristalli tabulari, talvolta prismatici appartenenti al gruppo emiedrico del sistema trimetrico (fig. 3). L'emiedria fu constatata solo nei cristalli dell'etere destrogiro.

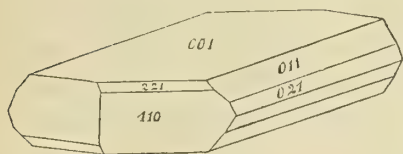



Fig. 3.

Forme osservate:

Etere destrogiro: }001{, }110{, }011{, }021{, }221{.
Etere levogiro: }001{, }110{, }011{, }021{.

Costanti cristallografiche:

$$\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c} = 0{,}5317 : 1 : 1{,}0649$$

	valori osservati	val. calcolati	n.
(001):(011)	46° 48′	*	9
(110):(1$\bar{1}$0)	56 —	*	8
(011):(021)	17 57	18 3	4
(110):(011)	70 1	69 59	5
(110):(021)	64 58	64 51	3
(001):(221)	77 25	77 34	1
(110):(221)	12 37	12 26	1
(1$\bar{1}$0):(221)	56 38	56 54	1

Il piano degli assi ottici è parallelo a }100{, e la bisettrice acuta è parallela all'asse [001]. Dispersione degli assi ottici notevole $\varrho < v$.

2 Ea (rosso) 121° 42′
" (giallo) 123° 26
" (azzurro) 125° 13

Doppia rifrazione energica e positiva: formola ottica $\underset{+}{\mathfrak{b}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{c}}$ (1).

Acido α-bromo-levo-santonoso $C^{12}H^{13}Br <{}^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH}$

Ho preparato l'acido α-levo-bromo-santonoso saponificando con potassa acquosa il levo-bromo-santonito etilico. Quest'acido, come il suo isomero destro, difficilmente cristallizza dall'etere, invece cristallizza da un misto d'etere e ligroina con il solvente, che perde al punto di fusione 110°-111°, e poi risolidificato rifonde fra 115°-116°.

La quantità del solvente incluso, o più probabilmente combinato, corrisponde anche per l'acido levo a circa una mezza molecola di etere, infatti:

gr. 0,7665 di acido cristallizzato perdono a 110° gr. 0,0855 di solvente

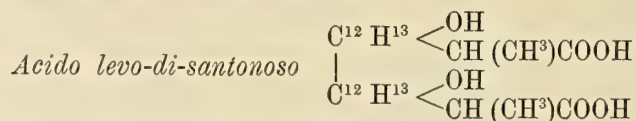
	calcolato per $(C^{15}H^{19}BrO^3)^2 + C^4H^{10}O$	trovato
$C^4H^{10}O$	10,15	11,15

Il potere rotatorio dell'acido bromo-levo-santonoso fuso risulta da questi dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	2,656
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{15°}$.	— 4°,05
Potere rotatorio { specifico	— 69,4
Potere rotatorio { molecolare	— 227

Il potere rotatorio specifico dell'isomero destro è per $(\alpha)_D^{15°} = + 69°,7$.

Mi riservo di provare l'azione della potassa alcoolica sugli eteri etilici bromurati levo, racemo e desmotropo santonosi, per vedere se anche da questi si possano ottenere i corrispondenti isomeri all'acido destro-β-bromo santonoso, il quale, come ho già detto, si ottiene insieme all'acido α-bromo-destro-santonoso saponificando il bromo-destro-sontonito etilico con potassa alcoolica.

Acido levo-di-santonoso $\begin{array}{l} C^{12}H^{13} <^{OH}_{CH(CH^3)COOH} \\ | \\ C^{12}H^{13} <^{OH}_{CH(CH^3)COOH} \end{array}$

Ho fatto agire il cloruro ferrico sull'acido levo-santonoso nelle condizioni che ho descritte per la preparazione dell'acido destro-di-santonoso.

Come questo, l' isomero levogiro si presenta in piccoli aghi fusibili con leggera alterazione a 250°-250°,5, solubili più a caldo che a freddo nell'alcool e nell'acido acetico, pochissimo nell'etere e nel benzol e quasi insolubili nell'acqua.

Il potere rotatorio risulta dai dati seguenti:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	4,00
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21°}$	— 7°,54
Potere rotatorio { specifico	— 85,8
Potere rotatorio { molecolare	— 424

Per l'isomero destrogiro il potere rotatorio specifico è per $(\alpha_D^{21°} + 85°,9$.

Acido racemo-santonoso (iso-santonoso inattivo) $C^{12}H^{14} <^{OH}_{CH(CH^3)COOH}$

Cannizzaro e Carnelutti [1] riscaldando a 360° l'acido destro-santonoso con idrato di bario ottennero insieme al dimetil-naftol un acido isomero a quello impiegato, inattivo sulla luce polarizzata, che chiamarono iso-santonoso, senza pronunziarsi sulla causa dell'isomeria. L'ottennero anche, però mescolato ad una quantità più o meno grande di acido destro-santonoso, direttamente dalla santonina, quando questa veniva ridotta con acido jodidrico più volte usato per la medesima preparazione e specialmente se si prolungava il riscaldamento. Mediante cristallizzazioni frazionate dall'etere accomularono l' acido inattivo nelle ultime porzioni, ma non riuscirono a separarlo del tutto dall'acido destro e perciò consigliarono come metodo più sicuro la fusione dell'acido destro-santonoso colla barite, quantunque il rendimento dipende dalla durata del riscaldamento e sia sempre meschino.

Anch' io dall'acque madri dell'acido destro-santonoso, da me preparato coll'acido jodidrico usato, o colla soluzione cloridrica di cloruro stannoso, ho ricavato una certa quantità di acido santonoso inattivo, che ho potuto purificare perfettamente facendone

[1] Loco citato, pag. 400, 401.

prima l'etere etilico, il quale cristallizza assai bene, quindi ritornando all'acido per saponificazione.

Più tardi scoperto l'acido levo-santonoso, con questo e con l'acido destro ho ottenuto facilmente l'acido santonoso inattivo purissimo nel modo seguente:

Si disciolgono nell'alcool a parte uguali i due acidi santonosi levo e destro e si evapora tutto il solvente; il residuo già è costituito dal racemo misto ad un po' dei due acidi attivi ancora non combinati, infatti fonde fra 153° e 158°, ma risolidificato fonde a 153° essendosi tutto trasformato in racemo.

Cannizzaro e Carnelutti trovarono, per l'acido iso-santonoso il punto di fusione compreso fra 153° e 155° probabilmente, o perchè non riuscirono a liberarlo dalle ultime tracce di acido destro-santonoso che fonde a 179°-80°, o perchè nella cristallizzazione s'era dissociato in parte nei due attivi.

Dopo la formazione dell'acido racemo-santonoso dai due attivi si spiega facilmente perchè questo si ottiene insieme all'acido destro-santonoso per azione, o della barite, o dell'acido jodidrico misto ad acidi fosforati, o dell'acido cloridrico; ossia per opera di agenti energici, che specialmente aiutati della temperatura, sono atti a trasformare molte sostanze otticamente attive nel loro racemo.

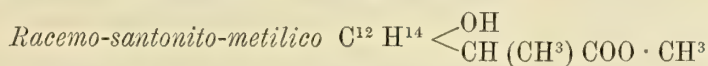
L'acido iso-santonoso di Cannizzaro e Carnelutti si deve pertanto chiamare d'ora in poi *racemo-santonoso.*

Inizierò in seguito le ricerche opportune per sdoppiare l'acido racemo-santonoso e qualcuno dei suoi derivati; per ora noto i seguenti due fatti da me osservati, dai quali si può già ritenere facile lo sdoppiamento dei composti racemo-santonosi:

1° Un campione d'acido etil-racemo-santonoso preparato da Cannizzaro e Carnelutti non fonde a 143° come era indicato nell'etichetta del recipiente, ma invece a 120°, come se fosse il miscuglio dei due acidi attivi non combinati; pur nondimeno non si deve escludere la possibilità che l'abbassamento del punto di fusione sia dovuto ad alterazioni subite dalla sostanza in così lungo tempo.

2° Bromurando il racemo-santonito etilico purissimo, preparato da Cannizzaro e Carnelutti, ottenni un prodotto che fonde a 90° (i due corrispondenti isomeri bromurati attivi fondono a 86°) risolidificato fonde fra 104° o 106°, come il bromo-racemo-santonito etilico ottenuto per fusione del miscuglio dei due attivi.

Più tardi il dott. Luigi Brugnatelli ricristallizzando il bromo-racemo-santonito etilico, ottenne il miscuglio di due forme cristalline, che ora sta esaminando. Probabilmente una appartiene al racemo e l'altra ai due attivi.

Racemo-santonito-metilico $C^{12}H^{14} < {OH \atop CH(CH^3)COO \cdot CH^3}$

Fondendo insieme il levo ed il destro santonito metilico (fusibili a 80°) ottenni il racemo, che più facilmente dei suoi isomeri si può cristallizzare dall'etere, o dall'alcool metilico, o meglio dal miscuglio di etere e ligroina. Fonde a 110°,5-111° e le sue soluzioni sono inattive.

Racemo-santonito-etilico $C^{12}H^{14} < {OH \atop CH(CH^3)COO\ C^2H^5}$

Cannizzaro e Carnelutti facendo passare una corrente di acido cloridrico gassoso sulla soluzione alcoolica di acido racemo-santonoso prepararono il racemo-santonito eti-

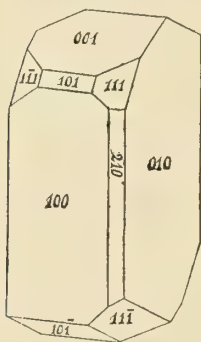
lico, che è identico a quello da me ottenuto per la riunione del levo e destro-santonito etilico (fusibili a 116°-117°); infatti in qualunque modo preparato si presenta in piccoli cristalli incolori, trasparenti, appartenenti al sistema triclino, solubili nell'alcool, nell'etere, nell'etere acetico, fusibili a 125° ed otticamente inattivi.

Come tutti i racemi quest'etere in soluzione si trova sdoppiato nei due isomeri attivi, come risulta dalla seguente determinazione crioscopica fatta in acido acetico:

		Teorico
Concentrazione della soluzione per %	2,50	
Abbassamento del punto di congelazione	0°,34	
Coefficiente d'abbassamento	0,136	
Costante per l'acido acetico	37,5	39
Peso molecolare	286	276

È degno di nota il fatto che i cristalli di santonito etilico polverizzati nell'oscurità non sono fosforescenti come i due isomeri attivi che lo compongono.

La forma cristallina del racemo-santonito etilico fu studiata dall'egregio dottor Luigi Brugnatelli, il quale mi comunicò i seguenti risultati:

I cristalli di questo etere sono incolori, molto brillanti. Hanno abito prismatico secondo l'asse verticale e qualche volta sono tabulari secondo {010} (fig. 4ª).

Sistema cristallino: Triclino.

Costanti cristallografiche:

$$\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c} = 1,6891:1:0,7930$$

$$A = 92^\circ\ 59'$$
$$B = 112^\circ\ 3'$$
$$C = 85^\circ\ 25'$$

Fig. 4.

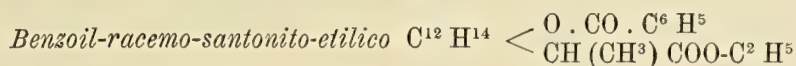
Le forme osservate sono:

{100}, {010}, {001}, {210}, {101}, {$\bar{1}$01}, {111}, {1$\bar{1}$1}, {$\bar{1}\bar{1}$1}.

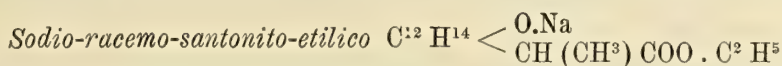
	valori osservati	val. calcolati	n.
(100):(001)	68° 6′	*	5
(010):(001)	88 38	*	3
(0$\bar{1}$0):(100)	86 16	*	7
(0$\bar{1}$0):($\bar{1}\bar{1}$1)	53 45	*	4
($\bar{1}$00):($\bar{1}\bar{1}$1)	87 33	*	5
(100):(210)	39 28	39° 30′	6
($\bar{1}$00):($\bar{1}$01)	83 40	84 1	5
(001):($\bar{1}$01)	28 5	27 53	6
(100):(101)	47 47	47 44	1
(001):(101)	20 26	20 22	1
(001):(210)	71 28	71 26	3
($\bar{1}$01):($\bar{2}\bar{1}$0)	87 14	87 16	6
(010):($\bar{1}$01)	86 40	86 39	7
(100):(1$\bar{1}$1)	52 20	52 19	3

	valori osservati		val. calcolati		n.
$(1\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1)$	40	10	40	8	3
$(\bar{2}\bar{1}0):(\bar{1}\bar{1}1)$	66	11	65	41	1
$(\bar{1}01):(\bar{1}\bar{1}1)$	39	20	39	36	3
$(001):(\bar{1}\bar{1}1)$	45	40	45	40	4
$(001):(111)$	34	38	34	42	2
$(001):(1\bar{1}1)$	37	21	37	26	1
$(0\bar{1}0):(1\bar{1}1)$	59	9	59	19	1
$(101):(1\bar{1}1)$	30	7	30	23	1
$(101):(111)$	30	27	30	31	1
$(010):(111)$	60	10	59	47	1
$(100):(111)$	56	48	56	46	1
$(210):(111)$	39	55	39	57	1

L'estinzione ottica è inclinata sopra tutte le facce della zona [001]. Da (010) esce una bisettrice al bordo del campo visivo.

Benzoil-racemo-santonito-etilico $C^{12} H^{14} < {O . CO . C^6 H^5 \atop CH (CH^3) COO\text{-}C^2 H^5}$

Il benzoil-racemo-santonito etilico fu preparato da Caninzzaro e Carnelutti (1) per azione del cloruro di benzoile sul racemo-santonito etilico. Io l' ho ripreparato fondendo insieme, a parti uguali, i suoi due isomeri attivi (fusibili a 75°). Ottenuto con uno qualunque dei due metodi suddetti si presenta in aghi fusibili a 89° (2), solubilissimi nell' etere ed un po' meno nell' alcool.

Colla soluzione alcoolica di potassa si scinde in benzoato ed in racemo-santonito.

Sodio-racemo-santonito-etilico $C^{12} H^{14} < {O.Na \atop CH (CH^3) COO . C^2 H^5}$

Il sodio-racemo-santonito etilico fu preparato da Cannizzaro e Carnelutti (3) per azione del sodio sul racemo-santonito etilico sciolto in etere anidro ed addizionato di una goccia d' alcool. Io l' ho ripreparato colla quantità calcolata di alcoolato.

Questo composto sodico esiste, ma per poco tempo, quando si discioglie il racemo-santonito etilico in una soluzione concentrata acquosa d' idrato sodico, infatti se subito si fa passare l' anidride carbonica si può riprecipitare quasi tutto l' etere inalterato, se però si attende qualche ora si trasforma completamente nel sodio-racemo-santonito-sodico e perciò l'anidride carbonica non dà più nessun precipitato.

Acido-racemo-metil-santonoso $C^{12} H^{14} < {O.CH^3 \atop CH (CH^3) COOH}$

Ottenni l'acido racemo-metil-santonoso fondendo pesi uguali dei due acidi metil-santonosi, levo e destro (fusibili 116°-117°) e poi cristallizzando dall'etere. Cristallizza

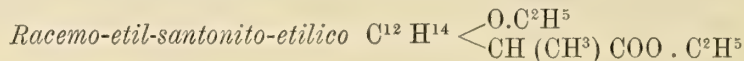
(1) Loco citato, pag. 403.

(2) Cannizzaro e Carnelutti trovarono il punto di fusione 90°-91°, mentre io, anche per un campione di benzoil-derivato da loro preparato, ho trovato costantemente il punto di fusione 89°.

(3) Loco citato, pag. 403-404.

in piccoli prismi fusibili fra 135° e 135°,5, e le sue soluzioni sono inattive sulla luce polarizzata.

Con acido jodidrico bollente a 127° si scinde nettamente in joduro di metile e nell' acido racemo-santonoso (fusibile a 153°).

Racemo-etil-santonito-etilico $C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)COO.C^2H^5 \end{matrix}$

Cannizzaro e Carnelutti [1] prepararono il racemo-etil-santonito-etilico scaldando il potassio-racemo-santonito etilico con joduro d' etile in apparecchio a ricadere sotto pressione.

Io l' ho ripreparato più facilmente:

1° dall' acido racemo-santonoso, o dal suo etere etilico con 2 molecole d'etilato sodico ed un eccesso di joduro d'etile, riscaldando in apparecchio a ricadere sinchè il liquido da alcalino diviene neutro, o leggermente acido, e purificando il prodotto colle norme indicate dei sopra citati chimici;

2° fondendo insieme il destro ed il levo-etil-santonito etilico (fusibili a 32°) e cristallizzando dall' alcool.

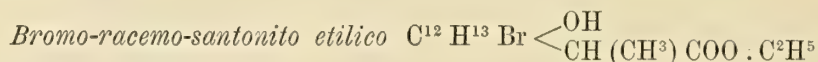
Il racemo-etil santonito-etilico ottenuto con uno qualunque di questi metodi, cristallizza dell' alcool in aghi fusibili a 54°. Le sue soluzioni sono otticamente inattive.

Acido racemo-etil-santonoso $C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)COOH \end{matrix}$

Bollendo con una soluzione alcoolica di potassa il racemo-etil-santonito etilico Cannizzaro e Carnelutti [2] ottennero l' acido racemo-etil-santonoso. Io l' ho invece ottenuto fondendo insieme, a parti uguali, i suoi due isomeri attivi levo e destro (fusibili a 120°) e quindi cristallizzando da un miscuglio di etere e ligroina.

L' acido racemo-etil-santonoso cristallizza in lunghi aghi setacei e sottilissimi, fusibili fra 144 e 145°, invece di 143° come era stato già detto; è solubilissimo nell' alcool e nell' etere, un po' meno nella ligroina, ed è otticamente inattivo.

Con acido jodidrico bollente (127°) si scinde nettamente in joduro d' etile ed in acido racemo-santonoso.

Bromo-racemo-santonito etilico $C^{12}H^{13}Br < \begin{matrix} OH \\ CH(CH^3)COO.C^2H^5 \end{matrix}$

Fondendo insieme parti uguali di destro e di levo bromo-santonito etilico (fusibili a 80°) ottenni il racemo-bromo-santonito etilico fusibile fra 104° e 106°.

Feci anche agire il bromo a freddo sopra un campione di racemo-santonito etilico (preparato da Cannizzaro e Carnelutti) purissimo, fusibile a 125°, col metodo già indicato per la preparazione del bromo-destro-santonito etilico; ma con maraviglia ottenni il derivato racemo misto ad una grande quantità dei suoi due isomeri

(1) Loco citato, pag. 404.
(2) Loco citato, pag. 404-405.

attivi; infatti il miscuglio fondeva a 90°, però fuso e solidificato il punto di fusione sale a 104°-106° per l'avvenuta combinazione delle forme attive. Da questo solo fatto si può ritenere che l' acido racemo-santonoso, o qualche suo derivato, potrà essere facilmente sdoppiato nei due isomeri attivi.

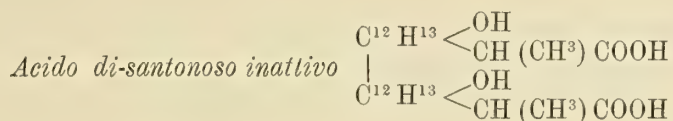
L' etere racemo-bromo-santonoso è solubile nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini, e ne riprecipita inalterato coll' anidride carbonica; è inattivo sulla luce polarizzata.

Acido α-bromo-racemo-santonoso $C^{12}H^{13}Br<^{OH}_{CH(CH^3)COOH}$

Ho preparato l' acido α-bromo-racemo-santonoso, sia saponificando il suo etere etilico con una soluzione acquosa e bollente d' idrato potassico, sia fondendo insieme i suoi due isomeri attivi (fusibili a 115°, 116°).

Al contrario di questi cristallizza senza solvente, fonde fra 193° e 195° ed è molto meno solubile nell' alcool e nell'etere. Le sue soluzioni sono otticamente inattive.

Acido di-santonoso inattivo

$$\begin{array}{l} C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH} \\ | \\ C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH} \end{array}$$

Ho fatto agire sopra l' acido racemo-santonoso in soluzione acetica il cloruro ferrico nello stesso modo che ho già indicato per la preparazione dell'isomero destrogiro.

L' acido di-santonoso inattivo cristallizza in piccoli mammelloni, più solubili a caldo che a freddo nell' alcool e nell'acido acetico, e fusibili fra 243°-244° con leggera alterazione.

Mescolando invece le soluzioni alcooliche dei suoi due isomeri levo e destro (fusibili a 250°) per concentrazione si depone il miscuglio, fusibile fra 243° e 247°, di acido racemo-di-santonoso con i due isomeri attivi che non si sono combinati. Il detto miscuglio sciolto in alcool non ha alcuna azione sulla luce polarizzata.

Per gli acidi di-santonosi è anche possibile l' esistenza dell' isomero inattivo non sdoppiabile; ossia inattivo per compensazione interna, risultante dal condensamento di una molecola di acido levo-santonoso con una d' acido destro per opera del cloruro ferrico.

L' acido di-santonoso inattivo ottenuto dall' acido racemo-santonoso potrebbe essere o tutto, o in parte, l' isomero inattivo non sdoppiabile, perchè il cloruro ferrico trovando l' acido racemo-santonoso in soluzione acetica naturalmente dissociato nei suoi due isomeri attivi può avere anche condensato una molecola d' acido levo con una d'acido destro-santonoso; mentre è sdoppiabile il composto che si forma mescolando gli acidi santonosi levo e destro.

Mi riservo di riprendere lo studio del racemo o dei due composti inattivi dell'acido di-santonoso.

Riduzione della desmotropo-santonina.

Acido-desmotropo-santonoso $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH}$

La desmotropo-santonina, analogamente all' isodesmotropo-santonina, per azione dell' idrogeno nascente si trasforma nel suo corrispondente acido santonoso, che ho chiamato *desmotropo-santonoso*, secondo l' equazione:

$$C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH(CH^3)CO} \atop {\lfloor___ O ___\rfloor} \quad + \quad H^2 \quad = \quad C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH}$$

Ho preparato quest'acido facendo agire sopra una parte di desmotropo-santonina disciolta in 40 di acido acetico al 72 % un eccesso di polvere di zinco, riscaldando circa 6 ore a b. m., filtrando poi la soluzione acetica bollente per separare lo zinco restato ed infine precipitando con acqua il prodotto della reazione, che viene raccolto, lavato, disciolto a freddo in una soluzione acquosa di carbonato sodico per separarlo da piccole quantità di desmotropo-santonina inalterata, e poi riprecipitato con un acido.

Il rendimento è buonissimo, ed è teoretico quando si riduce tutta la desmotropo-santonina.

L' acido desmotropo-santonoso cristallizza dall' alcool in aghi spesso riuniti a mammelloni, fonde a 175°, è solubile nell' alcool, nell' etere e nell' acido acetico, e pochissimo solubile nell' acqua.

I dati analitici, forniti da un campione seccato a 100°, corrispondono alla formola $C^{15}H^{20}O^3$, infatti:

I sostanza gr. 0,2075; CO^2 gr. 0,5544; H^2O gr. 0,1505
II " " 0,2475; " " 0,6575; " " 0,1791

	calcolato	trovato I	trovato II
C	72,58	72,86	72,45
H	8,06	8,06	8,04

La formula è anche confermata dalla grandezza molecolare, determinata col metodo crioscopico in soluzione acetica.

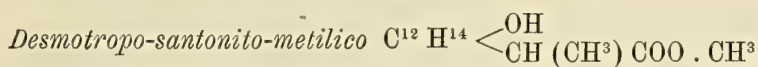
Concentrazione della soluzione per %	2,91	
Abbassamento del punto di congelamento. . . .	0°,41	
Coefficiente d'abbassamento	0,1408	
Costante per l'acido acetico	34,92	39
Peso molecolare	277	248

L' acido desmotropo-santonoso devia a sinistra il piano della luce polarizzata e con minore intensità degli acidi santonosi levo e destro, come risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %.	5,0035
Lunghezza del tubo in mm.	200
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{18°}$	— 5°,33
Potere rotatorio { specifico	— 53,3
Potere rotatorio { molecolare	— 132

Per gli acidi destro e levo il potere rotatorio è per $(\alpha)_D = \pm 74°,6$.

Il comportamento chimico dell'acido desmotropo-santonoso è perfettamente analogo a quello degli altri acidi santonosi, come risulterà in seguito dalle sue reazioni; dalla sua trasformazione nell' acido levo-santonoso, e dallo studio dei suoi derivati; per cui si può già ritenere un per altro stereoisomero.

Desmotropo-santonito-metilico $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COO\,.\,CH^3}$

Ho preparato l' etere metilico dell' acido desmotropo-santonoso saturando a freddo coll'acido cloridico gassoso la soluzione di una parte di quest' acido in 30 d'alcool metilico anidro, riscaldando a b. m. per qualche tempo, eliminando per distillazione una gran parte dell' alcool metilico e precipitando l' etere formato con una soluzione fredda e diluita di carbonato sodico.

L' etere metilico sul primo è molle, poi si rapprende in una massa dura; purificato per ripetute cristallizzazioni dall' etere si presenta in aghi riuniti a mammelloni, oppure in piccole tavole e fonde a 95°-96°.

I seguenti dati analitici confermano la sua formola $C^{16}H^{22}O^3$:

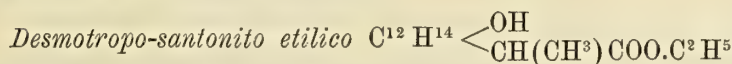
sostanza (seccata nel vuoto) gr. 0,1810; CO^2 gr. 4855; H^2O gr. 0,1351

	calcolato	trovato
C	73,28	73,15
H	8,39	8,30

Il suo potere rotatorio risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per %	1,6888
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{18°}$	— 1°,55
Potere rotatorio { specifico	— 41,8
Potere rotatorio { molecolare	— 120

Il desmotropo-santonito metilico si discioglie facilmente a freddo in una soluzione acquosa e concentrata d' idrato sodico e vi riprecipita quasi tutto se subito si fa passare una corrente di anidride carbonica.

Desmotropo-santonito etilico $C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)COO.C^2H^5}$

L' etere etilico dell' acido desmotropo-santonoso si prepara nella medesima maniera del metilico; è però vischioso, e per la sua gran solubilità nei solventi e forse anche perchè deve fondere a bassa temperatura non l'ho potuto cristallizzare. Si discioglie anch' esso nelle soluzioni acquose e concentrate degli idrati alcalini e vi riprecipita coll' anidride carbonica.

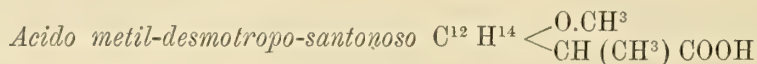
Sodio-desmotropo-santoniti metilico ed etilico $C^{12}H^{14} < {ONa \atop CH(CH^3)COOR}$

Dai desmotropo-santoniti metilico ed etilico sciolti in etere anidro col sodio, o più facilmente colla quantità calcolata d'alcoolato sodico, si ottengono i corrispondenti composti sodici, che l'acqua dissocia parzialmente in desmotropo-santonito ed ed idrato sodico.

Metil-desmotropo-santonito metilico $C^{12}H^{14} < {O.CH^3 \atop CH(CH^3)COO.CH^3}$

Si fanno agire parti sei di joduro di metile sopra una di desmotropo-santonito-metilico sciolto in 15 di alcool metilico anidro, contenente 0,3 di sodio allo stato di metilato sodico, riscaldando per due ore in apparecchio a ricadere e sotto pressione. Quando la reazione è finita cessa lo sviluppo gassoso ed il liquido diviene da alcalino neutro e talvolta leggermente acido. Si distilla l'alcool metilico e l'eccesso di joduro di metile ed al residuo si aggiunge acqua per disciogliere il joduro di sodio. Resta insoluto un olio denso e giallognolo, che si lava con una soluzione d'anidride solforosa per togliergli la piccola quantità di jodio che tiene sciolto, si secca con cloruro di calcio, si purifica distillandolo alla pressione ridotta di mm. 80 e si raccoglie quel che passa fra 300°-305°.

Il metil-desmotropo-santonito metilico è un liquido incolore, poco scorrevole come la glicerina, raffreddato con neve e sale solidifica assumendo l'aspetto d'una massa vetrosa e trasparente. Non si discioglie naturalmente nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini, perchè tanto l'H del gruppo OH, quanto quello del COOH sono sostituiti dal metile.

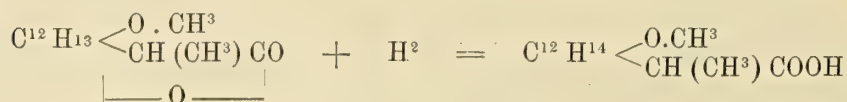
Acido metil-desmotropo-santonoso $C^{12}H^{14} < {O.CH^3 \atop CH(CH^3)COOH}$

Ho preparato l'acido metil-desmotropo-santonoso con i due metodi seguenti:

1° Riscaldando con idrato sodico il metil-desmotropo-santonito metilico sciolto in alcool metilico, saturando l'eccesso di soda con anidride carbonica, allontanando per distillazione tutto l'alcool metilico, poi disciogliendo il residuo nell'acqua, ed infine precipitando con acido solforico diluito.

Sul primo l'acido metilato si presenta vischioso, è solubilissimo nell'etere e nell'alcool, cristallizza per lento svaporamento dalla ligroina in mammelloni molli, che probabilmente sono inquinati dalla modificazione vischiosa e quantunque ricristallizzati molte volte fondono costantemente a 98°.

2° Riducendo la metil-desmotropo santonina con acido acetico e polvere di zinco, tenendomi alle norme ed alle proporzioni, che ho già indicate per simili riduzioni.

La reazione avviene secondo l'equazione:

$$C^{12}H^{13} < {O.CH^3 \atop CH(CH^3)CO} \;(\text{CH e CO legati da } —O—) + H^2 = C^{12}H^{14} < {O.CH^3 \atop CH(CH^3)COOH}$$

L'acido metil-desmotropo-santonoso così ottenuto è molto più puro, o per lo meno passa più rapidamente dalla modificazione vischiosa a quella cristallina, di quello preparato col 1° metodo; infatti cristallizza più facilmente dalla ligroina in aghetti riuniti a mammelloni e fonde a 107°-108°.

Quantunque esista fra i due campioni di acido metil-desmotropo-santonoso, ottenuti con i metodi sopraindicati, una differenza di 10° nel punto di fusione, non v'è alcun dubbio sulla loro identità per le seguenti ragioni:

1° Entrambi si scindono nettamente con acido jodidrico bollente (127°) in joduro di metile ed acido desmotropo-santonoso secondo l'equazione:

$$C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O.CH^3 \\ CH(CH^3)COOH \end{matrix} + HJ = C^{12}H^{14} < \begin{matrix} OH \\ CH(CH^3)COOH \end{matrix} + CH^3J.$$

Ho identificato l'acido desmotropo proveniente dall'uno e dall'altro campione esaminando le sue proprietà caratteristiche, punto di fusione (175°), potere rotatorio, ecc. e quelle del suo etere metilico, punto di fusione (96°), potere rotatorio, ecc.

2° I seguenti dati analitici ottenuti da un campione di acido metil-desmotropo santonoso, preparato col 1° metodo e seccato nel vuoto, corrispondono alla formula $C^{16}H^{22}O^3$:

sostanza gr. 0,1824 ; CO^2 gr. 0,4886 ; H^2O gr. 0,1382

	calcolato	trovato
C	73,28	73,06
H	8,39	8,42

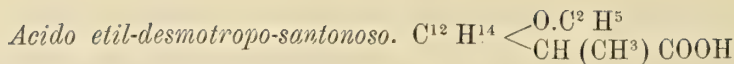
3° Infine il potere rotatorio conferma l'identità dei 2 campioni, infatti:

	I. Metodo	II. Metodo
Solvente	Alcool assoluto	Alcool assoluto
Concentrazione per %	4,3428	4,2748
Temperatura	29°,5	28°
Lunghezza del tubo in mm. . . .	219,65	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D$ . . .	— 4°,62	— 4°,63
Potere rotatorio specifico	— 48,5	— 49,3
Potere rotatorio molecolare . . .	— 127	— 129

Etil-desmotropo-santonito metilico $C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)COO.CH^3 \end{matrix}$

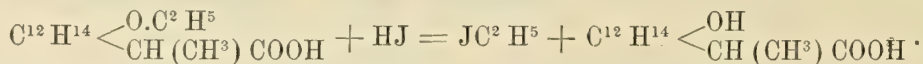
ed etil-desmotropo-santonito etilico $C^{12}H^{14} < \begin{matrix} O.C^2H^5 \\ CH(CH^3)COO.C^2H^5 \end{matrix}$

Per azione dell'etilato sodico e del ioduro d'etile si trasforma il desmotropo-santonito metilico nell'etil-desmotropo-santonito metilico e l'acido desmotropo-santonoso nell'etil-desmotropo-santonito etilico. Questi due derivati bi-sostituiti sono vischiosi e non riuscii a farli cristallizzare, entrambi sono insolubili nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini, anche bollenti; però trattati con quelle alcooliche a caldo perdono facilmente il radicale alcoolico del carbossile e si trasformano nel sale corrispondente dell'acido etil-desmotropo-santonoso.

Acido etil-desmotropo-santonoso. $C^{12}H^{14}<^{O.C^2H^5}_{CH(CH^3)COOH}$

Ho preparato l'acido etil-desmotropo-santonoso, sia per saponificazione dei suoi eteri etilico e metilico, come qui sopra ho già detto; sia riducendo l'etil-desmotropo-santonina con acido acetico e polvere di zinco, nel modo già indicato per altre simili riduzioni.

L'acido etil-desmotropo-santonoso ottenuto coi suddetti metodi e purificato per ripetute cristallizzazioni dall'etere, si presenta sempre in grossi e lucenti prismi triclini, solubili nell'etere, nell'alcool, nell'etere acetico e un po' meno nella ligroina e fusibili a 127°.

Per azione dell'acido jodidrico bollente si scinde nettamente in joduro d'etile ed acido desmotropo-santonoso secondo l'equazione:

$$C^{12}H^{14}<^{O.C^2H^5}_{CH(CH^3)COOH} + HJ = JC^2H^5 + C^{12}H^{14}<^{OH}_{CH(CH^3)COOH}.$$

Ho identificato i tre campioni di acido desmotropo-santonoso ottenuti per questa scissione d'altrettanti campioni d'acido etil-desmotropo-santonoso, preparati coi tre metodi differenti, esaminando sopratutto il punto di fusione (175°), il potere rotatorio ed il punto di fusione del etere metilico (96°).

Il potere rotatorio dell'acido etil-desmotropo-santonoso risulta dai seguenti dati:

Solvente		Alcool assoluto
Concentrazione della soluzione per $^0/_0$		4,16
Lunghezza del tubo in mm.		219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{28°}$	—	4°,31
Potere rotatorio { specifico	—	47,2
Potere rotatorio { molecolare	—	130

La forma cristallina di quest'acido fu studiata dall'egregio dott. Luigi Brugnatelli, il quale mi comunicò quanto segue:

L'acido etil-desmotropo-santonoso cristallizza nel sistema triclino; essendo otticamente attivo i suoi cristalli dovrebbero appartenere al gruppo asimmetrico di questo sistema. Tutti i cristalli osservati però presentano uno sviluppo di forme perfettamente oloedrico.

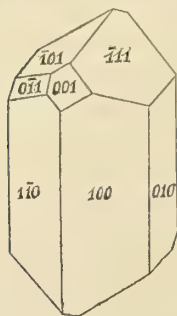



Fig. 5.

Costanti cristallografiche:

$$\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c} = 1,1269:1:0,6013 \ (^1)$$

$$A = 69°\ 40'$$
$$B = 130°\ 47'$$
$$C = 119°\ 52'$$

Forme osservate:

$\}100\{$, $\}010\{$, $\}001\{$, $\}0\bar{1}1\{$, $\}\bar{1}01\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}1\bar{1}0\{$.

I cristalli sono prismatici secondo l'asse verticale e sono dotati di perfetta sfaldatura secondo $\}001\{$.

(1) Nella Nota: *Sulla trasformazione dell'acido desmotropo-santonoso* ecc., vedi Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, seduta 17 marzo 1895, pag. 265, questo termine del rapporto fu stampato per errore: 0,613.

	valori osservati	valori calcolati	n.
(100):(001)	53° 48′	*	3
(100):(0$\bar{1}$0)	112 26	*	6
(001):(0$\bar{1}$0)	88 4	*	3
(010):($\bar{1}$11)	70 31	*	4
(100):($\bar{1}$11)	74 44	*	4
(100):(1$\bar{1}$0)	59 48	52° 11′	6
(0$\bar{1}$0):(1$\bar{1}$0)	52 48	60 15	6
(001):($\bar{1}$01)	35 21	35 14	1
($\bar{1}$00):($\bar{1}$01)	90 50	90 58	1
($\bar{1}$01):($\bar{1}$11)	38 15	37 48	2
(0$\bar{1}$0):($\bar{1}$01)	71 12	71 40	2
(0$\bar{1}$0):(0$\bar{1}$1)	60 30	60 47	3
(001):(0$\bar{1}$1)	27 34	27 17	3
(1$\bar{1}$0):(0$\bar{1}$1)	42 7	42 31	2
(0$\bar{1}$1):($\bar{1}$01)	30 54	30 57	2
($\bar{1}$10):($\bar{1}$01)	107 1	106 33	2
(001):(1$\bar{1}$0)	54 5	54 18	2
(001):($\bar{1}$11)	38 11	37 52	1
($\bar{1}$10):($\bar{1}$11)	87 40	87 50	3
(0$\bar{1}$1):($\bar{1}$11)	58 4	57 33	1

Fu constatata l'estinzione inclinata sulle facce della zona verticale; dalle lamine di sfaldatura esce un asse ottico.

Acido benzil-desmotropo-santonoso $C^{12} H^{14} <{O\text{-}CH^2 . C^6 H^5 \atop CH (CH^3) . COOH}$

N. Castoro [1] ottenne per riduzione della benzil-desmotropo-santonina, con acido acetico e polvere di zinco, l'acido benzil-desmotropo-santonoso, nelle medesime condizioni da me già qui descritte per la preparazione dell'acido desmotropo e levo-santonoso dalle due corrispondenti desmotropo-santonine.

L'acido benzil-desmotropo-santonoso si purifica facilmente, perchè fa con carbonato di sodio il sale sodico molto meno solubile a freddo che a caldo e ben cristallizzato in laminette lucenti. L'acido puro cristallizza in piccoli prismi, solubili nell'alcool e nell'etere, e fonde a 120°-121°.

L'analisi ha dato al Castoro risultati che corrispondono perfettamente per la formola $C^{22} H^{26} O^3$.

Il potere rotatorio dell'acido benzil-desmotropo-santonoso risulta da questi dati:

Solvente	. . . .	Alcool assoluto
Concentrazione per °/₀	. . . .	4,0596
Lunghezza del tubo in mm.	. . . .	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{18°}$	. . . .	— 3°,505
Potere rotatorio specifico	. . . .	— 39,3
Potere rotatorio molecolare	. . . .	— 133

(1) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. II, pag. 356.

Bromo-desmotropo-santonito-metilico $C^{12} H^{13} Br <^{OH}_{CH (CH^3) COO . CH^3}$

Il desmotropo-santonito metilico, disciolto nel cloruro di carbonio e raffreddato in un misto di neve e sale, reagisce teoreticamente con una sola molecola di bromo, sviluppandone una di acido bromidrico e trasformandosi nel bromo-desmotropo-santonito metilico, che resta come uno sciroppo quando si evapora il cloruro di carbonio. Non son riuscito a cristallizzare questo bromo-derivato. Si può però purificare disciogliendolo nell'etere ed agitando con una soluzione di carbonato sodico che elimina l'acido bromidrico, oppure disciogliendolo a freddo in una soluzione acquosa e concentrata d'idrato alcalino e riprecipitandolo subito con anidride carbonica.

Acido bromo-desmotropo-santonoso $C^{12} H^{13} Br <^{OH}_{CH (CH^3) COOH}$

Riscaldando per poco tempo il bromo-desmotropo-santonito metilico disciolto in una soluzione acquosa e concentrata d'idrato potassico si forma il potassio-bromo-desmotropo-santonito potassico $C^{12} H^{13} Br <^{OK}_{CH (CH^3) COOK}$, il quale coll'anidride carbonica si converte nel sale $C^{12} H^{13} Br <^{OH}_{CH (CH^3) COOK}$, che si depone amorfo e voluminoso, ma che si ridiscioglie per aggiunta di acqua. Dalla soluzione acquosa di questi due sali potassici l'acido solforico precipita vischioso l'acido bromo-desmotropo-santonoso, che si purifica aggiungendo alla sua soluzione eterea, poco, a poco, della ligroina, la quale determina la separazione della parte più impura sotto forma di una resina che aderisce alle pareti del recipiente, e quindi svaporando nel vuoto la soluzione filtrata. Si ottiene così l'acido cristallizzato in aghetti solubilissimi nell'alcool e nell'etere, che contengono, come i cristalli dei due acidi isomeri levo e destro α-bromo-santonosi, del solvente incluso o combinato, e perdono il solvente al punto di fusione (92°).

La quantità di solvente è però circa la metà di quella contenuta dai cristalli dei due suddetti isomeri, come qui risulta:

I gr. 0,3172 di acido bromo-desmotropo cristallizzato e seccato all'aria perdono al punto di fusione gr. 0,0140 di solvente (etere etilico misto ad un poco di ligroina)

II gr. 1,1151 perdono al punto di fusione gr. 0,0492 di solvente

	solvente per %
I	4,41
II	4,41

Invece la quantità del solvente contenuto dai cristalli dell'isomero destro è 9,71, e dall'isomero levo è 11,15 per %.

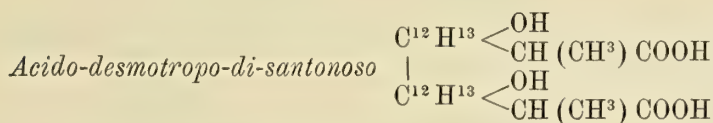
La quantità del bromo contenuto dall'acido bromo-desmotropo-santonoso corrisponde alla formola $C^{15} H^{19} Br O^3$, infatti:

gr. 0,3032 di acido fuso dànno gr. 0,1704 di Ag Br

	calcolato	trovato
Br	24,41	23,92

Il potere rotatorio risulta dai seguenti dati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %	4,2636
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{15^\circ}$	— 4°,715
Potere rotatorio — specifico	— 50,4
Potere rotatorio — molecolare	— 165

Acido-desmotropo-di-santonoso $\begin{array}{l} C^{12}H^{13} <^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} \\ \mid \\ C^{12}H^{13} <^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} \end{array}$

Il cloruro ferrico trasforma l'acido desmotropo-santonoso, sciolto in acido acetico diluito, nel corrispondente acido di-santonoso, in un modo del tutto analogo a quello già descritto per la preparazione degli altri acidi di-santonosi.

L'acido desmotropo-di-santonoso differisce dai suoi isomeri: 1° per essere un po' più solubile nell'alcool e nell'acido acetico; 2° perchè cristallizza in laminette fusibili a 254°-255°; 3° perchè il suo potere rotatorio è minore di quello dei due suoi isomeri attivi, come qui risulta:

Solvente	Alcool assoluto
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Concentrazione della soluzione per %	4,00
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{21^\circ}$	— 5°,67
Potere rotatorio — specifico	— 64,5
Potere rotatorio — molecolare	— 319

Mentre gli acidi destro e levo di-santonosi cristallizzano in aghi fusibili a 250°, 250°,5 ed il loro potere rotatorio specifico è per $(\alpha)_D^{21^\circ} = + 85^\circ,9$ e $- 85^\circ,8$.

Il potere rotatorio specifico dei tre acidi di-santonosi attivi è più elevato di quello degli acidi santonosi corrispondenti; e se questi valori vengono moltiplicati rispettivamente pel peso molecolare, risulta per gli acidi di-santonosi un potere rotatorio molecolare che supera il doppio di quello degli acidi santonosi.

È degno di nota il seguente fatto: La differenza fra i poteri rotatorî specifici dell' acido levo-di-santonoso e dell'acido desmotropo-di-santonoso è uguale a quella che esiste fra il potere rotatorio specifico dell'acido levo-santonoso e del desmotropo-santonoso; per cui è anche uguale la differenza fra i poteri rotatorî specifici degli acidi di-santonosi attivi e dei corrispondenti acidi santonosi, come risulta dal seguente specchio:

	Potere rotatorio specifico	Peso molecolare	Potere rotatorio molecolare
Acido levo-di-santonoso	— 85°,8	494	— 424
" desmotropo-di-santonoso.	— 64,5		— 319
Differenza	— 21,3		— 105
Acido levo-santonoso	— 74,3	248	— 184
" desmotropo-santonoso	— 53,3		— 132
Differenza	— 21,0		— 52
Acido destro-di-santonoso	+ 85,9	494	+ 424
" " santonoso	+ 74,6	248	+ 185
Differenza	+ 11,3	246	+ 239
Acido levo-di-santonoso	— 85,8	494	— 424
" " santonoso	— 74,3	248	— 184
Differenza	— 11,5	246	— 240
Acido desmotropo-di-santonoso	— 64,5	494	— 319
" " santonoso	— 53,3	248	— 132
Differenza	— 11,2	246	— 187

Sulla trasformazione dell'acido desmotropo-santonoso nell'acido levo-santonoso.

La rassomiglianza perfetta del comportamento chimico dell'acido desmotropo-santonoso con quello degli altri acidi santonosi (destro, levo e racemo) e l' analoga derivazione degli acidi desmotropo e levo da due desmotropo-santonine isomere e rappresentabili entrambe in un piano con la stessa formola di struttura, furono le ragioni per le quali ho sempre ritenuto molto stretta la parentela dell' acido desmotropo cogli altri tre acidi santonosi, possibile la sua trasformazione in uno di questi, e più probabilmente nel levo-santonoso [1].

[1] *Sopra un isomero della santonina ed un nuovo isomero dell'acido santonoso.* Atti dei Lincei, Rendiconti, 1893, 1° sem., vol. II, pag. 494. — *Sopra un altro nuovo isomero della santonina e sopra un altro nuovo isomero dell'acido santonoso.* Ibid., 2° sem., vol. II, pag. 175. — *Sulla struttura degli acidi santonosi.* Atti dei Lincei, Rendiconti, 1895, 1° sem., vol. IV, pag. 68.

Anzi sul primo ho creduto potere facilmente convertire l'acido desmotropo nell'acido levo per azione dell'idrato potassico a 200°, come ho trasformato la desmotropo-santonina, che ridotta genera l'acido desmotropo-santonoso, nella iso-desmotropo-santonina, che invece genera l'acido levo-santonoso.

Ma i risultati furono negativi; infatti riottenni l'acido desmotropo-santonoso inalterato, che colla cristallizzazione frazionata suddiviso in tre campioni, fondeva costantemente a 175°.

Allora ho voluto vedere se l'acido desmotropo riscaldato a 300° desse analogamente all'acido destro-santonoso [1] un'anidride ed in tal caso se questa rigenerasse l'acido dal quale deriva, come fa quella dell'acido destro, oppure un altro acido santonoso.

Ecco i risultati ottenuti:

L'acido desmotropo-santonoso riscaldato fra 295° e 305°, in un bagno di lega metallica per 2 ore, elimina dell'acqua senza svolgere nemmeno una traccia di gas combustibili e si trasforma in una massa oleosa, che per raffreddamento si solidifica in una resina trasparente, fragile, di color paglierino e simile all'anidride dell'acido destro-santonoso. È infatti anch'essa un'anidride, che deriva dall'eliminazione di una molecola d'acqua per ogni due molecole di acido desmotropo, come risulta dalla seguente determinazione:

gr. 11,68 di acido desmotropo-santonoso scaldati fra 295° e 305°, perdono gr. 0,42 di H^2O

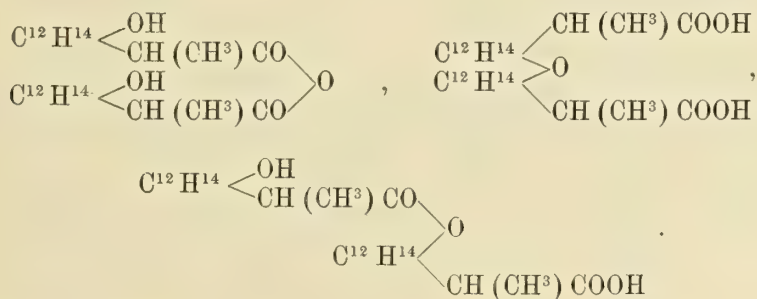
	calcolato	trovato
H^2O	3,63	3,60

Analogamente all'anidride dell'acido destro-santonoso non si discioglie facilmente nell'alcool e nell'etere; però col tempo quest'ultimo solvente ne discioglie una gran parte, lasciando indietro un poco di sostanza polverosa bianca e quasi insolubile.

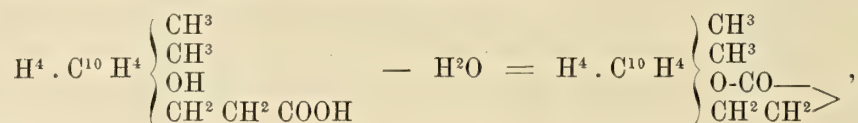
Per svaporamento dell'etere si riottiene l'anidride col suo aspetto resinoso.

L'eliminazione dell'acqua dall'acido desmotropo-santonoso può essere avvenuta fra i carbossili, o fra gli ossidrili naftolici, o fra un carbossile ed un ossidrile, appartenenti a due molecole, per cui all'anidride spetta una di queste tre formole di struttura:

$$\left.\begin{array}{l} C^{12}H^{14}\!<\!\begin{array}{l}OH\\ CH\,(CH^3)\,CO\end{array} \\ C^{12}H^{14}\!<\!\begin{array}{l}OH\\ CH\,(CH^3)\,CO\end{array}\end{array}\right\rangle O \quad , \quad \begin{array}{l} C^{12}H^{14} - CH\,(CH^3)\,COOH \\ \quad >O \\ C^{12}H^{14} - CH\,(CH^3)\,COOH \end{array} ,$$

$$\begin{array}{l} C^{12}H^{14}\!<\!\begin{array}{l}OH\\ CH\,(CH^3)\,CO\end{array}\!\!\diagdown \\ \qquad\qquad\qquad\qquad >O \\ \qquad C^{12}H^{14}\!<\!\begin{array}{l}\diagup\\ CH\,(CH^3)\,COOH\end{array}\end{array} .$$

[1] S. Cannizzaro, *Sui prodotti di decomposizione dell'acido santonoso*. Gazz. chim., vol. XIII, pag. 387.

La prima e la terza formola rappresentano le strutture più probabili, ma è anche possibile che l'anidride sia un miscuglio di due, o di tutte e tre le specie d'anidridi; poichè, come ho già detto, l'etere non la discioglie completamente e quella parte che vi si discioglie non è poi tutta solubile, anche dopo una lunga digestione, in una soluzione acquosa di carbonato sodico. Mentre il prof. Cannizzaro [1], non avendo determinato l'acqua che elimina l'acido destro- santonoso riscaldato a 300°, indicò la formazione della sua anidride colla seguente equazione:

$$H^4 . C^{10} H^4 \left\{ \begin{array}{l} CH^3 \\ CH^3 \\ OH \\ CH^2\, CH^2\, COOH \end{array} \right. - H^2O = H^4 . C^{10} H^4 \left\{ \begin{array}{l} CH^3 \\ CH^3 \\ O\text{-}CO\text{——}> \\ CH^2\, CH^2 \end{array} \right. ,$$

e la considerò un' anidride interna, nella quale il residuo dell'acido propionico avendo perduto l' OH acido si sarebbe attaccato all' ossigeno fenico, come negli eteri dei fenoli.

Avrei potuto convertire tutta l'anidride grezza da me ottenuta dall'acido desmotropo-santonoso nell'acido corrispondente colla potassa alcoolica, come il prof. S. Cannizzaro trasformò quella dell'acido destro-santonoso, ma non lo feci temendo che se avessi riottenuto invece dell'acido desmotropo-santonoso un altro acido isomero, non avrei potuto più sapere se tale trasformazione dovesse attribuirsi all'azione del calore, oppure all'azione della potassa alcoolica; perciò rivolsi le mie ricerche su quella parte di anidride che è solubile nell'etere e che lentamente si discioglie nella soluzione acquosa di carbonato sodico. Per l'appunto da questa soluzione con acido cloridrico precipitai un acido, che non era il desmotropo-santonoso, ma il levo-santonoso, come risulta dall'esame dei caratteri di due campioni ottenuti colla cristallizzazione frazionata, infatti:

1° I due campioni, come l'acido levo, fondono fra 179°-80° e cristallizzano in piccoli aghi.

2° Il potere rotatorio determinato nel primo campione diede i seguenti risultati:

Solvente	Alcool assoluto
Concentrazione per %	3,9088
Lunghezza del tubo in mm.	219,65
Deviazione osservata per $(\alpha)_D^{10°}$	— 6°,45
Potere rotatorio specifico	— 75,1

Questi valori corrispondono con quelli dell'acido levo-santonoso, ottenuto dalla iso-desmotropo-santonina, per il quale ho trovato $(\alpha)_D^{28°} = -74°,5$; mentre per l'acido desmotropo-santonoso $(\alpha)_D^{18°}$ è $= -53°,3$.

3° L'etere etilico ottenuto dal 2° campione fonde a 116°, come quello dell'acido levo e presenta le stesse apparenze e gli stessi caratteri di solubilità.

4° L'etere etilico suddetto mescolato con un peso uguale di destro-santonito etilico dà il racemo-santonito etilico fusibile a 125°.

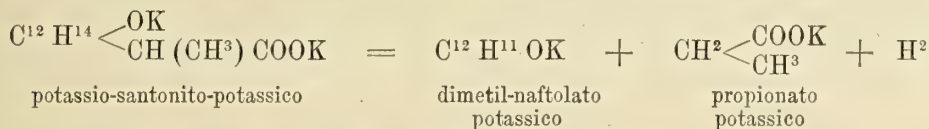
[1] Loco citato, pag. 394.

L'acido desmotropo-santonoso si trasforma dunque in uno degli altri tre acidi santonosi; appunto nel levo, come avevo supposto e può essere ritenuto con molta probabilità per un altro stereo-isomero.

Azione dell'idrato potassico sui quattro acidi santonosi.

Para-dimetil-naftol $C^{10}H^{5}\begin{cases}CH^{3}\\OH\\CH^{3}\end{cases}$.

Ho fuso separatamente coll'idrato potassico i quattro acidi santonosi; essi si scindono tutti nettamente in dimetil-naftol, acido propionico ed idrogeno secondo l'equazione:

$$\underset{\text{potassio-santonito-potassico}}{C^{12}H^{14}<^{OK}_{CH(CH^{3})COOK}} = \underset{\text{dimetil-naftolato potassico}}{C^{12}H^{11}OK} + \underset{\text{propionato potassico}}{CH^{2}<^{COOK}_{CH^{3}}} + H^{2}$$

Il dimetil-naftol derivante dai quattro acidi santonosi è identico a quello ottenuto, con piccolo rendimento, da Cannizzaro e Carnelutti [1] per azione della barite sugli acidi destro e racemo-santonoso, e da Cannizzaro fra i prodotti della distillazione dell'acido destro-santonoso [2].

Ho fatto le decomposizioni degli acidi santonosi nel modo seguente:

Si introducono in un pallone di vetro poco fusibile e di pareti resistenti, parti uguali, di acido santonoso, d'idrato potassico puro e di acqua; si adatta al pallone un tubo di sviluppo alto un metro, che pesca in un bagno di mercurio; si riscalda in bagno di lega fra 200° e 230° per portare a secco il miscuglio, mentre che il vapor d'acqua serve a discacciare l'aria dal recipiente; poi s'innalza la temperatura sino a 360° e si mantiene costante. A questa temperatura la massa fonde in un liquido vischioso giallognolo che va sempre più imbrunendo e sviluppa idrogeno, il quale determina un forte rigonfiamento. La reazione è completa quando diminuisce il rigonfiamento, ed il liquido divenuto più mobile si riunisce in fondo svolgendo ancora qualche bollicina d'idrogeno. Allora si toglie subito il palloncino dal bagno, perchè talvolta solo per un altro minuto di riscaldamento avviene una decomposizione profonda con sviluppo d'idrocarburi e carbonizzazione della massa.

Dalla soluzione acquosa della massa fusa che contiene, oltre al dimetil-naftolato ed al propionato potassico, un poco di silicato, proveniente dal vetro del recipiente [3], con l'anidride carbonica si precipita il dimetil-naftol insieme alla silice, dalla quale si separa digerendo nell'etere il precipitato secco e poi filtrando. Si purifica il naftol per distillazione nel vuoto, oppure alla pressione ordinaria e anche meglio in corrente di vapore.

(1) Gazz. chim. ital., vol. XII, pag. 406.
(2) Gazz. chim. ital., vol. XIII, pag. 385.
(3) Questo inconveniente si eviterebbe coll'uso di recipienti metallici, inattaccabili dall'idrato potassico, ma non sono consigliabili non permettendo l'osservazione dell'andamento della fusione in tutta la massa, così indispensabile per la buona riuscita dell'operazione.

Ho fatto anche queste fusioni nel vuoto, però con pessimi risultati; mentre, come vedremo, il rendimento è quasi teoretico tanto per il dimetil-naftol, quanto per l'acido propionico e per l'idrogeno e quest'ultimo poi è sempre esente d'idrocarburi, quando le fusioni son fatte in atmosfera di vapor d'acqua, colle precauzioni sopra ricordate e con un grammo di acido santonoso per volta.

Il detto naftol cristallizza in aghi splendenti, fonde fra 135°-136°, bolle con leggero imbrunimento a 315°-316° alla pressione di 760 mm., sublima già sotto i 100°, è solubilissimo nell'etere, nell'alcool e nell'acido acetico, poco nell'acqua bollente e pochissimo in quella fredda alla quale però comunica una bella fluorescenza azzurra. Si discioglie facilmente a freddo nelle soluzioni degli idrati alcalini.

Riscaldato con metilato sodico e joduro di metile in apparecchio a ricadere sotto pressione si trasforma nel dimetil-naftolato metilico $C^{12} H^{11} O . CH^3$ (1), che si purifica distillandolo in corrente di vapore, e che dall'alcool metilico cristallizza in bei prismi duri fusibili a 68°. Quest'etere essendo caratteristico sempre m'ha servito per identificare il dimetil-naftol.

Ho separato e determinato l'acido propionico, proveniente dalla decomposizione degli acidi santonosi, nel modo seguente:

Il liquido dal quale s'è separato, mediante l'anidride carbonica, il naftol e la silice si acidifica con acido solforico puro (nel caso che si ottenga un leggero precipitato di acido santonoso si filtra) e si distilla in corrente di vapore, sinchè le ultime porzioni non hanno più reazione acida. Si saturano le acque distillate con idrato di bario in eccesso, si concentrano, si portano a secco in corrente di anidride carbonica e si riprende il residuo con pochissima acqua per disciogliere il propionato di bario, che poi si precipita appena colorato con alcool assoluto, mentre in questo restano disciolte le materie estranee trascinate dal vapor d'acqua.

Ho analizzato l'acido propionico sotto forma di sale d'argento, che si ottiene aggiungendo alla soluzione bollente di propionato di bario, convenientemente diluita, un leggero eccesso di nitrato d'argento e facendo bollire per mezz'ora; così le ultime tracce di materie estranee vengono ossidate; e separato l'argento ridotto per filtrazione, si ha una soluzione perfettamente scolorata, che per raffreddamento depone cristallizzato il propionato argentico purissimo.

Ecco i risultati analitici di alcuni campioni di propionato d'argento provenienti dalla scomposizione degli acidi santonosi racemo e desmotropo:

I gr. 0,3845 di propionato d'argento (dall'acido racemo) dànno gr. 0,2298 di Ag
II gr. 0,3171 (dall'acido desmotropo) dànno gr. 0,1885 di Ag
III gr. 0,2961 (dall'acido desmotropo) dànno gr. 0,2152 di CO^2 e gr. 0,0738 di H^2O

	calcolato per	trovato		
	$Ag C^3 H^5 O^2$	I	II	III
Ag	59,59	59,76	59,45	
C	19,92	»	»	19,82
H	2,77	»	»	2,77

(1) Cannizzaro e Carnelutti, Gazz. chim. ital., vol XII, pag. 407.

La scomposizione degli acidi santonosi in dimetil-naftol, acido propionico ed idrogeno è quasi teoretica, anzi teoretica se si considerano le perdite inevitabili, come risulta dai seguenti dati:

I gr. 5 di acido desmotropo-santonoso, fusi colla potassa in 5 palloncini, dànno gr. 3,375 di dimetil-naftol (fusibile a 132°), gr. 2,43 di propionato baritico secco, e cc. 502,5 di idrogeno umido, misurato a $758^{mm},5$ e 21°

II gr. 5 di acido destro dànno gr. 3,402 di naftol

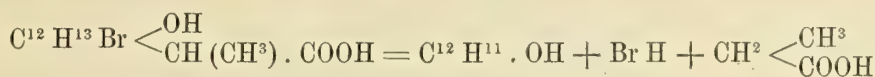
III gr. 5 di " levo " " 3,278 "

IV gr. 5 di " racemo " " 3,297 "

SOSTANZE	Calcolato per cento parti	Trovato			
		desmotropo I	destro II	levo III	racemo IV
Dimetil-naftol ($C^{12}H^{12}O$)	69,4	67,4	68,0	65,6	66,0
Acido propionico ($C^3H^6O^2$)	29,8	25,4			
Idrogeno (H^2)	0,8	0,8			
. . . . .	100,0	93,6			

Azione dell'idrato potassico sull'acido (α) bromo-destro-santonoso.

Per dimostrare che come si distacca il bromo coll'idrogeno additivo si deve distaccare anche la catena propionica, ho fatto prima agire sull'acido α bromo-destro-santonoso l'idrato potassico a 360°, che lo scinde in dimetil-naftol, acido bromidrico, ed acido propionico (allo stato di sali potassici) secondo l'equazione:

$$C^{12}H^{13}Br<^{OH}_{CH(CH^3).COOH} = C^{12}H^{11}.OH + BrH + CH^2<^{CH^3}_{COOH}$$

La scomposizione però dell'acido bromurato non è teoretica, come quella degli acidi santonosi, poichè in parte il prodotto subisce una scomposizione più profonda con sviluppo di idrocarburi.

Identificai il naftol confrontando i suoi caratteri e quelli del suo etere metilico, e l'acido propionico analizzandolo allo stato di sale d'argento, che fornì i seguenti dati:

gr. 0,1466 di sale dànno gr. 0,0877 di Ag

	calcolato per Ag $C^3H^5O^2$	trovato
Ag	59,59	59,82

Dopo varî tentativi ho trovato che per distaccare dall'acido α-bromo-destro-santonoso soltanto l'acido bromidrico si deve riscaldare coll'idrato potassico fra 220°-270° per una ventina di minuti. La massa fonde con annerimento, ma senza sviluppo di

gas; poi disciolta nell'acqua coll'anidride carbonica mostra non contenere neanche una traccia di naftol, mentre con acido solforico in leggero eccesso, si precipita un acido bruno, molle e che non contiene bromo; infatti questo si ritrova nel liquido sotto forma di acido bromidrico e si precipita in quantità teoretica con $Ag^2 SO^4$.

gr. 2 di acido α-bromo-santonoso, fuso colla potassa fra 230°-270°, dànno gr. 1,16 di Ag Br

	calcolato	trovato
Br	24,4	24,6

La sostanza che si forma per l'azione moderata dell'idrato potassico sull' acido α-bromo-destro santonoso, per eliminazione di acido bromidrico soltanto, dovrebbe essere probabilmente un acido santonoso disidrogenato, formatosi nel modo seguente:

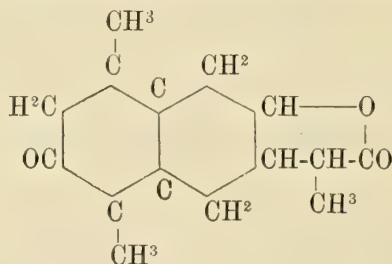
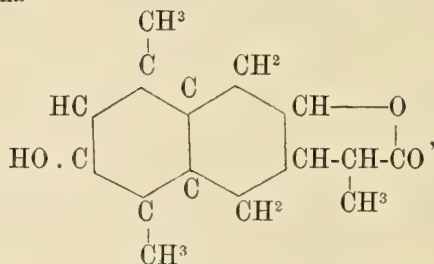
$$C^{12} H^{13} Br <^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} = H\,Br + C^{12} H^{12} <^{OH}_{CH\,(CH^3)\,.\,COOH}$$

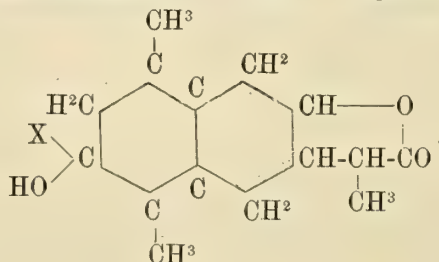
CONCLUSIONI

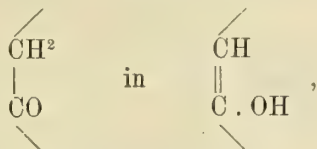
Gli acidi cloridrico e bromidrico trasformano la santonina

CH³
C CH²
C
H²C CH——O
OC CH-CH-CO
C
C CH² CH³
CH³

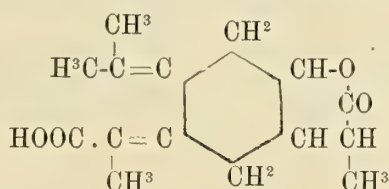
nella desmotropo-santonina

CH³
C CH²
C
HC CH——O
HO . C CH-CH-CO'
C
C CH² CH³
CH³

formando prima, molto probabilmente, il composto alogenato intermedio

CH³
C CH²
C
H²C CH——O
X
>C CH-CH-CO'
HO C
C CH² CH³
CH³

risultante dall' addizione d' una molecola d' idracido al CO cetonico della santonina, il quale composto spiegherebbe la conversione del gruppo

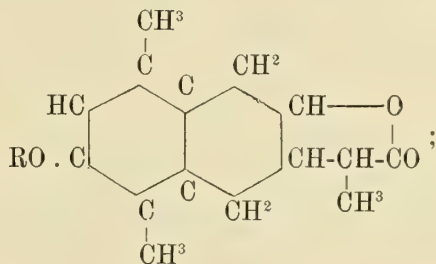
$$\begin{matrix} / \\ CH^2 \\ | \\ CO \\ \backslash \end{matrix} \quad \text{in} \quad \begin{matrix} / \\ CH \\ \| \\ C.OH \\ \backslash \end{matrix} ,$$

ed il forte potere rotatorio delle soluzioni di santonina negli acidi cloridrico e bromidrico.

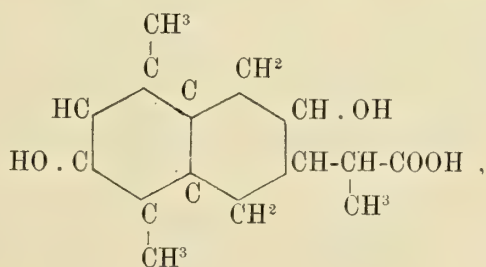
Analogamente e con ugual probabilità il CO cetonico dell' ac. santonico si deve addizionare agli idracidi ed all' acqua, come risulta dalle mie determinazioni di potere rotatorio; e la formazione dell' acido fotosantonico

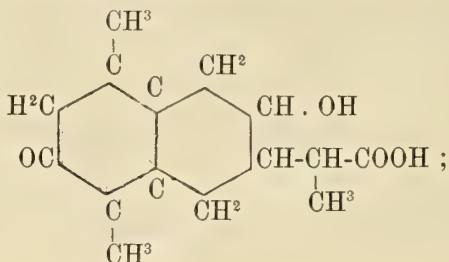
```
          CH3        CH2
          |
    H3C-C=C    /  \    CH-O
               |    |     CO
 HOOC . C = C   \  /   CH CH
        |          CH2     |
        CH3                CH3
```

fa ritenere che pure l' acqua agisca in modo analogo sul CO cetonico della santonina.

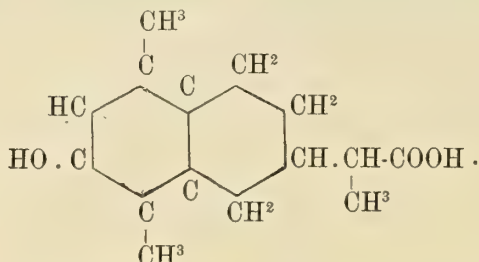
La desmotropo-santonina per azione della potassa a 210° si cangia in un suo isomero, che si deve rappresentare in un piano colla stessa struttura, poichè gli rassomiglia perfettamente nel comportamento chimico, infatti le due nuove santonine:

1° non reagiscono, nè colla fenilidrazina, nè coll'idrossilammina; invece hanno le proprietà dei naftoli dando derivati acetilici, metilici, etilici e benzilici, rappresentabili dal seguente schema:

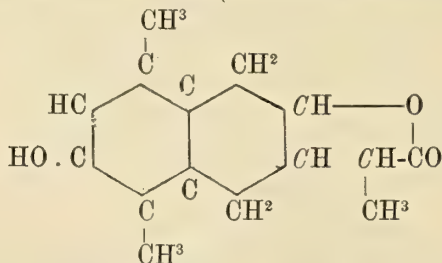
```
           CH3
           |
           C       CH2
              C
      HC  /  \  /  \  CH——O
         |    |    |       |
  RO . C |    |    | CH-CH-CO ;
          \  /  \  /      |
           C   C   CH2    CH3
           |
           CH3
```

2° come la santonina contengono il gruppo lattonico, trasformandosi per azione degli idrati alcalini ed alcalini terrosi nei sali degli acidi desmotropo-santoninici

```
           CH3
           |
           C       CH2
              C
      HC  /  \  /  \  CH . OH
         |    |    |
  HO . C |    |    | CH-CH-COOH ,
          \  /  \  /      |
           C   C   CH2    CH3
           |
           CH3
```

che sono anche meno stabili dell' acido santoninico di Hesse

CH^3
C $\quad$ CH^2
C
H^2C $\quad$ CH . OH
OC $\quad$ CH-CH-COOH ;
C
C $\quad$ CH^2 $\quad$ CH^3
CH^3

3° infine ridotte si trasformano nel loro corrispondente acido santonoso

CH^3
C $\quad$ CH^2
C
HC $\quad$ CH^2
HO . C $\quad$ CH . CH-COOH .
C
C $\quad$ CH^2 $\quad$ CH^3
CH^3

Dopo ciò si può ritenere che le due desmotropo-santonine differiscono fra loro soltanto per una diversa disposizione nello spazio dei gruppi disposti intorno ai carboni asimmetrici. La minore solubilità ed il punto di fusione elevato della desmotropo-santonina, in confronto dell' iso-desmotropo-santonina, potrebbero far credere la prima un polimero della seconda, ma la grandezza molecolare della desmotropo-santonina, determinata col metodo ebulliscopico, corrisponde per la formola semplice $C^{15} H^{18} O^3$; il che però non esclude, che essa possa essere in soluzione dissociata come i racemi.

Dalla struttura che si deve attribuire alle due desmotropo-santonine

CH^3
C $\quad$ CH^2
C
HC $\quad$ *C*H——O
HO . C $\quad$ *C*H $\quad$ *C*H-CO
C
C $\quad$ CH^2 $\quad$ CH^3
CH^3

risulta l'asimmetria di tre atomi di carbonio, perciò, almeno per ora, è molto azzardato il voler precisare la configurazione nello spazio dei due isomeri.

Aggiungerò che la santonina trattata coll' idrato potassico a 210°, si converte nell' acido santonico, nelle stesse condizioni che permettono la trasformazione della desmotropo-santonina nell'ossiacido del suo isomero, per cui è forse possibile qualche analogia fra la struttura nello spazio dell'acido santonico e quella dell'acido iso-desmotropo-santoninico.

Dalla formola della santonina e da quella delle due desmotropo-santonine gli acidi santonosi, che da esse derivano per fissazione di due atomi d'idrogeno, potrebbero avere una delle tre seguenti formole:

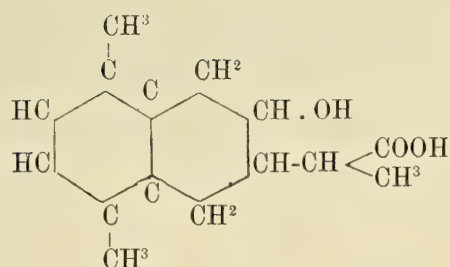
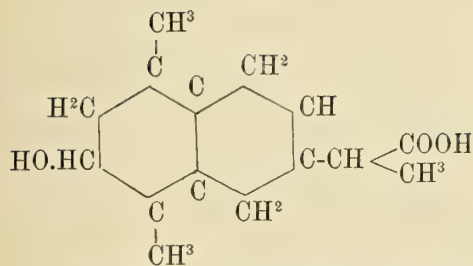
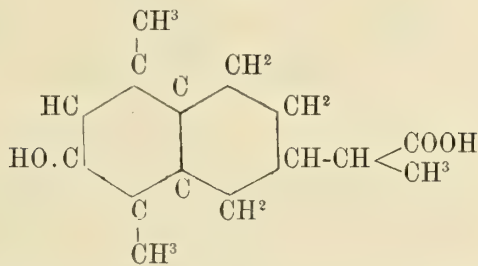
I.

```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
      HC                 CH . OH
      HC                 CH-CH <COOH
                                CH³
                C
            C       CH²
            |
            CH³
```

II.

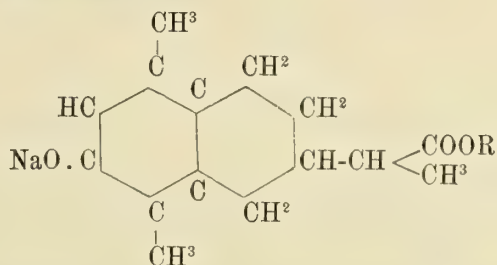
```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
   H²C                   CH
   HO.HC                 C-CH <COOH
                               CH³
                C
            C       CH²
            |
            CH³
```

III.

```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
      HC                 CH²
      HO . C             CH-CH <COOH
                                CH³
                C
            C       CH²
            |
            CH³
```

Però la terza formola rappresenta la vera struttura in un piano dei 4 acidi santonosi, corrispondendo essa sola a tutte le loro reazioni, come ora esporrò:

1° I quattro acidi santonosi contengono un carbossile, poichè fanno un sale coi carbonati alcalini e si eterificano, quasi completamente, con un alcool ed acido cloridrico.

2° Un ossidrile di natura fenica, poichè i santoniti metilici ed etilici fanno i corrispondenti composti sodici

```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
      HC                 CH²
      NaO . C            CH-CH <COOR
                                CH³
                C
            C       CH²
            |
            CH³
```

sia col metallo, sia coll' alcoolato, sia colle soluzioni acquose d' idrato; e questi composti sodici con l' anidride carbonica rigenerano l' etere santonoso.

3° L' idrogeno fenico può essere anche sostituito dai radicali acidi, come l' acetile, il benzoile, e dai radicali alcoolici, come il metile, l'etile, il benzile, ecc. per formare composti dei tipi:

```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
      HC                 CH²
      RO . C             CH-CH-COOR
                               |
                C              CH³
            C       CH²
            |
            CH³
```

```
            CH³
            |
            C       CH²
                C
      HC                 CH²
      RO.C               CH-CH-COOH
                               |
                C              CH³
            C       CH²
            |
            CH³
```

I radicali acidi si possono distaccare coll' idrato potassico acquoso, oppure alcoolico, ed i radicali alcoolici mediante l' acido jodidrico bollente a 127°.

4° L' ossidrile naftolico è quello stesso che preesisteva nelle desmotropo-santonine, perciò la sua posizione corrisponde a quella del CO cetonico nella santonina; infatti gli acidi metil, etil e benzil, desmotropo-santonosi, e gli acidi metil, etil levo-santonosi, che si ottengono per riduzione delle corrispondenti desmotropo-santonine sostituite

```
        CH³                                         CH³
        |                                           |
        C     CH²                                   C     CH²
   HC      C      CH——O                        HC      C      CH²
                     |          + H² =
RO . C              CH-CH-CO               RO . C              CH-CH-COOH,
           C          |                                C          |
        C     CH²    CH³                            C     CH²    CH³
        |                                           |
        CH³                                         CH³
```

sono identici agli acidi metil, etil e benzil desmotropo, o levo santonosi, preparati direttamente dai corrispondenti acidi santonosi.

Queste reazioni escludono la possibilità che l' OH degli acidi santonosi sia alcoolico secondario e tanto più che esso derivi dall' apertura del legame lattonico delle santonine, come voleva sostenere il Klein [1].

5° Gli acidi santonosi poi, analogamente ai fenoli ed ai naftoli, condensandosi per l' azione ossidante del cloruro ferrico, dànno gli acidi di-santonosi

$$\begin{array}{l} C^{12}H^{13}<^{OH}_{CH\,(CH^3)\,COOH} \\ | \\ C^{12}H^{13}<^{CH\,(CH^3)\,COOH}_{OH} \end{array},$$

nei quali i nuclei naftalici di due molecole d' acido santonoso si sono saldati insieme, per eliminazione di due atomi d' idrogeno.

6° Gli acidi santonosi non contengono legami etilenici nella catena laterale, perchè non si addizionano nè agli alogeni, nè agli idracidi, invece dànno derivati mono bromo sostituiti per azione del bromo ad una temperatura inferiore a 0°.

7° Gli acidi santonosi devono considerarsi come i derivati di una tetra-idro-para-dimetil-naftalina perchè coll' idrato potassico a 360°, si scindono teoreticamente in dimetil-naftol, idrogeno, ed acido propionico secondo quest' equazione:

```
       CH³                                       CH³
       |                                         |
       C     CHH                                 C     CH
  HC      C      CHH                        HC      C      CH
                            =                                     + H² + CH²-COOH
HO.C             CH-CH COOH               HO.C             CH                |
          C         |                                C                      CH³
       C     CHH   CH³                           C     CH
       |                                         |
       CH³                                       CH³
```

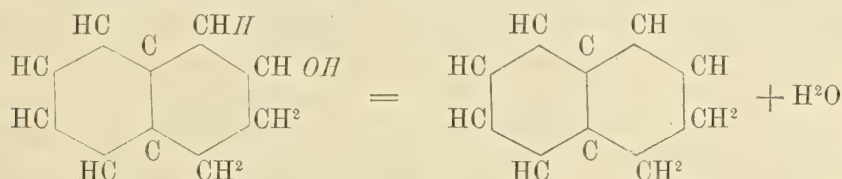
[1] *Ueber das Santonin IV.* Archiv. des Pharmacie 1893, vol. CCXXXI, pag. 702.

Se gli acidi santonosi avessero avuto una delle due altre strutture, nelle quali l' OH è alcoolico secondario, decomponendosi colla potassa dovevano dare, invece del dimetil-naftol, l'idrocarburo corrispondente, infatti:

$$\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ C \quad CH\mathit{H} \\ HC \quad C \quad CH.\mathit{OH} \\ HC \quad\quad CH\text{-}\mathit{CH}<^{\mathit{CH^3}}_{\mathit{COOH}} \\ C \\ C \quad CH\mathit{H} \\ | \\ CH^3 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ C \quad CH \\ \mathit{H}HC \quad C \quad CH \\ \mathit{HO}.CH \quad\quad CH\text{-}\mathit{CH}<^{\mathit{CH^3}}_{\mathit{COOH}} \\ C \\ C \quad CH\mathit{H} \\ | \\ CH^3 \end{array} \cdot$$

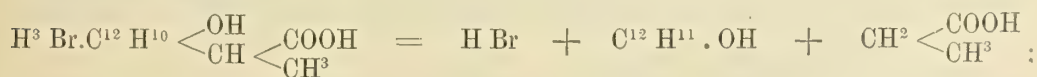
$$= \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ C \quad CH \\ HC \quad C \quad CH \\ HC \quad\quad CH \\ C \\ C \quad CH \\ | \\ CH^3 \end{array} \begin{array}{c} + \; H^2O \\ + \; CH^2<^{COOH}_{CH^3} \end{array}$$

analogamente alla scissione degli idro-naftoli, che hanno l' OH secondario, per es. E. Bamberger e R. Müller (1) dalla tetraidro-β-naftilammina $H^3.NH^2.\text{-}C^{10}H^8$ non ottennero per azione dell' acido nitroso il corrispondente naftol, perchè questo appena formato perde subito gli elementi dell' acqua e si trasforma nella biidro-naftalina

$$\begin{array}{c} HC \quad C \quad CH\mathit{H} \\ HC \quad\quad CH\;\mathit{OH} \\ HC \quad\quad CH^2 \\ HC \quad C \quad CH^2 \end{array} = \begin{array}{c} HC \quad C \quad CH \\ HC \quad\quad CH \\ HC \quad\quad CH^2 \\ HC \quad C \quad CH^2 \end{array} + H^2O$$

Perciò il Klein (2), per sostenere la formola che attribuiva all' acido destro santonoso di Cannizzaro, ammetteva che quando quest' acido si scinde colla potassa avviene l' eliminazione dell' ossidrile sotto forma d' acqua e si forma un nuovo ossidrile nel distacco della catena propionica.

Invece è la catena propionica che si distacca coll' idrogeno additivo per i seguenti fatti che credo non lascino più alcun dubbio:

1°. L' acido bromo-α-destro-santonoso si scinde coll' idrato potassico nel dimetil-naftol, acido bromidrico ed acido propionico, senza sviluppo d'idrogeno secondo l' equazione seguente:

$$H^3\,Br.C^{12}H^{10}<^{OH}_{CH<^{COOH}_{CH^3}} = H\,Br + C^{12}H^{11}.OH + CH^2<^{COOH}_{CH^3}:$$

moderando l' azione del calore si distacca quantitativamente soltanto l' acido bromi-

(1) Berl. Ber. XXI, p. 1116.

(2) Loco citato.

drico, il che dipinge il distacco dei residui acidi coll' idrogeno aggiunto e mostra come il bromo sia più facilmente distaccato del residuo propionico.

2° Il destro-santonito etilico, riscaldato al di là di 300°, si scinde parzialmente in biidro-dimetil-naftol e propionato d'etile (1)

```
       CH3                                      CH3
        |                                        |
        C        CH2                             C        CH2
    HC     C          CH2                    HC     C          CH2
                               =                                   + CH2-COO.C2H5
  HO·C     C          CH-CH-COO.C2 H5       HO.C    C          CH     |
        C        CHH       |                     C        CH          CH3
        |                  CH3                   |
       CH3                                      CH3
```

3° P. Gucci e G. Grassi-Cristaldi (2) riscaldando gli acidi santinici colla barite non ottennero un dimetil-naftol, ma la dimetil-etil-naftalina

```
       CH3                                      CH3
        |                                        |
        C        CH                              C        CH
    HC     C          CH                     HC     C          CH
                           /CH3
    HC     C          C-CH<         = CO2 +  HC     C          C-CH2 . CH3 ,
        C        CH        \COOH                 C        CH
        |                                        |
       CH3                                      CH3
```

perchè non contenendo tali acidi l'idrogeno additivo atto a distaccare la catena laterale propionica, questa invece perde soltanto il carbossile.

4° La struttura del dimetil-naftol

```
       CH3
        |
        C        CH
    HC     C          CH
  HO.C     C          CH
        C        CH
        |
       CH3
```

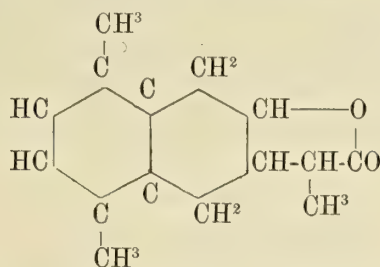
derivante dalle formole che ho adottato per gli acidi santonosi e dal modo di interpetrare la loro decomposizione coll' idrato potassico, ora è stata confermata dal prof. Cannizzaro e da me, mediante lo studio dell' ossidazione del dimetil-naftol e della dimetil-naftilammina corrispondente (3). Infatti da tutti e due abbiamo ottenuto acido orto-ftalico, il che dimostra, con tutta evidenza, che l'OH naftalico si trova nel nucleo contenente i due metili e siccome questi sono in posizione para cioè: α α, l' ossidrile deve occupare la posizione β .

(1) N. Rizzo, *Sui prodotti di decomposizione e sulle anidridi del destro-santonito etilico.* Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. II, pag. 290.

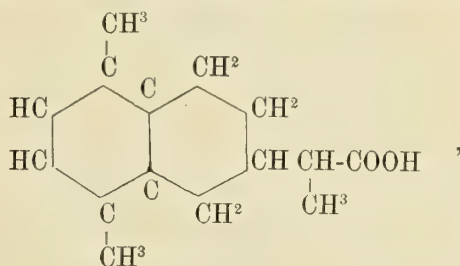
(2) Gazz. chim. ital., anno XXII, vol. I, pag. 41.

(3) Rend. Acc. Lincei 1885, 1° sem., vol. IV, pag. 287.

5° Grassi-Cristaldi (¹) riducendo l' iposantonina

```
            CH³
             |
             C        CH²
                  C
   HC                      CH——O
                               |
   HC                      CH-CH-CO
                  C          |
             C        CH²   CH³
             |
            CH³
```

con acido acetico e polvere di zinco ottenne l'acido iposantonoso

```
            CH³
             |
             C        CH²
                  C
   HC                      CH²

   HC                      CH CH-COOH   ,
                  C          |
             C        CH²   CH³
             |
            CH³
```

il quale fuso colla potassa si scinde nettamente in dimetil-naftalina, biidro-dimetil-naftalina, idrogeno ed acido propionico.

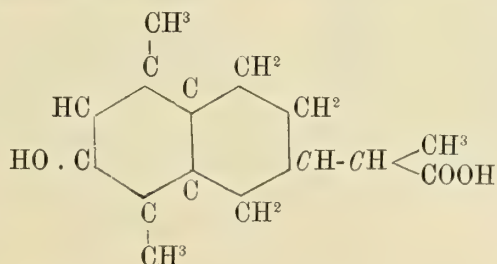
La stereoisomeria degli acidi santonosi destro, levo e racemo è, come abbiamo visto, ampiamente dimostrata con una serie numerosa di derivati. L' unione dei derivati destro e levo genera i racemi; e credo che questi racemi potranno essere sdoppiati facilmente, come ho già notato pel racemo-bromo-santonito etilico.

L' azione prolungata degli acidi e degli alcali trasforma parzialmente l'acido destro nel racemo, e naturalmente anche l' acido levo subirebbe un' analoga trasformazione.

I racemi sono generalmente un po' meno solubili, cristallizzano più facilmente ed hanno un punto di fusione più alto dei loro corrispondenti isomeri destro e levo, fatta eccezione degli acidi racemo-santonoso e racemo disantonoso, che hanno un punto di fusione più basso dei loro corrispondenti isomeri attivi.

L' acido desmotropo-santonoso e tutti i suoi derivati, non uno escluso, hanno un potere rotatorio più debole dei corrispondenti isomeri attivi e sono levogiri.

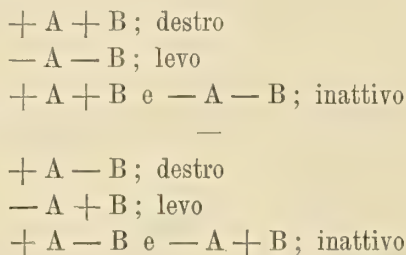
L'acido desmotropo-santonoso è probabilmente un altro stereoisomero, poichè colla formola adottata per gli acidi santonosi

```
              CH³
               |
               C        CH²
                    C
     HC                      CH²
                                          CH³
 HO . C                      CH-CH <
                    C                     COOH
               C        CH²
               |
              CH³
```

(¹) Comunicazione particolare.

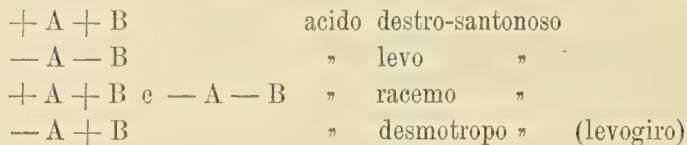
risultando l'asimetria per 2 atomi di carbonio sono possibili, secondo le teorie di J. H. van't' Hoff. e J. A. Le Bel sul carbonio asimmetrico, 4 isomeri attivi, due destro e due levo, e due composti inattivi sdoppiabili, che risultano dall' unione degli attivi inversi due a due. Tali modificazioni possono essere espresse nel modo seguente, quando si ritiene l' attività di un carbonio, che dirò A, maggiore di quella dell' altro carbonio, che dirò B:

+ A + B ; destro
— A — B ; levo
+ A + B e — A — B ; inattivo

—

+ A — B ; destro
— A + B ; levo
+ A — B e — A + B ; inattivo

I borneoli vengono citati come esempio di serie completa, essendo conosciuti tutti i gl' isomeri, che furono ottenuti da Montgolfier e Haller ([1]).

Nel caso degli acidi santonosi sarebbero noti i quattro isomeri:

+ A + B	acido destro-santonoso	
— A — B	» levo »	
+ A + B e — A — B	» racemo »	
— A + B	» desmotropo »	(levogiro)

Se si potesse ottenere l' acido desmotropo-destrogiro, pure la serie degli acidi santonosi sarebbe completa, poichè facile riuscirebbe il preparare l' acido racemo-desmotropo.

E però anche possibile che l' acido desmotropo-santonoso ed i suoi derivati sieno dei racemi parziali, formati dall'unione di due molecole attive, in modo che l' attività di un carbonio asimetrico d' una molecola venga compensata da quello corrispondente dell' altra molecola, mentre si sommano l' attività degli altri due atomi di carbonio; ciò che si può rappresentare con — A + B e — A — B.

Non volendo per ora decidere se l' acido desmotropo-santonoso debba considerarsi come un racemo parziale, o come uno dei quattro isomeri attivi possibili, citerò soltanto quei fatti per i quali si può ritenere che l' acido desmotropo-santonoso, la desmotropo-santonina ed i loro derivati sieno dei racemi parziali; riservandomi però, prima di pronunciarmi, uno studio più accurato e completo del potere rotatorio degli acidi santonosi e dei loro derivati.

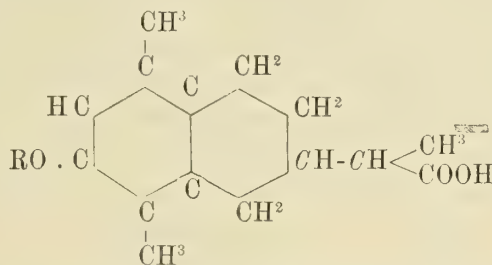
1° La desmotropo-santonina, dalla quale deriva l' acido desmotropo-santonoso, per il punto di fusione elevato e per la piccola solubilità nei solventi, potrebbe ritenersi, come ho già detto, per un polimero, se la sua grandezza molecolare, non stabilisse la formola semplice $C^{15} H^{18} O^3$, confermata anche dal peso molecolare del derivato acetilico; ciò però andrebbe d'accordo coi fatti, che i racemi in soluzione

([1]) Stéréochimie, *Nouvelle édition de dix années dans l'histoire d'une théorie par J. H. van't' Hoff*, pag. 50.

sono sempre dissociati e che la desmotropo santonina si forma per azione dell' acido cloridrico, il quale facilmente converte nel racemo molte sostanze attive.

2° L' acido desmotropo-santonoso ed i suoi derivati hanno tutti un potere rotatorio più basso dei loro corrispondenti isomeri attivi, sono sempre levogiri, e per le loro propietà fisiche si rassomigliano più ai derivati racemo-santonosi che non ai levo e destro-santonosi.

3° I poteri rotatori molecolari degli acidi metil, etil e benzil desmotropo-santonosi

```
              CH³
              |
              C       CH²
          /      \  C  /    \
     H C                     CH²
RO . C |          |          | CH-CH< CH³
                                      COOH
          \      /  C  \    /
              C       CH²
              |
              CH³
```

sono vicinissimi a quello dell' acido desmotropo-santonoso, anzi potrebbero dirsi uguali, rientrando le differenze nei limiti degli errori di osservazione, mentre il potere rotatorio molecolare degli acidi metil ed etil levo, o destro santonosi è superiore a quello degli acidi levo, e destro santonosi, come qui risulta:

Acido desmotropo-santonoso . .	— 132	Acido levo o destro-santonoso .	± 185
" metil-desmotropo-santonoso	— 129	" metil-levo o destro-santonoso	± 189
" etil- id. id.	— 130	" etil- id. id. id.	± 202
" benzil- id. id.	— 133	(1)	

Questi dati oltre favorire l' ipotesi che l' acido desmotropo-santonoso sia un racemo parziale, preciserebbero anche quale è il carbonio asimetrico la di cui attività ottica viene compensata dal suo corrispondente di segno contrario appartenente all' altra molecola; ossia indicherebbe che tal carbonio è quello del nucleo naftalico, poichè sostituendo nell'acido desmotropo l'H dell'OH fenico con radicali alcoolici, più o meno pesanti, il potere rotatorio molecolare può dirsi che non varia; mentre quando la sostituzione avviene negli acidi destro e levo, il potere rotatorio molecolare aumenta notevolmente col crescere il peso del radicale sostituente.

4° La forma cristallina dell' acido etil-desmotropo-santonoso non corrisponde à quella di una sostanza attiva sulla luce polarizzata, perchè dovrebbe appartenere al gruppo asimmetrico del suo sistema (triclino), mentre tutti i cristalli osservati presentano uno sviluppo nelle forme perfettamente oloedrico.

5° Perchè la santonina trattata prima con un idracido (HCl) e poi riducendo l' isomero che ne deriva, si ottiene l' acido desmotropo; mentre trattata simultaneamente con un idracido e con un riduttore ($SnCl^2 + HCl$), o con un idracido riduttore (HJ) si ottiene l' acido destro-santonoso talvolta mescolato al racemo-santo-

(1) Non fu esaminato il potere rotatorio degli acidi santonosi, benzil levo e destro perchè essendo gommosi non si riuscì a purificarli.

noso? Non è forse probabile che gli idracidi trasformino la santonina prima in una desmotropo-santonina corrispondente all' acido destro-santonoso, la quale se si genera in presenza di un riduttore si trasforma nell' acido destro-santonoso, e se invece resta per un lungo tempo a contatto col solo acido cloridrico si racemizza probabilmente per uno dei tre atomi di carbonio asimetrici, generando così la desmotropo-santonina sostanza otticamente attiva?

Però ripeto per ora non intendo pronunziarmi sulla isomeria dell' acido desmo tropo-santonoso e tanto meno su quella delle due desmotropo-santonine, solo faccio rilevare, che se l' acido desmotropo-santonoso fosse un racemo-parziale, si potrebbe conoscere per gli acidi santonosi, secondo le teorie di Guy, quale sia la singola influenza dei due atomi di carbonio asimmetrici sul potere rotatorio.

Così la deviazione di gradi 74,6 degli acidi santonosi destro e levo sarebbe dovuta alla somma delle deviazioni 53,3 del carbonio asimmetrico della catena propionica, che non si compensa nell' acido desmotropo-santonoso, più quella di gradi 21,3 dovuta al carbonio del nucleo, che invece si compensa.

Non ho potuto nel corso di queste mie ricerche sempre determinare i poteri rotatorî nelle medesime condizioni, ed avendo adoperato un polarimetro non molto sensibile non posso assicurare l' assoluta precisione dei valori ottenuti, specialmente per quelle sostanze la di cui solubilità a freddo è piccolissima. Percui prima di trarre dai poteri rotatorî delle conclusioni mi riservo di determinare quello delle sostanze qui descritte, di altre che preparerò per completare le serie e di alcuni derivati della santonina, che hanno relazioni o cogli acidi santonosi, o colle desmotropo-santonine, possibilmente nelle stesse condizioni (temperatura e concentrazione), con solventi più adatti dell' alcool, servendomi di un polarimetro sensibilissimo, gentilmente messo a mia disposizione dal Laboratorio Chimico Centrale delle Gabelle.

Nonpertanto credo opportuno riunire nei due quadri posti in fine di questa Memoria i derivati più importanti dei quattro acidi santonosi disposti in altrettante serie, ed i derivati delle due desmotropo-santonine, per confrontarne i poteri rotatorî ed i punti di fusione, che sono le propietà caratteristiche.

Concluderò infine che risalendo dal dimetil-naftol per gli acidi santonosi alle desmotropo-santonine e da queste alla santonina, le formole di struttura della santonina e dei suoi immediati derivati vengono dimostrate nel modo più diretto, indipendentemente dalle altre ricerche, come risulta nella seguente tavola.

QUADRO I.

DERIVATI SANTONOSI	FORMOLA	Potere rotatorio delle serie santonose — Destro — Specifico	Destro — Molecolare	Levo — Specifico	Levo — Molecolare	Desmotropo — Specifico	Desmotropo — Molecolare	Differenze fra il potere rotatorio medio delle due serie destro e levo con quello della serie desmotropo — Specifico	Differenze — Molecolare	Punto di fusione delle serie santonose — Destro	Levo	Racemo	Desmotropo
Acido santonoso	$C^{14}H^{18}(OH).(COOH)$	+ 74°,8	+ 185	— 74°,4	— 185	— 53°,3	— 132	21°,3	53	179°-80°	179°-80°	153°-54°	175°
Santonito metilico	$C^{14}H^{18}(OH)(COO.CH^3)$	+ 84,9	+ 222	—	—	— 41,8	— 120	43,1	102	86	86	110,5-111	95-96
Id. etilico	$C^{14}H^{18}(OH).(COO.C^2H^5)$	+ 71,0	+ 196	— 70,6	— 195	—	—	—	—	116	116	125	vischioso
Acido metil santonoso	$C^{14}H^{18}(O.CH^3).(COOH)$	+ 72,2	+ 189	—	—	— 49,3	— 129	22,9	60	114	114	135	108
Acido etil-santonoso	$C^{14}H^{18}(O.C^2H^5).(COOH)$	+ 73,1	+ 202	— 73,2	— 202	— 47,2	— 130	26,0	68	120	120	144-45	127
Acido benzil santonoso	$C^{14}H^{18}(O.CH^2C^6H^5).(COOH)$	—	—	—	—	— 39,3	— 133	—	—	—	—	—	120-121
Etil-santonito etilico	$C^{14}H^{18}(O.C^2H^5)(COO.C^2H^5)$	+ 70,5	+ 214	— 70,3	— 214	—	—	—	—	32	32	54	—
Benzoil-santonito etilico	$C^{14}H^{18}(O.COC^6H^5)(COOC^2H^5)$	+ 59,9	+ 227	— 59,8	— 227	—	—	—	—	75	75	89	—
Acido bromo santonoso α	$C^{14}H^{17}Br(OH).(COOH)$	+ 69,7	+ 228	— 69,4	— 227	— 50,4	— 165	19,1	62,5	110-114 elimina il solvente incluso e rifonde a 115	110-114 e rifonde a 115	193-95	92-95 elimina il solvente incluso
Acido bromo santonoso β	$C^{14}H^{17}Br(OH).(COOH)$	+ 61,9	+ 202	—	—	—	—	—	—	159	—	—	—
Bromo-santonito etilico	$C^{14}H^{17}Br(OH).(COOC^2H^5)$	+ 68,2	+ 242	— 68,5	— 243	—	—	—	—	85-86	85-86	104-106	—
Acido di-santonoso	$[C^{14}H^{17}).(OH).(COOH)]^2$	+ 85,9	+ 424	— 85,8	— 424	— 64,5	— 319	21,3	105	250	250	244	255

QUADRO II.

DERIVATI DESMOTROPICI	FORMOLA	Potere rotatorio delle serie — Desmotropo — Specifico	Molecolare	Iso-desmotropo — Specifico	Molecolare	Differenze fra i poteri rotatori delle serie — Specifico	Molecolare	Punto di fusione delle serie — Desmotropo	Iso-desmotropo
Desmotropo-santonina.	$C^{15}H^{17}O^2$-OH . . .	+ 110°,3	+ 271	+ 128°,8	+ 317	18°,5	46	260°	189°
Acetil-desmotropo-santonina . . .	$C^{15}H^{17}$-O^2-O-$COCH^3$.	+ 92,9	+ 268	+ 122,6	+ 353	19,7	85	156	154
Metil-desmotropo-santonina . . .	$C^{15}H^{17}O^2$-O.CH^3 . .	+ 91,9	+ 239	+ 118,2	+ 301	26,3	62	153	112
Etil-desmotropo-santonina . . .	$C^{15}H^{17}O^2$-O.C^2H^5 . .	+ 114,1	+ 313	+ 129,5	+ 355	15,4	42	169	82
Benzil-desmotropo-santonina . . .	$C^{15}H^{17}O^2$-O.CH^2.C^6H^5	+ 102,6	+ 345	+ 136,5	+ 459	33,9	114	182	82

Il dott. Lo Monaco, Aiuto di fisiologia nella R. Università di Roma, ha da poco tempo intrapreso lo studio fisiologico delle desmotropo-santonine e dei loro derivati comparativamente alla santonina, allo scopo di ricercare, per questa classe di sostanze, quale influenza abbia la struttura chimica sull'azione fisiologica.

Intanto mi comunica, come risultato delle sue prime ricerche, quanto segue:

« La desmotropo-santonina e l'iso-desmotropo-santonina hanno un'azione fisiologica « uguale. Mentre però la santonina ha un'azione convulsivante ed è velenosa; le de- « smotropo-santonine hanno un'azione paralizzante e sono meno velenose. Non hanno « azione sul cuore per piccole dosi; con dosi maggiori si ha un rallentamento sinchè « il cuore che è l'*ultimum moriens* si ferma in diastole.

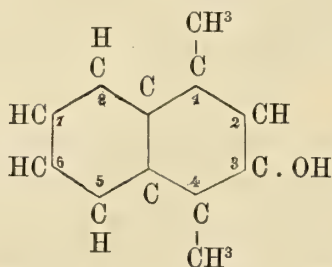
« La presenza dell' OH fenico e la minor velenosità di queste sostanze fa spe- « rare che esse, dietro ulteriori ricerche che sono state intraprese, possano sostituire « nella terapia la santonina ».

Sulla costituzione del dimetil-naftol proveniente dalla scomposizione degli acidi santonosi.

Memoria del Socio S. CANNIZZARO e A. ANDREOCCI.

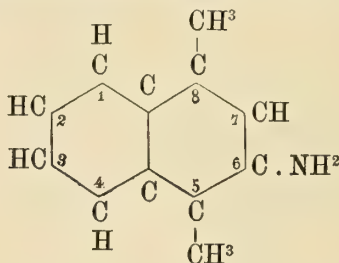
letta nella seduta del 1° dicembre 1895.

Abbiamo ripreso lo studio del dimetil-naftol proveniente dalla scomposizione degli acidi santonosi, al quale per l'insieme dei lavori compiuti dal 1882 in poi sui derivati della santonina è stata attribuita la formola:

```
          H        CH3
                    |
          C         C
              C
   HC  8        1      CH
      7             2
   HC 6             3  C . OH
        5       4
              C
          C         C
          H         |
                   CH3
```

Nel prepararne grandi quantità abbiamo seguito il metodo descritto da uno di noi (1) e ne abbiamo nuovamente verificato i caratteri e quelli del suo etere metilico, confermando pienamente quanto è stato pubblicato nel 1882 (2) e riassunto a pag. 544 della Memoria: *Sugli acidi santonosi*, indicata nella nota 1.

Possiamo ora aggiungere che siamo riusciti a distillare il nostro dimetil-naftol sotto la pressione ordinaria, evitando il contatto dell'aria mercè una corrente di anidride carbonica ed abbiamo trovato che il punto d'ebollizione si mantiene abbastanza costante tra 315° e 316°.

Dimetil-naftilammina (1-4-3) $C^{12}H^{13}N$

```
          H        CH3
                    |
          C         C
              C
   HC     1       8    CH
      2             7
   HC 3             6  C . NH2
        4       5
              C
          C         C
          H         |
                   CH3
```

(1) Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 452. A. Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi.*

(2) Gazz. chim. ital., anno XII, pag. 406. Cannizzaro e Carnelutti, *Sui due acidi isomeri santonoso ed isosantonoso.*

Dopo molti tentativi siamo riusciti ad ottenere l'ammina corrispondente al nostro dimetil-naftol, preparandone prima il composto acetilico nel modo seguente: Si è scaldato in tubi chiusi per tre ore, intorno a 270°, un miscuglio di 10 parti del naftol, di 24 di acetato sodico fuso, di 16 di cloruro d'ammonio e di 10 d'acido acetico glaciale. Aperti i tubi, la massa contenutavi si lava con acqua ed il residuo insolubile si depura per ripetute cristallizzazioni dall'alcool bollente. Si ottiene così l'acetil derivato della dimetil-naftilammina (1-4-3) coi seguenti caratteri:

Cristallizza in aghi incolori riuniti a mammelloni, fonde a 219-220°, è insolubile nell'acqua, solubile nell'etere e nell'alcool più a caldo che a freddo.

La sua composizione [1] corrisponde alla formola $C^{10} H^5 \begin{cases} (1)\ CH^3 \\ (2)\ NH . CO . CH^3 \\ (3)\ CH^3 \end{cases}$

Quest'acetil-derivato è stabilissimo, non si riesce a scomporlo neppure bollendolo con una soluzione alcoolica di potassa; per saponificarlo ed ottenere l'ammina bisognò scaldarlo in tubi chiusi fra 150° e 180°, per più ore, con una soluzione di alcoolato sodico nell'alcool assoluto. S'impiegò per ogni 1,5 gr. di composto cc. 30 di alcool assoluto in cui erano stati disciolti gr. 0,2 di sodio. Aperti i tubi, se ne versa il contenuto nell'acqua, l'ammina si separa dapprima oleosa, e cristallizza dopo pochi minuti. Raccolta, lavata con acqua si depura cristallizzandola più volte dall'alcool, o dall'etere, o anche meglio da un miscuglio di etere e ligroina. Si ottiene anche purissima distillandola in corrente di vapor d'acqua.

Cristallizza in lunghi prismi opachi, fonde a 75°, distilla inalterata a 333° sotto la pressione di 754^{mm}, è solubilissima nell'alcool, nell'etere e nell'etere acetico, quasi insolubile nell'acqua alla quale comunica una bella fluorescenza azzurra.

La composizione corrisponde alla formola $C^{12} H^{13} N$ [2]

Il *solfato* di quest'ammina è poco solubile nell'acqua; il *cloridrato* cristallizza in aghetti incolori, poco solubili a freddo nell'alcool; il *cloroplatinato* cristallizza in piccoli prismi giallo-arancio, poco solubili nell'alcool e meno nell'acqua e la sua composizione corrisponde alla formola $(C^{12} H^{13} N)^2 H^2 Pt Cl^6$ [3].

[1] Gr. 0,1597 di acetil-amido-dimetil-naftalina hanno dato gr. 0,1075 di H^2O e gr. 0,4623 di CO^2.

Gr. 0,2036 hanno dato cc. 12,05 di azoto misurato a 17° e 758^{mm},5.

Dai quali dati deducendo la composizione centesimale e comparandola con quella calcolata si ha:

	calcolato per $C^{14} H^{15} NO$	trovato
C	78,88	78,95
H	7,04	7,48
N	6,57	6,85

[2] Gr. 0,3112 di dimetil-naftilammina hanno dato cc. 22,3 di azoto misurato a 11° e 752^{mm},9.

	calcolato per $C^{12} H^{13} N$	trovato
N	8,19	8,46

[3] Gr. 0,2991 di cloroplatinato, seccato a 110°, hanno dato gr. 0,0774 di platino.

	calcolato per $(C^{12} H^{13} N)^2 H^2 . Pt Cl^6$	trovato
Pt	25,92	25,84

Questa dimetil-naftilammina in contatto dell'anidride acetica a freddo ridà l'acetil-derivato purissimo, identico a quello sopra descritto da cui proveniva.

Si ottiene anche il *formil*-derivato di questa ammina scaldandola in tubo chiuso tra 140° e 180° con acido formico per 6 ore, il prodotto purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool, nel quale è poco solubile, si presenta sotto forma di aghetti fusibili a 175°.

La dimetil-naftilammina trattata con acqua ed acido nitroso ridà quantitativamente il dimetil-naftol da cui provenne; il che non lascia alcun dubbio sulla identità della posizione del NH^2 e dell'OH nell'ammina e nel naftol.

Nel seguito di questa Memoria descriveremo altri derivati di quest'ammina ed il modo di ottenerla per mezzo della nitroso-dimetil-naftalina (3-1-4); per ora ci affrettiamo ad esporre quei risultati dell'ossidazione dell'ammina e del naftol che ne confermano la costituzione sopra indicata.

Ossidazione della dimetil-naftilammina (1-4-3) *e del dimetil-naftol* (1-4-3) *col permanganato potassico.*

Gr. 5 di ammina sospesi in 250 cc. di acqua, in cui sono disciolti gr. 25 di idrato potassico, si scalda a b. m.; vi si aggiunge poco a poco una soluzione calda concentrata di permanganato potassico sinchè il suo colore resta persistente per un'ora; si scolora con un po' d'anidride solforosa e si filtra. Si raccoglie sul filtro l' ossido di manganese formatosi, dal quale poi si estrae l' azo-dimetil-naftalina (3-1-4) proveniente dall'ossidazione di una porzione dell'ammina; l'altra porzione si è mutata in acido ftalico, ossalico, ed acetico, che allo stato di sali sono nel liquido alcalino filtrato, il quale si concentra nel vuoto, si acidifica con acido solforico e si agita più volte con etere che estrae l'acido ftalico insieme agli acidi ossalico ed acetico. Svaporando l'etere, il residuo si secca nel vuoto, eliminando così l'acido acetico; il miscuglio degli acidi ftalico ed ossalico si trasforma in sali di bario e per cristallizzazione dall'acqua bollente si ottiene puro il ftalato baritico, da cui l'acido ftalico, il quale fu riconosciuto per il suo punto di fusione 184°, per la sua trasformazione nell'anidride che rifonde a 128°, per la formazione colla resorcina della ftaleina verde con fluorescenza gialla, e col dietil-amido-meta-fenol della ftaleina rossa con fluorescenza arancio ed anche coll'analisi elementare [1].

Il dimetil-naftol trattato in modo simile dell'ammina diede pure, sebbene in minor quantità, acido ftalico, il quale fu anche riconosciuto per i suoi caratteri e per le sue reazioni caratteristiche coi fenoli.

Questa produzione di acido ftalico tanto dall'ammina, quanto dal naftol conferma le loro formole sopra indicate. Difatto: che i due metili nel dimetil-naftol sieno come nella santonina ed in tutti i suoi derivati in uno degli anelli naftalico in po-

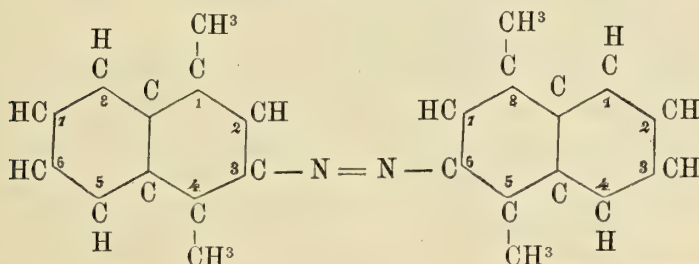
[1] Gr. 0,2316 di acido ftalico (seccato a 100° hanno dato gr. 0,0847 di H^2O e gr. 0,4896 di CO^2.

	calcolato per $C^8 H^6 O^4$	trovato
C	57,83	57,66
H	3,62	4,06

sizione ($\alpha\,\alpha$) è stato già dimostrato dalle esperienze di Gucci e Grassi (1) i quali ottennero dai derivati immediati della santonina l'acido paradimetil-ftalico, da cui il paradimetil-benzol; lo studio poi degli acidi fotosantonici e deidro-fotosantonico (2) aveva, per via invero molto indiretta (3), condotto alla conclusione che l'OH nel naftol e perciò l'NH^2 nella corrispondente ammina sieno nello stesso anello in cui sono i due metili; ciò ora però viene dimostrato nel modo più diretto dal fatto che in questo anello si porta l'ossidazione producendosi acido ftalico.

Se l'OH e l'NH^2 fossero nell'altro anello, l' ossidazione avrebbe dovuto dare l'acido dimetil-ftalico, come avviene nella ossidazione delle iposantonine nelle quali l'anello coi due metili resiste all'ossidazione (4) non contenendo nè OH, nè NH^2, nè idrogeno aggiunto.

Azo-dimetil-naftalina $(3\text{-}1\text{-}4)^2$ $C^{24}H^{22}N^2$

```
        H     CH³                      CH³    H
        C      C                        C     C
             C                             C
  HC  8     1     CH          HC   8     1     CH
   7              2            7              2
  HC  6          3 C — N = N — C 6          3 CH
        5     4                     5     4
             C                             C
        C      C                        C     C
        H     CH³                      CH³    H
```

Quest'azo-derivato proviene dall'ossidazione dell'ammina, e come è stato detto, rimane insieme all'ossido di manganese raccolto sul filtro. Si secca nel vuoto quest'ossido e si tratta con etere sinchè questo solvente passa senza colore. Si concentra per svaporamento la soluzione eterea senza però giungere a secchezza, si raccoglie sul filtro l'azo-derivato e si lava con poco etere freddo. Cristallizza in aghi rosso arancio, è poco solubile a freddo, un po' più a caldo, nell'etere, nell'alcool e nell'acido acetico; fonde a 253° e poi si volatilizza senza alterarsi dando vapori gialli.

La sua composizione corrisponde alla formola $C^{24}H^{22}N^2$ (5).

(1) Gazz. chim. ital., anno XXII, vol. I, pag. 1-55.

(2) Cannizzaro e P. Gucci, Gazz. chim. ital., anno XXXIII, vol. I, pag. 286.

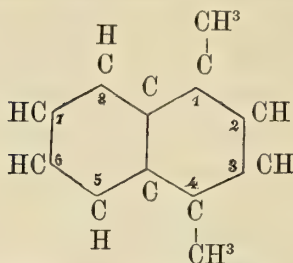
(3) La trasformazione della santonina nelle desmotropo-santonine e quindi negli acidi santonosi, scoverta da A. Andreocci (*Sui quattro acidi santonosi*, Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 452-568) ha poi posto fuor di dubbio che l'OH fenico del naftol è attaccato al carbonio, che nella santonina era allo stato di CO nello stesso anello dimetilato.

(4) Loco citato, pag. 44.

(5) Gr. 0,2033 di azo-composto, seccato a 100°, hanno dato gr. 0,1207 di H^2O e gr. 0,6366 di CO^2. Gr. 0,2115 hanno dato cc. 14,8 di azoto misurato a 8°,4 e 749^{mm}.

	Calcolato per $C^{24}H^{22}N^2$	trovato
C	85,20	85,00
H	6,51	6,59
N	8,29	8,31
	100,00	99,90

Dimetil-naftalina (1-4) $C^{12}H^{12}$

```
        H      CH³
        C       C
            C
  HC  7  8     1   2  CH
  HC  6  5     4   3  CH
            C
        C       C
        H      CH³
```

Avendo ottenuta la dimetil-naftilammina (1-4-3) abbiamo voluto trasformarla nell'idrocarburo corrispondente affine di compararlo, così ottenuto con reazioni blande, con quello che fu preparato, sia per l'azione della polvere di zinco in corrente d'idrogeno sui vapori del dimetil-naftol, dell'acido santonoso e della santonina ([1]), sia dal biidro-dimetil-naftol per eliminazione di acqua mediante il solfuro di fosforo ([2]).

Abbiamo impiegato il seguente metodo:

Si sciolgono 10 parti dell'ammina in 500 di alcool assoluto, e vi si fa passare una corrente di gas acido cloridrico in leggero eccesso. Si tiene raffreddata questa soluzione in un miscuglio di neve e sale, e vi si aggiunge poco a poco agitando il liquido 15 di nitrito sodico, sciolto in 75 di acqua e 75 di alcool, e quindi dopo una mezz'ora 150 di cloruro stannoso sciolto in 250 di alcool assoluto. Incomincia subito un leggero sviluppo gassoso. Si toglie la soluzione dal miscuglio frigorifero e dopo lentamente si riscalda a b. m. sinchè cessa lo sviluppo di azoto, il che avviene pochi minuti dopo che il liquido entra in ebollizione.

Si distilla quindi la più gran parte dell'alcool, che trascina piccolissime quantità di dimetil-naftalina formatasi, e poi si distilla a vapor d'acqua. Nel liquido acquoso distillato una parte d'idrocarburo si depone, e si può separare; l'altra porzione che rimane sospesa si estrae per mezzo dell'etere; quella poi che è distillata coll'alcool si ottiene aggiungendo all'alcool distillato un po' d'acido picrico e ridistillandolo a b. m.; al residuo si aggiunge potassa e col vapor d'acqua distilla l'idrocarburo che era stato ritenuto allo stato di picrato.

Per evitare nella preparazione descritta l'eccesso di acido cloridrico si può convertire il cloridrato dell'ammina puro e secco in diazo-derivato sciogliendone 10 parti in 300 di alcool assoluto saturo di acido nitroso e raffreddato sotto 0°, il prodotto si separa giallo e cristallino, si aggiunge poi poco a poco una soluzione di 150 di cloruro stannoso in 250 di alcool assoluto e si opera come nella preparazione precedentemente descritta. Per quanti tentativi avessimo però fatti, la nostra speranza di convertire tutta l'ammina nell'idrocarburo puro è stata delusa; si forma una maggior, o minor quantità del dimetil-naftol ([3]), che distilla insieme all'idrocarburo; ed il residuo acido della distillazione contiene una notevole quantità dell'ammina, che può riottenersi aggiungendo potassa e distillando in corrente di vapor d'acqua; inoltre all'idrocar-

([1]) Cannizzaro e Carnelutti, Gazz. chim. ital., anno XII, pag. 410.

([2]) Cannizzaro, Gazz. chim. ital., anno XIII, pag. 393.

([3]) Diminuendo la quantità dell'acqua che si adopera per disciogliere il nitrito, diminuisce la quantità di questo naftol.

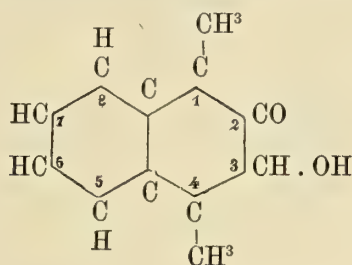
buro è mista spesso una piccola quantità di prodotto clorurato, probabilmente mono-cloro-dimetil-naftalina proveniente dall'azione dell' acido cloridrico sul diazo-composto (1). Perciò la dimetil-naftalina, ottenuta nel modo sopra indicato, si è dovuta depurare agitandola sciolta nell'etere prima con una soluzione acquosa d'idrato potassico più volte, sinchè questa non dia più indizio di avere assorbito naftol (2), quindi con acido solforico diluito e più volte con acqua; privandola poi dall'etere collo svaporamento e dall'acqua col cloruro di calcio fuso e distillandola infine più volte sul sodio.

Dopo averla così depurata ne abbiamo trasformato una porzione in picrato, che abbiamo frazionato per cristallizzazioni dall'alcool ed abbiamo dalle varie porzioni riottenuto varie porzioni d'idrocarburo (3) le quali mostrano caratteri identici, ed eliminato così qualsiasi dubbio sulla loro omogeneità.

La dimetil-naftalina 1-4 così ottenuta è un liquido incolore, più pesante dell'acqua; bolle a 262°,5 a 263° sotto la pressione di 742^{mm}. La sua composizione centesimale (4) e la densità del suo vapore (5) determinata col metodo di Meyer riscaldando coi vapori della difenilammina, corrispondono alla formola $C^{12}H^{12}$.

La paradimetil-naftalina (1-4) diluita in un egual volume d'alcool dà con soluzione cloridrica e concentrata d'acido picrico un *picrato* caratteristico, che si separa dalla soluzione alcoolica in massima parte, si depura lavandolo con poco alcool e spremendolo fra carte. Forma lunghi aghi giallo-arancio, fonde tra 139° e 141°, è poco solubile nell'alcool freddo, nell'acqua calda si scioglie e si scompone gradatamente. Contiene una molecola d'acido picrico per una d'idrocarburo (6).

Ossi-dimetil-naftol (2-1-4-3) $C^{12}H^{12}O^2$.

```
        H       CH3
        C        C
   HC 7   8  C  1   2 CO
   HC 6   5  C  4   3 CH.OH
        C        C
        H       CH3
```

(1) Può evitarsi la formazione di questo prodotto clorurato impiegando, invece dell'acido cloridrico, l'acido nitroso sciolto nell'alcool assoluto.

(2) Quando la soluzione acquosa di potassa assorbe anche piccole quantità del nostro dimetil-naftol acquista una florescenza azzurra caratteristica.

(3) Il miglior metodo per decomporre il picrato è di discioglierlo nell'acqua, aggiungere potassa e distillare l'idrocarburo in corrente di vapor d'acqua.

(4) Gr. 0,2860 d'idrocarburo hanno dato gr. 0,9671 di CO^2 e gr. 0,1994 di H^2O.

	calcolato per $C^{12}H^{12}$	trovato
C	92,31	92,22
H	7,69	7,74

(5) Gr. 0,10135 d'idrocarburo hanno spostato cc. 14,8 di aria misurata a 9°,3 e 734^{mm},4.
Gr. 0,0751 » » » » 11,2 » » 9°,5 e 743^{mm},7.
Densità riferita all'H = 1: calcolata 78; trovata 82,8 — 80,3.

(6) Gr. 0,3003 di picrato hanno dato cc. 27,5 di azoto misurato a 10° e 758^{mm}.

	calcolato per $C^{12}H^{12}$, $C^6H^3N^3O^7$	trovato
N	10,91	10,94

Abbiamo ripreso lo studio di quel singolare ed importante prodotto che Cannizzaro e Carnelutti ottennero ossidando il dimetil-naftol coll'acido cromico (1) e che chiamarono, come lo chiameremo ora, *ossi-dimetil-naftol* per la facilità colla quale perde l'atomo di ossigeno aggiunto ridando il naftol.

L'abbiamo ripreparato nel modo seguente:

Gr. 4 del dimetil-naftol si disciolgono in 150 cc. di acido acetico al 95 % e vi si aggiunge, poco a poco agitando ogni volta, gr. 11 di anidride cromica in 150 cc. di acido acetico al 95 % (2). Dopo circa 36 ore si distilla l'acido acetico a b. m. a pressione ridotta, al residuo si aggiunge acqua e si estrae con etere; la soluzione eterea decantata si agita con una soluzione acquosa di carbonato sodico per eliminare l'acido acetico, si evapora, il residuo si riprende con un miscuglio di etere e ligroina che scioglie l'ossi-naftol e lascia indietro le impurezze. Svaporando la soluzione cristallizza l'ossi-naftol, che si depura cristallizzandolo dall'etere e dalla ligroina, o dall'etere acetico. Si ottiene in bei prismi duri del sistema triclino (3); è solubile

(1) Gazz. chim. ital., anno XII, pag. 408.

(2) Se l'anidride cromica contiene acido solforico giova aggiungere alla soluzione acetica un po' di bicromato in polvere.

(3) Trascriviamo la determinazione cristallografica fattane dal dott. Luigi Brugnatelli, assistente nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Roma.

Sistema cristallino: Triclino

a : **b** : **c** = 0,8797 : 1 : 0,7877 A = 90°,18′; B = 98°,22′; C = 54°,31

Forme osservate: $\{100\}$, $\{001\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{011\}$, $\{11\bar{1}\}$.

I cristalli, ottenuti dall'etere acetico, sono di color leggermente giallognolo, trasparenti, dotati di lucentezza vitrea. Talvolta sono tabulari secondo $\{100\}$, fig. 1ª, o secondo $\{001\}$; altre volte sono prismatici secondo [001], fig. 2ª.

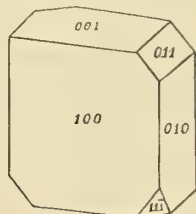
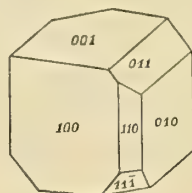



Fig 1ª Fig. 2ª

	Val. osserv.	Val. calc.
(100) : (001)	79°,56′	*
$(100) : (0\bar{1}0)$	54, 8	*
$(001) : (0\bar{1}0)$	84, 22	*
$(0\bar{1}0) : (\bar{1}\bar{1}1)$	71, 36	*
$(\bar{1}00) : (\bar{1}\bar{1}1)$	73, 46	*
(100) : (110)	55, 12	55°,13′
(001) : (110)	83, 52	84, 2
(001) : (011)	46, 34	46, 26
$(001) : (\bar{1}\bar{1}1)$	46, 7	46, 10
(010) : (011)	49, 10	49, 12
$(\bar{1}00) : (011)$	72, 51	72, 56
$(110) : (11\bar{1})$	49, 43	49, 48

Sfaldatura perfetta secondo $\{001\}$

Dalle lamine di sfaldatura esce uno degli assi ottici ed al bordo del campo visivo la biset-

un po' nell'acqua bollente, molto nell'etere, nella ligroina, nell'alcool, nell'etere acetico, nel benzol e nel cloroformio; fonde a 104-105°, a temperatura più alta distilla inalterato. In soluzione nel cloroformio non ha azione sulla luce polarizzata.

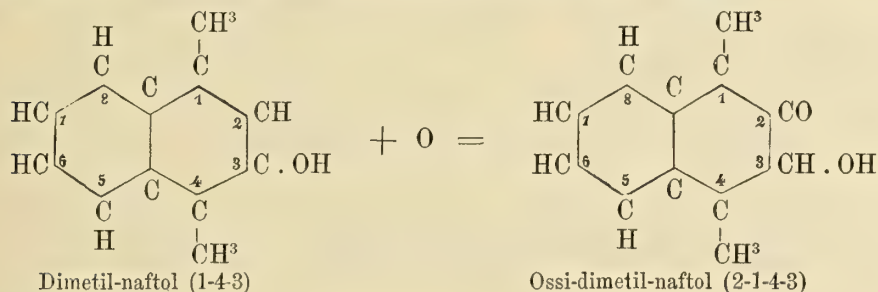
L'analisi elementare [1] e la determinazione del peso molecolare [2] col metodo crioscopico in soluzione benzolica confermano la formula $C^{12} H^{12} O^2$ già assegnata a questa sostanza da Cannizzaro e Carnelutti [3]; cioè essa contiene un atomo d'ossigeno in più del dimetil-naftol.

Colla fenilidrazina e coll' idrossilammina dà composti (monossima e monidrazone) che descriveremo in seguito, i quali dimostrano l'esistenza di un CO cetonico; non contiene ossidrile fenico, non disciogliendosi nella potassa, la cui azione prolungata l'altera notevolmente, annerendola; contiene invece un ossidrile alcoolico secondario dimostrato da tutto il suo comportamento ed anche dal prodotto vischioso che dà scaldato coll'anidride acetica ed acetato sodico fuso, il quale prodotto non ostante non si sia potuto depurare ed analizzare si comporta come l'acetil-derivato ridando colla potassa il composto primitivo [4].

Assegniamo dunque a questo singolare prodotto la genesi e la formola di struttura seguenti, le quali sono anche confermate da ciò che esporremo man mano:

H, C, C, CH^3, C; HC (7), HC (6), C (8), C (5), 1, 2 CH, 3 C . OH, 4, C, C, H, CH^3 + O = H, C, C, CH^3, C; HC (7), HC (6), 8, 5, 1, 2 CO, 3 CH . OH, 4, C, C, H, CH^3

Dimetil-naftol (1-4-3) — Ossi-dimetil-naftol (2-1-4-3)

---

trice acuta. Sopra {100} una direzione di estinzione fa con [Z] è nel senso da +[Z] a +[Y] un angolo di circa 22° (luce bianca). Dispersione degli assi ottici fortissima $\varrho < v$. Doppia rifrazione negativa estremamente energica.

[1] Gr. 0,1991 di ossi-dimetil-naftol da noi ripreparato, seccato nel vuoto, hanno dato gr. 0,5564 di CO^2 e gr. 0,1150 di H^2O.

	calcolato per $C^{12} H^{12} O^2$	trovato
C	76,59	76,22
H	6,38	6,41

Questi dati concordano perfettamente con i seguenti ottenuti da Cannizzaro e Carnelutti analizzando l'ossi-naftol da loro preparato (Gazz. chim. ital., XII, 409):

	I	III	III
C	76,45	76,07	76,59
H	6,67	6,45	6,63

[2] La grandezza molecolare dell'ossi-dimetil-naftol risulta dai seguenti valori:

Concentrazione	Abbassamento osservato	Coefficiente d'abbassamento	Abbassamento molecolare	Peso molecolare (calcolato 188)
0, 965	0,°275	0°,285	53, 58	172
1, 958	0, 520	0, 265	49, 82	185
5, 535	1, 205	0, 217	40. 79	225

[3] Loco citato.

[4] Non si è riuscito a sostituire l'idrogeno dell'ossidrile con radicali alchilici.

L'ossi-dimetil-naftol scaldato con acido iodidrico e fosforo rosso ridà il dimetil-naftol da cui provenne [1]. La medesima riduzione si fa più elegantemente scaldando per pochi minuti l'ossi-dimetil-naftol sciolto nell'alcool con cloruro stannoso, stagno e poco acido cloridrico; per aggiunta di acqua si precipita il dimetil-naftol, che si depura facilmente. Se ne è riconosciuta l'identità non solo dai suoi caratteri, ma anche da quelli del suo etere metilico.

Probabilmente la riduzione avviene nel modo indicato dal seguente schema:

Ossi-dimetil-naftol (2-1-4-3) (CO, CH . OH; CH^3 in 1 e 4) $+ H^2 =$ Composto intermedio instabile (CH . OH, CH . OH; CH^3 in 1 e 4) $- H^2O =$

Dimetil-naftol (CH, C . OH; CH^3 in 1 e 4) oppure (CH . OH, CH; CH^3 in 1 e 4)

(1-4-3) (1-4-2)

Come è facile vedere è indifferente che l'acqua eliminata provenga dall'uno, o dall'altro OH del composto labile intermedio, essendo in questo caso del tutto equivalenti le posizioni 2-3.

La trasformazione del nucleo aliciclico del tipo della dimetil-naftalina biidrogenata (2-3, o $\beta\beta$) in un nucleo aromatico avvenuta nella reazione sopra indicata, è un fatto che si ripete sovente nei derivati della santonina, mercè l'eliminazione sia di H^2O, sia di NH^3, sia di HCl. Così nella santonammina i due atomi di carbonio 2-3 del nucleo a tipo biidrogenato $\begin{matrix} \diagdown \\ (2)\ CH^2 \\ | \\ (3)\ CH\ .\ NH^2 \\ \diagup \end{matrix}$ perdono spontaneamente NH^3 divenendo $\begin{matrix} \diagdown \\ (2)\ CH \\ \| \\ (3)\ CH \\ \diagup \end{matrix}$ e formando così il nucleo aromatico della iposantonina [2]. Così anche

[1] Cannizzaro e Carnelutti, Gazz. chim. ital., anno XII, pag. 410.

[2] Gucci e Grassi, Gazz. chim. ital., anno XXII, vol. I, pag. 5.

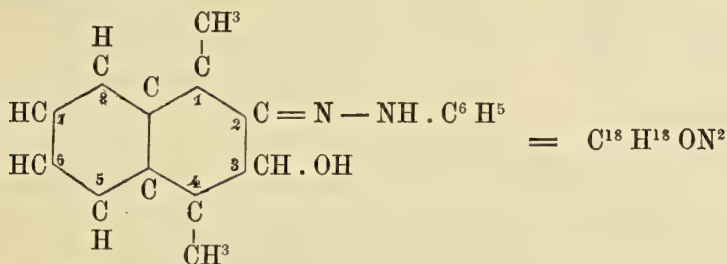
la coppia dei due carboni 2-3 $\begin{array}{l} \diagdown \\ {}^{(2)}\,C = N\,.\,OH \\ \;| \\ {}^{(3)}\,CH\,.\,OH \\ \diagup \end{array}$ dell'ossima dell'ossi-dimetil-naftol diviene, come vedremo tra poco, per eliminazione d'acqua $\begin{array}{l} \diagdown \\ {}^{(2)}\,C\,.\,NO \\ \;\| \\ {}^{(3)}\,CH \\ \diagup \end{array}$, formando la nitroso-dimetil-naftalina.

Probabilmente anche a questo genere di reazioni deve attribuirsi la trasformazione della santonina in desmotropo-santonina; i due carboni $\begin{array}{l} \diagdown \\ {}^{(2)}\,CH^2 \\ \;| \\ {}^{(3)}\,CO \\ \diagup \end{array}$ + HCl divengono $\begin{array}{l} \diagdown \\ {}^{(2)}\,CH^2 \\ \;| \\ {}^{(3)}\,C{<}^{Cl}_{OH} \\ \diagup \end{array}$ e perdendo HCl $\begin{array}{l} \diagdown \\ {}^{(2)}\,CH \\ \;\| \\ {}^{(3)}\,C\,.\,OH \\ \diagup \end{array}$ [1].

Idrazone dell'ossi-dimetil-naftol.

Si sciolgono 1 di ossi-dimetil-naftol in 10 di acido acetico conc. e poi si diluisce la soluzione con 20 di acqua. A questa soluzione si aggiungono 0,6 di fenilidrazina sciolta in 14 di acido acetico al 45 %; si riscalda a b. m. per mezz'ora circa. Il prodotto della reazione si depone come un'olio rosso, che si solidifica per raffreddamento dopo circa 12 ore. Il rendimento è teoretico. Si purifica facilmente cristallizzandolo da un miscuglio d'etere e ligroina.

Si presenta in lunghi aghi color rosso-arancio intenso con lucentezza setacea, fonde 83-84° ed è molto solubile nell'etere. L'azoto corrisponde alla seguente formola del monidrazone [2]:

$$\begin{array}{c} \text{H} \quad\quad \text{CH}^3 \\ \text{C} \quad \text{C} \quad \text{C} \\ \text{HC}_7 \;\; {}_8 \;\; \;\; {}_1 \;\; {}_2\text{C} = \text{N} - \text{NH}\,.\,\text{C}^6\,\text{H}^5 \\ \text{HC}_6 \;\; {}_5 \;\; \;\; {}_4 \;\; {}_3\text{CH}\,.\,\text{OH} \\ \text{C} \quad \text{C} \quad \text{C} \\ \text{H} \quad\quad \text{CH}^3 \end{array} \quad = \quad C^{18}\,H^{18}\,ON^2$$

Abbiamo anche fatto reagire un eccesso di fenilidrazina, ma sempre si è for-

[1] Andreocci, Gazz. chim. ital., anno XXV, vol. I, pag. 470.

[2] Gr. 0,1800 d'idrazone (seccato nel vuoto) hanno dato cc. 16,5 di azoto misurato a 741^{mm} e 8°,2.

	calcolato per $C^{18}\,H^{18}\,ON^2$	trovato
C	10,07	10,78

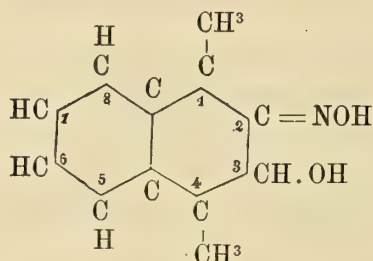
mato il solo mono-idrazone; perciò si può concludere che l'ossi-dimetil-naftol contiene un solo CO.

Ossima dell'ossi-dimetil-naftol.

Si sciolgono 1 di ossi-dimetil-naftol in 50 d'alcool al 90 % e si diluisce con altrettanta acqua. Se occorre si raffredda mantenendo fra 12 e 16 gradi (¹) la soluzione idroalcoolica, alla quale si aggiunge in più volte 3 di cloridrato d'idrosilammina e nello stesso tempo una quantità equivalente di carbonato potassico sciolto in acqua, curando che la soluzione abbia sempre reazione quasi neutra o leggermente acida. Dopo ventiquattro ore si deposita quasi tutta l'ossima in laminette lucenti, in peso non inferiore all'ossi-dimetil-naftol impiegato. Nelle acqui madri si rinviene del dimetil-naftol, proveniente dall'azione riducente dell'idrosilammina sull'ossi-dimetil-naftol (²).

L'ossima si purifica facilmente ricristallizzandola dall'etere bollente. Si presenta in piccoli prismi riuniti a cespugli solubili nell'etere a caldo e poco a freddo. Scaldata rapidissimamente fonde a 175° decomponendosi, scaldata però lentamente si decompone prima di fondere.

La quantità d'azoto che contiene corrisponde alla formola seguente della monoossima (³):

```
         H      CH³
                 |
         C       C
       8    C   1
HC  7                2  C = NOH
HC  6                3  CH.OH
       5    C   4
         C       C
         H       |
                CH³
```

Si ottiene un *mono-acetil-derivato* di quest'ossima sciogliendola con leggero riscaldamento nell'anidride acetica evaporando nel vuoto (⁴) in presenza di calce o potassa l'eccesso d'anidride e cristallizzando il residuo nell'etere anidro. Si ottiene così cristallizzato bianco; fonde costantemente fra 112° e 113°; è solubile nell etere, nel benzol, e nell'acido acetico, nel quale ultimo però si viene trasformando colorandosi in verde, come diremo.

(¹) Conviene evitare il riscaldamento, che fa immediatamente produrre una materia bruna, vischiosa.

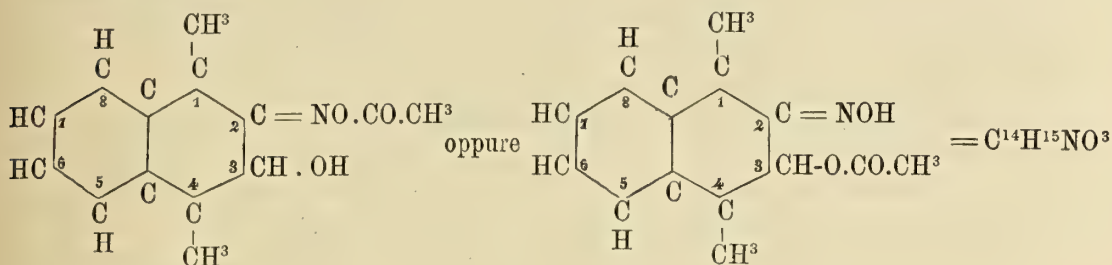
(²) Il dimetil-naftol si può riottenere distillando le acque madri in corrente di vapore, dopo aver eliminato l'alcool per distillazione in presenza di potassa caustica che poi viene saturata coll'anidride carbonica. Il dimetil-naftol fu identificato coll'esame delle sue proprietà e di quelle del suo etere metilico.

(³) Gr. 0,1996 di ossima (seccato a 100°) hanno dato cc. 12 di azoto misurato a 17°,6 e 743^{mm},8.

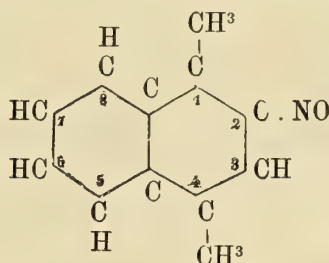
	calcolato per $C^{12} H^{13} NO^2$	trovato
N	6,90	6,81

(⁴) Se invece si allontana l'anidride acetica per distillazione si ottiene un prodotto bruno inquinato da materie gommose.

Ricristallizzato dal benzol e seccato a 100° fonde invece a 116-117° ed ha dato all'analisi (1) ed alla determinazione criscopica del peso molecolare in soluzione acetica (2) risultati abbastanza concordanti colla formola di una mono-acetil-ossima (2-1-4) oppure (3-1-4)

(naftalina: 1-C.CH3; 2-C = NO.CO.CH^3; 3-CH.OH; 4-C.CH^3) oppure (naftalina: 1-C.CH^3; 2-C = NOH; 3-CH-O.CO.CH^3; 4-C.CH^3) $= C^{14}H^{15}NO^3$

L'ossima dell'ossi-dimetil-naftol ed anche il suo derivato acetilico sciolto in acido acetico diluito lentamente si colorano in verde e si trasformano nella nitroso-dimetil-naftalina 2-1-4 che ora descriveremo.

Nitroso-dimetil-naftalina (2-1-4).

(naftalina: 1-C.CH^3; 2-C . NO; 3-CH; 4-C.CH^3)

Disciogliendo a freddo l'ossima dell'ossi-dimetil-naftol (2-1-4) nell'acido acetico al 90 % si ottiene una soluzione sulle prime quasi incolora, che man mano si co-

(1) Gr. 0,2587 di acetil-ossima hanno dato gr. 0,6536 di CO^2 e gr. 0,1448 di H^2O.
» 0,2848 » » cc. 13,8 di azoto misurato a 24° e 756mm,5.

	calcolato per $C^{14}H^{15}NO^3$	trovato
C	68,57	68,90
H	6,12	6,21
N	5,71	5,41

È indispensabile seccare l'acetil-ossima a 100°, perchè semplicemente col vuoto non si riesce a liberarla dal solvente.

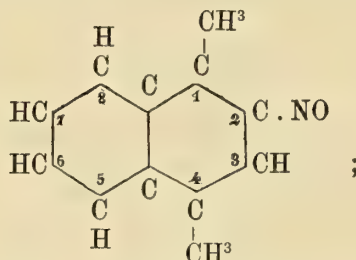
(2) La grandezza molecolare dell'acetil-ossima, se determinata in acido acetico non appena fatta la soluzione, dà valori che corrispondono per un mono acetil-derivato dell'ossima; mentre determinata dopo qualche tempo si ottiene un peso molecolare più piccolo, perchè l'acetil-ossima anche in seno all'acido acetico glaciale si va dissociando lentamente in acido acetico e nitroso-dimetil-naftalina che colora la soluzione in verde; ciò risulta dai seguenti dati forniti da una soluzione contenente il 4,33 per 100 del suddetto derivato acetilico:

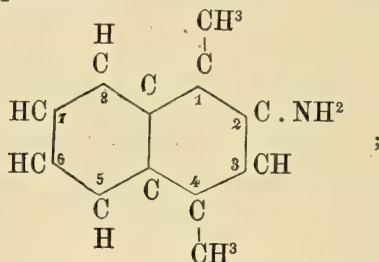
	subito	dopo 18 ore
Abbassamento osservato	0°,65;	0°,84.
Coefficiente d'abbassamento	0°,1501;	0°,1938
Peso molecolare (teoretico 245)	260;	201.

lora in verde sempre più intenso; dopo ventiquattro ore per aggiunta d'acqua si precipita un composto verde cristallizzato in lunghi aghi sottilissimi di color verde chiaro. Si ottiene più rapidamente e ben cristallizzato per raffreddamento di una soluzione satura di ossima fatta nell'acido acetico al 90 per °/₀ riscaldato a 50°; con più lentezza invece si può ottenere dalla soluzione acetica dell'acetil-ossima. Anche gli acidi cloridrico e solforico convertono l'ossima nella sostanza verde, ma il loro impiego non è da consigliarsi perchè non dànno un prodotto puro.

Il suddetto composto verde si purifica cristallizzandolo dall'etere per evaporamento alla temperatura ordinaria, o meglio nel vuoto secco. Si presenta in lunghi aghi d'un bel verde con lucentezza di raso, è solubilissimo nel benzol, nell' etere, nella ligroina, nell'alcool ed è quasi insolubile nell'acqua. Fonde fra 99° e 100° in un liquido verde carico che volge al rosso-bruno divenendo una massa solida di tal colore.

All'analisi [1] ed alla determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico in soluzione benzolica [2] dà risultati concordanti colla formola $C^{12}H^{11}NO$, corrispondente ad una nitroso-dimetil-naftalina, la quale ha tutti i caratteri e le reazioni dei nitroso-composti col gruppo NO attaccato al nucleo aromatico, rappresentato dalla seguente formola:

H CH³
C C
C
HC 7 8 1 2 C . NO
HC 6 5 4 3 CH ;
C
C C
H CH³

Infatti: 1° ridotto a freddo in soluzione acetica con polvere di zinco si trasforma nell'amido-composto corrispondente:

H CH³
C C
C
HC 7 8 1 2 C . NH²
HC 6 5 4 3 CH ;
C
C C
H CH³

(1) Gr. 0,2836 di composto verde, seccato nel vuoto, hanno dato gr. 0,8102 di CO^2 e gr. 0,1585 di H^2O.

Gr. 0,2287 hanno dato cc. 15 di azoto, misurato a 19° e 761^mm^.

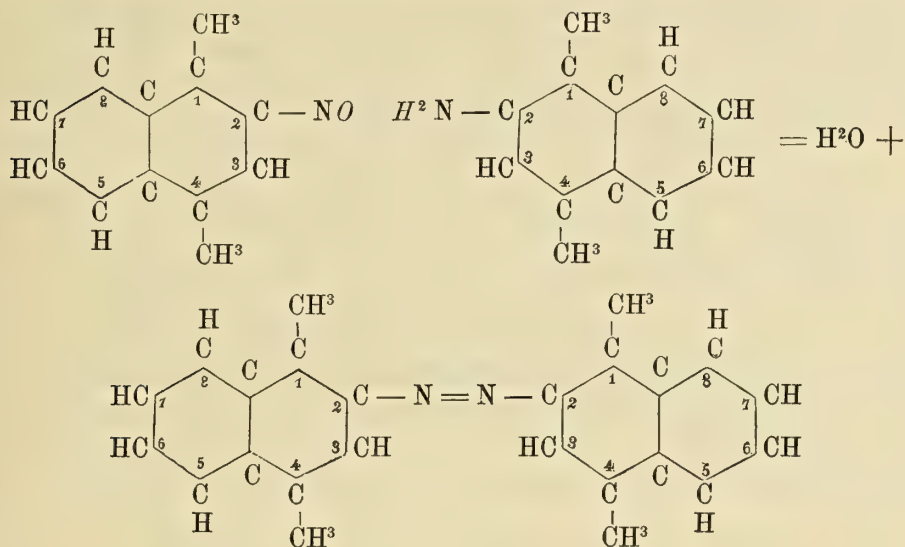
	calcolato per $C^{12}H^{11}NO$	trovato
C	77,84	77,91
H	5,95	6,20
N	7,56	7,55

(2) Determinazione crioscopica del suddetto composto verde

Concentrazione	3,647
Abbassamento osservato	0°,95
Coefficiente d'abbassamento	0°,2605
Peso molecolare (teoretico 185)	188

cio è nella dimetil-naftilammina identica (1) a quella proveniente dal dimetil-naftol (1-4-3); 2° riscaldata in soluzione alcoolica con una quantità equimolecolare di dimetil-naftilammina dà l'azo-dimetil-naftalina (2-1-4)² secondo l'equazione seguente:

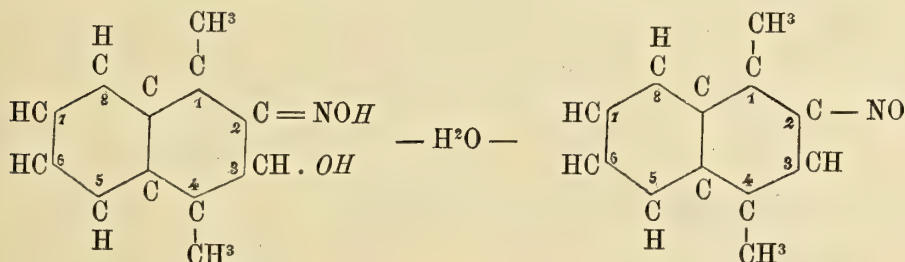
```
       H    CH3                      CH3     H
       C     C                        C      C
          C                              C
 HC          C — NO       H2N — C                CH    = H2O +
 HC          CH              HC                  CH
          C                              C
       C     C                        C      C
       H    CH3                      CH3     H

       H    CH3                      CH3     H
       C     C                        C      C
          C                              C
 HC          C — N = N — C                  CH
 HC          CH          HC                 CH
          C                              C
       C     C                        C      C
       H    CH3                      CH3     H
```

Se ne forma anche però una porzione nella riduzione del nitroso-derivato.

L'azo-dimetil-naftalina sopra indicata è identica a quella (3-1-4)² che si forma insieme all'acido ftalico nell'ossidazione della dimetil-naftilammina (1-4-3) col permanganato potassico.

Queste reazioni, che provano evidentemente la presenza del gruppo NO nel composto verde, sono altresì d'accordo colla struttura da noi assegnata all'ossi-dimetil-naftol, perchè se il gruppo CO in esso contenuto non fosse nella posizione 2 vicino al gruppo CH . OH (posizione 3) avremo dovuto ottenere invece per riduzione del nitroso composto un'ammina ed un azo-composto isomeri, ma non identici a quelli derivanti dalla sostituzione del OH del dimetil-naftol (1-4-3).

La nitroso-dimetil-naftalina proviene dunque dall'ossima per eliminazione d'acqua, nel modo indicato dal seguente schema:

```
       H    CH3                           H    CH3
       C     C                            C     C
          C                                  C
 HC          C = NOH                HC          C — NO
 HC          CH . OH    — H2O —     HC          CH
          C                                  C
       C     C                            C     C
       H    CH3                           H    CH3
```

(1) Ne abbiamo verificato l'identità esaminando i caratteri della base libera e del suo composto-acetilico e trasformandola coll'acido nitroso nel dimetil-naftol.

Bis-nitroso-dimetil-naftalina $C^{24} H^{22} N^2 O^2$.

Come abbiamo accennato la nitroso-dimetil-naftalina per riscaldamento dopo la fusione si trasforma in una massa rosso bruna. In tale massa è contenuta in quantità predominante la sostanza che descriveremo, la quale si può estrarre e depurare per cristallizzazione frazionata dall'alcool e dall'etere.

Si riesce meglio ad ottenerla nel modo seguente:

1 grammo di nitroso-dimetil-naftalina si scioglie a freddo nella quantità necessaria di alcool a 99°; vi si aggiunge 2 cc. di una soluzione alcoolica di potassa; il colore della soluzione da verde si va mutando in giallo ed in arancio e si vien formando un precipitato rosso-arancio che si raccoglie dopo 12 ore. Si lava con alcool e con acqua e per cristallizzazione frazionata dall'alcool bollente si separa la bis-nitroso-dimetil-naftalina da un'altra materia gialla che rimane nelle acque madri (1).

La bis-nitroso-dimetil-naftalina cristallizza in aghi lucenti di color arancio, fonde, senza apparente alterazione, a 174-175° in un liquido rosso, è solubile più a caldo che a freddo nell'alcool, nell'etere, nel benzol e nell'acido acetico, è quasi insolubile nell'acqua.

Ha la medesima composizione elementare della nitroso-dimetil-naftalina da cui deriva (2), ma ha un peso molecolare doppio determinato col metodo ebulliscopico in soluzione benzolica (3). Le abbiamo dunque assegnato la formola doppia $C^{24} H^{22} N^2 O^2$ e la chiameremo perciò *bis-nitroso-dimetil-naftalina* sinchè non potremo dimostrarne la struttura.

Essa dà bollita con grande eccesso d'anidride acetica un *composto mono-acetilico*; il quale si depura per ripetute cristallizzazioni dall'alcool; è una polvere cristallina

(1) La materia gialla cristallizza in laminette giallo d'oro, fusibili a 205°, poco solubili nell'etere. Dall'analisi sembra che essa derivi dalla nitroso-dimetil-naftalina per eliminazione di acqua; però ci riserbiamo di pronunciarci sulla sua composizione quando potremo essere sicuri della sua purezza; poichè dubitiamo che essa sia un miscuglio di due sostanze molto rassomiglianti nei loro caratteri fisici.

(2) Gr. 0,2176 di bis-nitroso-composto (seccato 100°) hanno dato gr. 0,6200 di CO^2 e gr. 0,1245 di H^2O.

Gr. 0,3066 di bis-nitroso-composto (seccato a 100°) hanno dato cc. 20,8 di azoto misurato a 24° e 758^{mm},3.

	calcolato per $C^{24} H^{22} N^2 O^2$	trovato
C	77,84	77,70
H	5,95	6,35
N	7,56	7,58

(3) Determinazione ebulliscopica del bis-nitroso-composto:

	I	II
Concentrazione	1,52	3,96
Innalzamento del punto d'ebollizione	0°,10	0°,272
Coefficiente d'innalzamento	0,0658	0,0687
Peso molecolare (teoretico 370)	406	388

bianca che ingiallisce alla luce anche diffusa, fonde a 182° ed è solubile nell'acido acetico e nell'alcool. All'analisi (1) ha dato risultati concordanti colla formola

$$C^{26} H^{24} N^2 O^3 = C^{24} H^{21} N^2 O^2 , C^2 H^3 O.$$

Questo mono-acetil-derivato conferma la formola doppia, della bis-nitroso-dimetil-naftalina, dedotta col metodo ebulliscopico, e dimostra che nella condensazione di due molecole di nitroso-dimetil-naftalina si è formato un ossidrile.

La bis-nitroso-dimetil-naftalina si trasforma in una sostanza bianca per azione dell'idrato potassico nelle condizioni seguenti:

Si riscalda la soluzione, in alcool assoluto, di p. 1 di bis-nitroso-composto e 3 di potassa, sinchè il colore passa da un arancio ad un giallo-chiaro persistente; quindi si elimina l'alcali coll'anidride carbonica, si svapora l'alcool, si lava il residuo con etere e si cristallizza più volte dall'alcool.

La nuova sostanza cristallizza in mammelloni bianchi, che si alterano a 180° prima di fondere. All'analisi (2) dà risultati che corrispondono alla formola $C^{24} H^{20} N^2O$, il che dimostra come essa derivi dalla bis-nitroso-naftalina per eliminazione di una molecola d'acqua.

Riprenderemo lo studio della bis-nitroso-dimetil-naftalina e dei suoi derivati per interpretrarne la struttura.

(1) Gr. 0,2336 d'acetil-composto hanno dato gr. 0,6499 di CO^2 e gr. 0,1225 di H^2O.
» 0,3036 » » cc. 18,5 di azoto misurato a 22° e 755^{mm}.

	calcolato per $C^{26} H^{24} N^2 O^3$	trovato
C	75,73	75,85
H	5,82	5,82
N	6,79	6,85

(2) Gr. 0,2119 di sostanza bianca hanno dato gr. 0,6381 di CO^2 e 0,10965 di H^2O.
» 0,2012 » » cc. di azoto 13,2 misurati a 16°,6 e 741^{mm},7.

	calcolato per $C^{24} H^{20} N^2O$	trovato
C	81,82	82,12
H	5,68	5,75
N	7,95	7,44

RELAZIONE

letta dal Socio G. Ferraris, a nome anche del Corrispondente G. B. Favero, relatore, nella seduta del 12 aprile 1896, sulla Memoria dell'ing. N. Nicoli, intitolata: *Sull' efflusso dei fluidi e specialmente dei liquidi sopr ariscaldati sotto forti pressioni.*

« Nelle ricerche sull' efflusso dei fluidi aeriformi sogliono considerarsi, oltre la pressione nell' interno del vaso e quella nell' ambiente esterno, anche la pressione speciale che ha luogo nell' orificio stesso di efflusso. Si cominciò dall' ammettere senz' altro che la pressione nell' orificio eguagliasse sempre quella dell' ambiente esterno, e si stabilirono in tale ipotesi le formole teoriche di efflusso. Ma già fino dal 1840 (circa) il Coriolis notò in certi casi una discordanza delle formole coll' osservazione, ed i sigg. Barré de Saint Venant e Wantzel osservarono che le formole per l' efflusso dell'aria non si accordavano coi risultati esperimentali, senonchè nel caso che il rapporto fra la pressione esterna e la interna fosse superiore od eguale ad 1:2 circa; ma se ne allontanavano in modo da rendere il loro uso inservibile, quando quel rapporto fosse sensibilmente inferiore. I sigg. De Saint Venant e Wantzel proposero anzi per questo caso una formola empirica. Il concetto di tener buona la formola teorica fino ad un certo valore del suddetto rapporto fra pressione esterna ed interna, e sostituirvi una formola empirica oltre quel valore, fu poi ulteriormente precisato, e venne indicato come la regola (il principio) di De Saint Venant e Wantzel. Si riconobbe poi che essa valeva non solamente per l' aria atmosferica, ma si estendeva anche agli altri gas ed ai vapori, come fu confermato anche dalle esperienze di Zeuner. Quanto all' efflusso dei liquidi soprariscaldati, come per es. dell' acqua da una caldaja a vapore in pressione, lo Zeuner ritenne che la pressione nell' orificio fosse eguale alla pressione esterna, e stabilì in questa ipotesi le formole d' efflusso, senza però aver potuto confrontarle coi risultati dell' esperienza.

« L' ing. N. Nicoli avendo misurata la quantità d' acqua soprariscaldata effettivamente effluente nell' atmosfera da una caldaja a vapore sotto diverse pressioni, dalle 4 alle 6 atmosfere, trovò tale quantità da 5 a 10 volte maggiore di quanto danno le formole dello Zeuner, le quali dunque per quelle pressioni sono del tutto inservibili.

L'ing. Nicoli si fece allora ad esaminare se per l'efflusso dei liquidi soprariscaldati non fosse applicabile la regola dei sigg. De Saint Venant e Wantzel; ed ora presenta all'Accademia nell'accennata Memoria il risultato dei suoi studi. Egli arriva alla conclusione che anche l'efflusso dei liquidi soprariscaldati si effettua secondo la regola dei sigg. De Saint Venant e Wantzel. L'andamento del suo lavoro è il seguente:

« Prendendo le mosse dai risultati delle proprie esperienze, egli riassume le nozioni già note sul movimento dei fluidi, e passa quindi ad esporre la regola dei sigg. De Saint Venant e Wantzel. Egli accetta questa regola come puramente empirica, ricorda le molte esperienze che furono eseguite sull'efflusso dei gas e dei vapori, e che la confermarono pienamente; ed accenna pure ai dispareri che si manifestarono intorno ad essa fra scienziati, ed alle discussioni alle quali diede luogo. Passa poi a varie considerazioni che ne giustificano l'estensione ad altri fluidi, fra i quali vogliono comprendersi i miscugli di liquidi coi loro vapori saturi (*nasse Dämpfe* dello Zeuner). Entra quindi a trattare particolarmente dell'acqua soprariscaldata con o senza eccesso di pressione; e riassume le formole fondamentali già sviluppate dallo Zeuner. Quindi alle formole esatte, che si presentano molto complesse, sostituisce una sua formola empirica abbastanza semplice, la quale stabilisce direttamente un legame fra la pressione ed il volume specifico del miscuglio; formola valida per il caso che nello stato iniziale la quantità specifica del vapore sia nulla. Di questa formola egli si serve per trattare la questione dell'efflusso dei liquidi soprariscaldati, sia quando non abbia luogo eccesso di pressione, sia quando un tale eccesso si verifichi. Ma invece di assumere, come fa lo Zeuner, la pressione all'orificio eguale sempre a quella esterna, egli applica la regola di De Saint Venant e Wantzel, cioè egli la assume eguale alla esterna solamente quando il valore di quest'ultima sia eguale o superiore alla pressione che corrisponde al massimo della portata. In tal modo l'autore ottiene dal calcolo una portata di efflusso che bene si accorda con quella osservata, il che giustifica dunque, mediante i risultati dell'esperienza, l'applicazione della regola, fatta al caso dell'efflusso dei liquidi soprariscaldati.

« L'autore aggiunge per ultimo alcune osservazioni circa il valore del *coefficiente di contrazione*, basate sulla considerazione delle quantità di moto; osservazioni che tendono a stabilire il valore di un tale coefficiente, ed i limiti entro i quali esso dev'essere compreso.

« La Commissione osserva che intorno all'efflusso dell'acqua nelle ordinarie condizioni si sono compiute già da celebri idraulici moltissime importanti ricerche teoriche, e si sono eseguiti numerosissimi esperimenti, talchè il problema può dirsi risolto per i casi più comuni della pratica. Invece la conoscenza dell'efflusso dei fluidi aeriformi in genere, e dei liquidi soprariscaldati, sebbene importantissimo, sia dal lato teorico che dal lato pratico, lascia ancora molto a desiderare. Per tali ragioni essa fa buon viso alle ricerche che si rivolgono a questa parte importante dell'idrodinamica; ed attesi gl'interessanti risultati raggiunti dal sig. ing. N. Nicoli, propone che la Memoria da lui presentata sia stampata in esteso negli Atti dell'Accademia ».

Sull' efflusso dei fluidi, e specialmente dei liquidi soprariscaldati, sotto forti pressioni.

Memoria dell' ing. N. NICOLI

R. Ispettore delle strade ferrate.

I.

1. Data una ordinaria caldaia a vapore in pressione, se si apre un orifizio nella parte del suo involucro che è a contatto dell' acqua soprariscaldata, questa effluisce con violenza, passando in parte allo stato di vapore, ed aumentando considerevolmente di volume. La quantità di liquido e di vapore che effluisce nell' unità di tempo è funzione della pressione iniziale, dell' area della luce d' efflusso, del coefficiente di contrazione, e della pressione media che regna nella sezione contratta della vena fluida.

Circa il coefficiente di contrazione nulla ancora si conosce di positivo, per l' acqua soprariscaldata. Quanto alla pressione media che regna nella sezione contratta, a cui noi daremo per brevità il nome di *pressione all' orifizio*, si suole ancora oggidì supporla, per il detto fluido, eguale alla pressione esterna, come se si trattasse di liquidi a temperatura inferiore a quella di ebollizione. Lo stesso Zeuner, che tanto ampiamente svolge il tema dell' efflusso nel secondo volume della *Technische Thermodynamik*, uscito nel 1890, pubblica delle tavole e delle formole teoriche dedotte in tale ipotesi.

Secondo le tavole di Zeuner la quantità di acqua soprariscaldata, che, effluendo da una caldaia a vapore nell' atmosfera, attraversa ogni metro quadrato di sezione dell' orifizio nel minuto secondo, varia pochissimo al variare della pressione in caldaia, mantenendosi sempre di circa 1100 kg.

Avendo però avuto occasione di fare alcune dirette misure di tale quantità, con pressioni in caldaia dalle 4 alle 6 atmosfere, ho invece trovato una portata variabile, da 5 a 10 volte maggiore di quella data da Zeuner. Ciò condanna senz' altro, a mio avviso, l' ipotesi suaccennata.

Le mie esperienze, che non sono state eseguite a scopo scientifico, e che quindi non descriverò nel presente lavoro, mi indussero a studiare il fenomeno. Giunsi così

a trovare che esso può essere spiegato estendendo ai liquidi soprariscaldati il principio di De Saint Venant e Wantzel, che già ricevette compiuta applicazione all' efflusso dei gas e dei vapori.

Ritengo quindi di far cosa utile riassumendo qui brevemente le mie deduzioni, completate con alcune considerazioni sul valore del coefficiente di contrazione.

II.

2. Le equazioni differenziali del moto dei fluidi, che si deducono direttamente dal teorema di D'Alembert, nel caso che il fluido sia sottratto all' azione delle forze esterne e che il moto sia *permanente*, si riducono alle seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} -gv\dfrac{\partial p}{\partial x} = w\dfrac{\partial w}{\partial x} + w_1\dfrac{\partial w}{\partial y} + w_2\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ -gv\dfrac{\partial p}{\partial y} = w\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + w_1\dfrac{\partial w_1}{\partial y} + w_2\dfrac{\partial w_1}{\partial z} \\ -gv\dfrac{\partial p}{\partial z} = w\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + w_1\dfrac{\partial w_2}{\partial y} + w_2\dfrac{\partial w_2}{\partial z} \end{cases}$$

nelle quali p e v sono la pressione ed il volume specifico del fluido nell' elemento di coordinate x, y, z; g la gravità, e w, w_1, w_2, le componenti della velocità parallele rispettivamente agli assi x, y, z.

D' altra parte è manifesto che entro una massa fluida, *dotata di moto permanente*, il luogo geometrico delle traiettorie percorse dalle molecole passanti dentro il contorno di un' area elementare fissa qualunque, forma come un tubo allungato a sezione variabile. Alla massa passante per questo esilissimo tubo daremo il nome di *filo fluido*.

3. Ciò posto, sia AB (fig. 1) l' asse di un filo fluido. Se scegliamo gli assi coordinati in modo che quello delle x sia tangente ad AB in un punto M, per l' elemento di fluido che si trova in M in ogni istante si avrà $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$, e la prima delle equazioni (1) diventerà

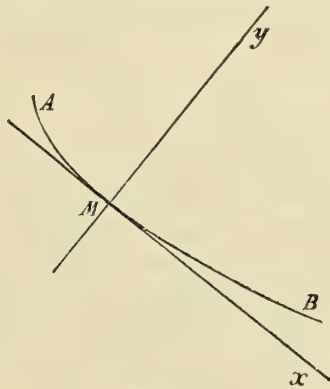



Fig. 1.

$$(2)\qquad -gv\frac{\partial p}{\partial x} = w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Chiamando ds un elemento della curva AB adiacente al punto M, e moltiplicando per ds ambi i membri della (2), abbiamo:

$$-gv\frac{\partial p}{\partial x}ds = w\frac{\partial w}{\partial x}ds.$$

Ma $\frac{\partial p}{\partial x}ds$ e $\frac{\partial w}{\partial x}ds$, essendo l'asse delle x tangente ad AB, sono, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, le variazioni della pressione e della velocità dal principio alla fine dell'elemento ds. Chiamandole semplicemente dp e dw, potremo scrivere

$$-gvdp = wdw \tag{3}$$

che è la solita equazione delle forze vive dei fluidi. Alla stessa equazione possiamo pervenire, *cambiando opportunamente gli assi coordinati*, per qualunque altro elemento del filo fluido AB. Possiamo, quindi, integrandola, ottenere la variazione di velocità da un punto all'altro dello stesso filo. Chiamando p_1 e w_1 la pressione e la velocità del fluido in un determinato punto di AB avremo:

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = -\int_{p_1}^{p} vdp. \tag{4}$$

Supponiamo ora:

A) Che in tutti i punti della massa fluida, nei quali la pressione è p_1, la velocità abbia lo stesso valore w_1;

B) Che le variabili p e v siano legate da una stessa relazione $v = \varphi(p)$ per tutti i fili fluidi.

Quando siano soddisfatte queste due relazioni, la (4) ci dice che il valore di w, nei punti in cui regna una stessa pressione p, è lo stesso per tutti i fili fluidi [1].

4. Ora, quando si tratta dell'efflusso dei fluidi, la condizione A) può ritenersi soddisfatta, perchè entro il recipiente da cui sgorga il fluido alla pressione iniziale p_1 corrisponde, per tutti i fili fluidi, una velocità iniziale nulla $w_1 = 0$, e la (4) si riduce a

$$\frac{w^2}{2g} = -\int_{p_1}^{p} vdp. \tag{5}$$

La condizione B) non è soddisfatta esattamente, ma la è certo approssimativamente in vicinanza dell'orifizio quando questo ha una forma semplice. Infatti allora la rapidità dell'efflusso non permette al fluido di cedere nè ricevere sensibilmente del calore. Inoltre, i singoli elementi della massa fluida, tranne il caso di liquidi molto densi, sono molto scorrevoli gli uni rispetto agli altri, e la differenza di velocità degli elementi che si toccano non dà luogo a notevoli trasformazioni di energia esterna in energia interna, ossia a grandi perdite di forza viva.

Si può adunque ritenere, almeno *in via di approssimazione*, che la massa, in

[1] La relazione (4) si può anche dedurre direttamente da una qualunque delle (1) quando si ammetta l'esistenza di un potenziale della velocità.

vicinanza dell'orifizio, si dilati *adiabaticamente* per tutti i fili fluidi, e che per poter calcolare colla (5) la velocità w in un punto qualunque della massa, basti conoscere il valore della corrispondente pressione p.

5. Le cose fin qui esposte sono già conosciute; ma ho voluto ricordarle per mettere in evidenza che la (4) e la (5) sono una diretta conseguenza delle equazioni generali del moto dei fluidi, e che non si possono rigettare i valori di w da esse ricavati, senza negare il teorema di D'Alembert. — Ciò basta, a mio avviso, per non accettare senz'altro una opinione emessa da un eminente scienziato (Hirn), il quale spiegava certi fenomeni ammettendo che l'aria atmosferica, quando effluisce in un recipiente vuoto, possa acquistare delle velocità di 4000 e più metri per minuto secondo, mentre secondo la formola (5), la velocità dell'aria atmosferica, a temperatura ordinaria, effluente nel vuoto, non può essere maggiore di circa 755 metri. — Dovrò ritornare più innanzi su questa osservazione.

III.

6. Pei liquidi ordinari si suole ammettere che la pressione all'orifizio sia eguale alla pressione esterna. Questa speciale ipotesi è giustificata dall'esperienza, ma non può essere accettata, in qualsiasi circostanza, pei fluidi che si dilatano durante l'efflusso.

Per i gas che si trasformano adiabaticamente si ha la nota relazione:

$$pv^\gamma = p_1 v_1^\gamma \tag{6}$$

la quale, combinata colla (5) ci dà:

$$w = \sqrt{2g \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}. \tag{7}$$

Se chiamiamo ω l'area di un orifizio attraversato dal gas colla velocità w, la portata Π di quell'orifizio resta uguale ad $\omega \frac{w}{v}$, ossia:

$$\Pi = \omega \sqrt{2g \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{v_1}} \times \sqrt{\left(\frac{p}{p^1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}. \tag{8}$$

Da questa formola apparisce subito che quando il gas si versa nel vuoto, la pressione all'orifizio non può essere nulla, perchè se $p = 0$ risulta $\Pi = 0$.

Se facciamo crescere p da 0 a p_1, il valore di Π dato dalla (8) dapprima va crescendo, e poi diminuendo per ritornare eguale a zero quando $p = p_1$. Il valore p' di p che rende massimo Π, si trova eguagliando a zero la prima derivata di Π, dato dalla (8), rispetto a $\frac{p}{p_1}$, e se ne ricava:

$$\frac{p'}{p_1} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0{,}5266\,. \tag{9}$$

Se pei gas si ammettesse, come si fa pei liquidi, l' eguaglianza fra la pressione all' orifizio e la pressione esterna (*esterna*, rispetto allo spazio occupato dal fluido alla pressione iniziale) e se tenendo costante la pressione iniziale p_1, si facesse diminuire gradatamente quella esterna p_2, avverrebbe che quando $p_2 < p'$, la portata Π diminuirebbe al crescere della differenza $p_1 - p_2$.

7. Sembrando inammissibile questa diminuzione della portata al crescere della differenza di pressione in causa della quale avviene l' efflusso, Barrè de Saint Venant e Wantzel fecero alcune esperienze, facendo effluire l' aria atmosferica in una campana, nella quale potevasi fare il vuoto, e pubblicarono nel 1839 una Memoria [1] nella quale esposero il principio che *nell' efflusso dei gas*:

1° *Quando* $\frac{p_2}{p_1} > 0{,}5266$ *la pressione all' orifizio resta eguale alla pressione esterna* p_2;

2° *Quando* $\frac{p_2}{p_1} < 0{,}5266$ *la pressione all' orifizio è eguale a* p' *ossia* $0{,}5266\, p_1$, *qualunque sia il valore di* p_2.

8. Questo principio, totalmente empirico, rimase dimenticato fino al decennio 1860-70, prima del quale nessun altro esperimentatore estese tanto il campo delle proprie investigazioni da poter rilevare una differenza fra la pressione all' orifizio e la pressione esterna. — Per l' aria compressa che si versa nell' atmosfera questa differenza comincia a sussistere, secondo De Saint Venant e Wantzel, colla pressione iniziale di $\frac{1}{0{,}5266} = 1{,}8989$ atmosfere; la quale non fu superata, prima del 1860, che in alcune esperienze eseguite verso il 1855 da Weisbach. Anche questi però elevò soltanto la pressione dell' aria compressa a 2,157 atm. assolute nel caso di luci in parete sottile, cosicchè, secondo De Saint Venant e Wantzel, la pressione all' orifizio sarebbe stata $2{,}157 \times 0{,}5266 = 1{,}136$ atm., non superante che di 0,136 atm., la pressione atmosferica. Weisbach non avrebbe potuto, nel misurare la portata dell' efflusso, e nel paragonarla con quella data dal calcolo, avvedersi di questa lieve differenza, tanto più che esisteva la contrazione di cui era ignoto il coefficiente.

9. La questione della pressione di efflusso dei fluidi elastici nel caso che sia molto basso il rapporto $\frac{p_2}{p_1}$ non si ridestò che in seguito alle esperienze eseguite verso il 1861 sul vapore acqueo da Minary e Résal [2]. È certo che quando il grado di umidità del vapore acqueo è tale che il peso iniziale x_1 di vapore asciutto contenuto in 1 kg. di miscuglio è compreso fra 1 e 0,70, la trasformazione adiabatica del fluido avviene approssimativamente (come insegna lo Zeuner) colla legge rappresentata dall' equazione

$$pv^m = \text{costante} \tag{10}$$

(1) Journal de l'école politechnique, t. XVI, 1839; *Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pression considerables.*

(2) *Recherches expérimentales sur l'écoulement des vapeurs.* Annales des mines, 5e série, t. XIX.

essendo

$$m = 1{,}035 + 0{,}100\, x_1. \tag{11}$$

La (10), paragonata alla (6), ci dice che il vapore si comporta come un gas, salvo il cambiamento dell' esponente γ in m. Quindi, se il principio di De Saint Venant e Wantzel non era erroneo, dovevano avvedersene, salvo una lieve variazione del rapporto $\frac{p'}{p_1}$ dato dalla (9), per la sostituzione di m a γ, coloro che studiavano l' efflusso del vapore.

Perciò questo principio tornò bentosto a galla e fu posta fuori di dubbio la sua concordanza coi fatti (nei limiti di approssimazione praticamente possibili) da molte esperienze, fra le quali mi basterà qui nominare quelle eseguite col vapore acqueo da Napier (1869) e da Zeuner (1870), e quelle sull' aria compressa eseguite da Zeuner a Zurigo (verso il 1871).

10. Per non ripetere troppe cose che si possono facilmente rintracciare in pubblicazioni già conosciute [1], mi limiterò a fare un cenno delle esperienze eseguite da Zeuner sull' efflusso dell' aria compressa nell' atmosfera.

Nell' involucro di una caldaia contenente aria compressa alla pressione p_1 ed alla temperatura t, egli lasciava aperta, per un intervallo di tempo θ, una luce di area ω, raccordata coll' involucro in modo da evitare qualsiasi *contrazione* della vena fluida. In seguito, allorquando l' aria rimasta nella caldaia era ritornata alla temperatura t, ne misurava la pressione, che era divenuta p_3. Dal rapporto $\frac{p_1}{p_3}$ deduceva tosto il peso d' aria Π effluito per ogni minuto secondo.

D' altra parte egli calcolava la portata applicando esattamente il principio di De Saint Venant e Wantzel, e ricorrendo ad alcune formole che lievemente differiscono dalle (7) (8) e (9) (che abbiamo dedotte nella ipotesi di una dilatazione rigorosamente adiabatica) per tener conto delle così dette *resistenze*, le quali hanno per effetto di rendere più piccola la velocità di efflusso. La forza viva esterna, perduta per queste resistenze, è compensata da un aumento dell' energia interna del fluido. Volendone tener conto, il lavoro esterno di dilatazione $-\int_{p_1}^{p} v dp$, che figura nella (5) non è più uguale a $\frac{w^2}{2g}$, ma si ha, chiamando ψ un coefficiente minore dell' unità, variabile da un punto all' altro della massa in movimento:

$$\frac{1}{\psi^2}\frac{w^2}{2g} = -\int_{p_1}^{p} v dp\,. \tag{12}$$

Zeuner, all' ipotesi della dilatazione adiabatica, ha sostituito quella che il coefficiente ψ

[1] Per le esperienze di Napier si può consultare una Memoria del Rankine nell' *Engineer* del 26 nov. e 3 dic. 1869. — Vedasi pure l'articolo *On the velocity of steam and other gases, and the true principles of the discharge of fluids*, Civilingenieur. Band 17, pag. 215, 1871. Per le esperienze di Zeuner vedasi la sua *Technische Thermodynamik*, I° vol. 1887 e II° vol. 1890.

sia lo stesso per tutti i punti della massa, ed ha dimostrato che in tale ipotesi la espansione del gas segue ancora una legge rappresentata dall' equazione

$$(13)\qquad pv^n = \text{costante}.$$

Notisi però che sebbene la (13) sia analoga alla (6), non basta per avere i corrispondenti valori di w e Π, sostituire n a γ nelle formole (7) e (8), perchè nell' equazione delle forze vive (12) è introdotto il coefficiente ψ. Zeuner dimostra invece che si deve adottare la formola

$$(14)\qquad \Pi = \omega\sqrt{2g\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{v_1}} \times \sqrt{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

da cui segue, per il valore p' di p che rende massimo Π:

$$(15)\qquad \frac{p'}{p_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Secondo il principio di De Saint Venant e Wantzel, ogniqualvolta la pressione esterna è minore di p', la pressione all' orifizio deve essere eguale a p'. In questo caso si ha, sostituendo nella (14) a $\frac{p}{p_1}$ il valore di $\frac{p'}{p_1}$ dato dalla (15), e riducendo:

$$(16)\qquad \Pi = \omega\sqrt{2g\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{v_1}\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}}.$$

Questa formola, essendo noti ω, g, γ, p_1, e v_1, ci permette di calcolare n quando Π sia stato dedotto dalle misure dirette. Zeuner fece questo calcolo per varie esperienze con luci circolari del diametro di mm. 4,07, 5,74, 6,98, e 9,99, e con pressioni variabili dalle 2 alle 4 atm. assolute, e trovò che ad n si poteva assegnare il valore medio 1,404, che ben poco differisce dal valore 1,41 che usualmente si attribuisce a γ, ed a cui corrisponde, per la (15), il valore di p' dato da

$$(17)\qquad p' = 0{,}5276\,p_1.$$

Facendo $p' = 1$ atm., se ne ricava $p_1 = \frac{1}{0{,}5276} = 1{,}90$.

11. Al disotto della pressione iniziale di 1,90 atm., secondo il principio suddetto, la pressione all' orifizio doveva quindi essere eguale alla pressione esterna: e ciò fu esattamente constatato da Zeuner in altre serie di esperienze con pressioni in caldaia variabili da 1 ad 1,90 atm. confrontando il valore di Π osservato con quello dato dalla (14) facendo in essa $p = 10333$ kg. ed $n = 1{,}404$.

Da ciò egli dedusse:

1° Che le resistenze, nell' efflusso dell'aria, sono assai piccole;

2° Che il principio di De Saint Venant e Wantzel, *pei gas*, è conforme alle risultanze dei fatti.

Egli ha poi dimostrato che queste conclusioni si possono estendere anche all' ef-

flusso del vapore acqueo poco umido, fondandosi sulle esperienze di Napier, e su altre sue proprie, intorno alle quali ritengo qui superfluo dilungarmi.

12. Il principio di De Saint Venant e Wantzel è quindi omai entrato definitivamente nel novero delle leggi empiricamente conosciute, ed è rimasto isolato l' esempio di Hirn, che rifiutò di aderire a questo principio recentemente nelle seguenti circostanze.

Questo scienziato, nel 1886, in un lavoro contro la teoria cinetica dei gas, espose alcune sue esperienze sull' efflusso dell' aria atmosferica in un recipiente nel quale l'aria era inizialmente ridotta ad una pressione molto bassa che diremo p_2. Egli aveva misurato il peso di aria passante per l' orifizio, e trovato che nei primi istanti dell' efflusso, la portata era molto più grande di quella data dalla formola (8), quando vi si faceva $p = p_2$; e non pensando di spiegare il fatto ammettendo che la pressione all' orifizio fosse superiore alla pressione p_2, ne aveva concluso che la velocità effettiva dell' aria non corrispondeva a quella data dalla formola (7) ed oltrepassava in alcune esperienze i 4000 metri per minuto secondo.

Noi abbiamo osservato, alla fine del Capo II, che questa conclusione è contraria ad alcune legittime deduzioni della meccanica razionale. Un sì grave difetto non presentava invece la spiegazione data dal principio di De Saint Venant e Wantzel, ciò che venne fatto osservare ad Hirn [1] da Hugoniot. Hirn, non volendo perdere uno de' suoi argomenti contro la teoria cinetica dei gas, non si diede per vinto (per quanto risulta nei Comptes rendus de l'Académie des sciences 1886), ritenendo che i fatti osservati gli dessero ragione; ma mi sembra che le argomentazioni di Hugoniot, non contrarie ai fatti, e conformi d' altronde alle dottrine di altri scienziati (Clausius, Zeuner, ecc.) fossero vittoriose. Non credo quindi che Hirn possa aver trovato in quella vertenza, dei seguaci.

IV.

13. Abbiamo visto che dalle esperienze eseguite sull' efflusso dei gas e dei vapori, con luci di forma semplice, risultano assai piccole le *resistenze.* Questo non può essere vero che a condizione di considerare il fluido solo in vicinanza dell' orifizio. Infatti, appena uscitone, il fluido si mescola con la massa che lo circonda perdendo velocità; la sua forza viva esterna si trasforma in calore; e riescono del tutto inattendibili le equazioni (5) (6) e (10) ed i valori di w e v che se ne deducono.

Però, fino a che restiamo nelle vicinanze dell' orifizio, è lecito (come abbiamo già osservato al n. 4) ammettere per qualsiasi fluido l'ipotesi della dilatazione adiabatica. In questa ipotesi, noi possiamo facilmente persuaderci, anche senza ricorrere ad esperienze, che il principio di De Saint Venant e Wantzel deve potersi estendere, *in via di approssimazione*, all' efflusso di qualsiasi fluido.

14. Anzitutto osserveremo che se la pressione all' orifizio è maggiore della pressione esterna, agli elementi della massa che rasentano il contorno della luce d' ef-

[1] Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Giugno 1886 (pag. 1545) e 2° semestre 1886 (pagg. 109, 241, 371, 922, 1002, 1178, 1232 e 1253).

flusso viene impressa, oltre all' accelerazione tangenziale per l' incremento della velocità, una accelerazione normale, talchè tutti i fili fluidi esterni riescono curvilinei, colla convessità rivolta al centro dell'orifizio. Ne segue che la vena fluida presenterà sempre, in qualche punto, una sezione trasversale più piccola (di area) di quelle che la precedono e la seguono. Se non c' è la così detta *contrazione* questa sezione più piccola è quella che cade nell' orifizio. Tutti gli autori, quando calcolano la portata dell' efflusso, sono d' accordo nel riferire la pressione all' orifizio a questa sezione più piccola, come noi facemmo finora.

15. Or bene, quando il fluido si dilata adiabaticamente, il suo volume specifico è una semplice funzione delle sue pressioni iniziale ed attuale, onde possiamo scrivere

$$v = f(p_1, p). \tag{18}$$

Ne segue, per la (5) che anche w è funzione di p_1 e p, e che lo è pure il rapporto $\frac{w}{v}$, che esprime la quantità di fluido passante per ogni metro quadrato di sezione. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{w}{v} = \varphi(p_1, p). \tag{19}$$

D' altra parte è noto che colla dilatazione adiabatica si ha una trasformazione di energia interna in lavoro ed energia esterna. Quindi, per quanto si possa estendere la dilatazione, siccome non è infinita la energia interna iniziale del fluido, non può diventare infinita la sua energia esterna. Ne segue che al diminuire di p la velocità w non può mai oltrepassare un certo limite, benchè v cresca indefinitamente. Ne segue ancora che $\frac{w}{v}$ il quale è nullo per $p = p_1$ ed ha valori reali e positivi quando p è diverso da p_1, tende a zero quando p diminuisce indefinitamente. Esiste adunque un valore di p che rende massimo $\frac{w}{v}$. Questo valore di p, che noi chiameremo p', è quello che annulla la prima derivata di $\frac{w}{v}$ rispetto a p, cioè che soddisfa alla condizione:

$$\varphi'_p(p_1, p) = 0. \tag{20}$$

Se $p > p'$, la portata per mq. $\frac{w}{v}$ cresce al diminuire di p. Se $p < p'$ la stessa portata cresce al crescere di p. Insomma la portata cresce sempre quanto più p si avvicina a p'.

16. Ciò posto, supponiamo che fra la pressione iniziale p_1 e la pressione finale p_2 del fluido, sia compresa la pressione p', e che questa pressione si verifichi in vicinanza dell' orifizio, ove è applicabile l' ipotesi della dilatazione adiabatica. — Rappresentiamo con *AABB* (fig. 2) il profilo della vena fluida, con *RTS* il luogo geometrico dei punti in cui la pressione è p' (che è una superficie fissa perchè il moto

è supposto permanente), e con MM un filo fluido qualunque (quale venne da noi definito al n. 2) il quale taglia la superficie RTS in N.

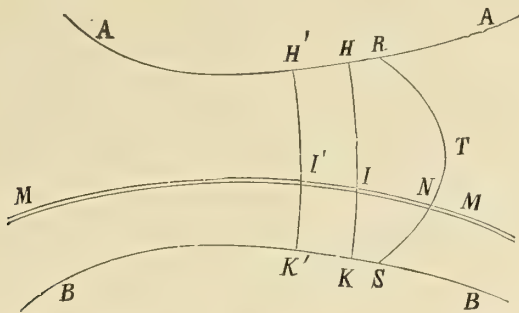



Fig. 2.

Siano HK ed $H'K'$ due altre superfici, la prima più vicina, e la seconda più lontana da RTS, le quali godano della proprietà di tagliare ad angolo retto tutti i fili fluidi, e siano ω_1, ω_2, rispettivamente le aree delle figure I ed I', secondo le quali esse tagliano il filo MM. Siano ancora w_1, w_2, v_1, v_2 i corrispondenti valori della velocità e del volume specifico. È lecito ammettere che la pressione in I sarà più vicina a quella in N (eguale a p') di quella che regna in I'. Quindi, per ciò che si è detto sopra, $\frac{w_1}{v_1}$ sarà maggiore di $\frac{w_2}{v_2}$. Ma le portate $\omega_1 \frac{w_1}{v_1}$ e $\omega_2 \frac{w_2}{v_2}$ delle sezioni trasversali del filo fluido sono le stesse (poichè il moto è permanente). Quindi $\omega_2 > \omega_1$.

Lo stesso si può ripetere per tutti gli altri fili fluidi; e siccome la somma di tutte le aree come ω_1 ed ω_2, costituisce rispettivamente l'area delle due superficie $HK, H'K'$, ne segue che

$$\text{Area } HK < \text{Area } H'K' \tag{21}$$

qualunque sia il senso nel quale il fluido cammina.

D'altra parte, benchè non si possano trovare le equazioni delle superficie RTS, HK ed $H'K'$, si comprende che in generale, quando l'orifizio è di forma semplice, l'area di una superficie qualunque come $HK, H'K'$ deve diminuire quanto più si accosta alla sezione più piccola della vena fluida. La disuguaglianza (21) non può quindi sussistere, se il moto è permanente, quando è possibile condurre due superficie HK, $H'K'$ interamente comprese fra la sezione più piccola della vena fluida, e la superficie RTS.

17. Dal semplice fatto del moto permanente segue adunque che la superficie RTS deve trovarsi in corrispondenza alla sezione più piccola della vena fluida, come è rappresentato dalla fig. 3.

La forma della superficie RTS varierà secondo il fluido, la sua pressione iniziale, e la forma dell'orifizio, ma intersecherà sempre la sezione più piccola XY.

Questa conclusione ci autorizza a ritenere che in tutti i punti della sezione XY, nelle condizioni supposte, si avrà sempre una pressione poco diversa da p', ossia che:

Nell' efflusso di qualsiasi fluido, quando la pressione finale del fluido è minore della pressione p' che rende massimo il rapporto $\frac{w}{v}$, la pressione, nella sezione più piccola della vena fluida, si può ritenere approssimativamente eguale a p'.

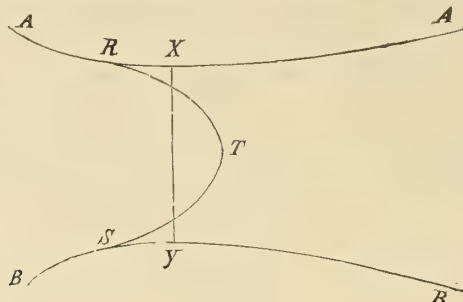



Fig. 3.

18. Questa legge suppone che la pressione scenda al di sotto di p' nelle vicinanze dell' orifizio, ciò che certamente avviene nei casi ordinari. Essa non è altro che la generalizzazione di quella parte del principio di De Saint Venant e Wantzel che si applica ai gas quando $\frac{p_2}{p_1} < 0{,}5266$, ed ha molta importanza perchè riguarda il caso delle forti pressioni.

Vedremo nei seguenti capitoli le conseguenze di un tale principio, applicato all' efflusso dei *liquidi soprariscaldati.*

V.

19. Ritornando ora al caso dell' efflusso dell' acqua di una caldaia a vapore in pressione, già considerato al Capo I, dobbiamo anzitutto riflettere che la temperatura dell' acqua nella caldaia è difficilmente uniforme. La massa d' acqua ha esattamente la temperatura corrispondente alla tensione del vapore che la comprime soltanto dove trovasi in ebollizione; ma negli altri punti, causa il suo raffreddamento al contatto dell' involucro, ed il suo mescolarsi all' acqua fredda di alimentazione, può avere una temperatura più bassa, di parecchi gradi.

Bastano, come vedremo, piccole differenze di temperatura per alterare di molto la portata dell' orifizio. Distingueremo perciò due casi: quando la pressione a cui è sottoposto inizialmente il liquido che sgorga e la sua temperatura sono tali che la tensione del suo vapore eguaglia esattamente la pressione, diremo che si tratta di acqua soprariscaldata *senza eccesso di pressione*; quando invece la pressione iniziale del liquido soprariscaldato supera la tensione del suo vapore, diremo che l' acqua è *con eccesso di pressione.*

20. La dilatazione adiabatica dei liquidi soprariscaldati, senza eccesso di pressione, è un caso particolare della dilatazione dei miscugli di liquido e di vapore. Basta supporre che sia inizialmente eguale a zero il peso di vapore contenuto in ogni kg. di fluido. Però in questo caso non possiamo più disporre di equazioni ap-

prossimate della forma (10), che valgono solamente quando x_1 è compreso fra 1 e 0,70, e dobbiamo ricorrere alle equazioni generali che ci dà la termodinamica per l'efflusso dei vapori saturi.

Chiameremo con Zeuner:

T, la temperatura assoluta $= 273° + t$;

x, il peso di vapore asciutto contenuto in ogni kg. di fluido;

r, il calore totale di vaporizzazione (in calorie), che per l'acqua, secondo Regnault, è $= 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$;

q, il calore di riscaldamento di un kg. di liquido da 0 a t gradi, che per l'acqua, secondo Regnault, è $= t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3$;

τ, il valore dell'integrale definito $\int_0^t \frac{dq}{T}$, che per l'acqua è

$$\int_0^t \frac{dq}{T} = 1{,}056156 \log_e \frac{T}{273} - 0{,}0004514\,(T - 273) + 0{,}00000045\,(T^2 - 273^{-2});$$

σ, il volume specifico del liquido. Per l'acqua si ha $\sigma = 0{,}001$;

u, il volume differenziale di 1 kg. di vapore asciutto, cioè la differenza fra il suo volume e σ:

p, w, v, come di solito, la pressione, la velocità, ed il volume specifico del fluido.

A tutte queste lettere daremo l'indice 1 quando si tratterà dello stato iniziale del fluido.

Chiameremo finalmente A l'equivalente termico del lavoro, eguale, come si sa, ad $\frac{1}{425}$ circa.

Ciò posto, applicando, al caso della dilatazione adiabatica di un miscuglio di vapore e di liquido, la nota equazione di Clausius, si ottiene la relazione:

$$\frac{xr}{T} - \frac{x_1 r_1}{T_1} = \tau_1 - \tau \qquad (22)$$

che ci permette di calcolare x quando siano dati lo stato iniziale del fluido, e la pressione finale, dalla quale per mezzo delle tavole di Regnault si deduce tosto la temperatura T.

Conosciuto x si calcola il volume specifico del miscuglio colla formola

$$v = xu + \sigma. \qquad (23)$$

Trasformando poi opportunamente l'equazione delle forze vive (5), si ottiene, sempre con Zeuner [1], la equazione:

$$A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 r_1}{T_1}(T_1 - T) + (q_1 - q) - T(\tau_1 - \tau) + A\sigma(p_1 - p) \qquad (24)$$

la quale permette di calcolare w. Conosciuti w e v è tosto nota la portata specifica $\frac{w}{v}$.

[1] Zeuner, *Technische Thermodynamik* (1887-1890); oppure *Théorie mécanique de la chaleur, avec ses applications aux machines* (1869).

Nel caso di un liquido soprariscaldato senza eccesso di pressione, basta fare, nelle equazioni precedenti, $x_1 = 0$.

21. Il calcolo di w riesce alquanto laborioso, specialmente quando corrisponde ad un valore di p che non rappresenta un numero intero di atmosfere, perchè allora non bastano le tavole dei valori di r, τ, p, q, u pubblicate pel vapore acqueo dallo stesso Zeuner [1]. Notisi che si tratta di cifre con molti decimali, di cui bisogna assolutamente tener conto, quando la differenza $T_1 - T$ è piccola, e che questo avviene appunto nella ricerca della pressione all' orifizio per l' acqua soprariscaldata.

Ciò è un grave inconveniente, perchè dalle (22) (23) e (24) non si può dedurre una equazione della forma (19) contenente le sole variabili $\frac{w}{v}$ e p, e la ricerca del valore di p che rende massimo $\frac{w}{v}$ non può essere fatta che per tentativi. Si aggiunge che quando $T_1 - T$ è molto piccolo, non basta spingere a cinque decimali il valore di τ, per ottenere dei valori di $\frac{w}{v}$ sufficientemente esatti.

Zeuner, pel calcolo di w e $\frac{w}{v}$ dà anche, nella sua *Technische Thermodynamik* alcune formole più semplici di quelle suesposte, ed applicabili al caso in cui $x_1 = 0$; ma riescono approssimate soltanto quando la pressione finale del fluido è uguale alla pressione atmosferica. Non valgono quindi assolutamente per piccole differenze fra T_1 e T.

Numerosi calcoli mi hanno dimostrato che le ricerche per tentativi riescono meno laboriose, senza cessare di essere sufficientemente esatte, adottando per l' acqua soprariscaldata, senza eccesso di pressione, la relazione:

$$(25) \qquad v = a + \frac{b}{P} + f\left(P - \frac{P_1 + 1}{2}\right)$$

in cui a, b, f, sono coefficienti, il cui valore dipende soltanto dalla pressione iniziale, e da una pressione finale assunta (p. es. un'atmosfera) e P_1 e P sono i valori della pressione iniziale e generica (per non confonderla con quella finale di un' atmosfera che serve a calcolare le a, b, f) *in atmosfere*. La (5) combinata colla (25) ci dà allora, avvertendo che $p = 10333\,P$:

$$(26) \; \frac{w^2}{2g} = 10333 \left\{ a\,(P_1 - P) + b \log_e \frac{P_1}{P} + \frac{f}{2}\left[\left(\frac{P_1 - 1}{2}\right)^2 - \left(P - \frac{P_1 + 1}{2}\right)^2\right]\right\}.$$

I valori di a, b, f, per ogni valore di P_1, possono essere calcolati colle seguenti condizioni:

1) Il volume specifico iniziale del fluido, (per $P = P_1$) sia eguale a σ, ossia, per l' acqua, 0,001.

2) Il volume specifico del fluido, per una pressione finale pari ad un' atmosfera, sia eguale a quello dato dalla (23).

[1] Opere succitate. Le tavole di r e τ sono intercalate nel testo; le altre vi sono allegate in appendice.

3) Il valore $\frac{w^2}{2g}$ della forza viva, per una pressione finale pari ad 1 atmosfera, sia eguale a quello dato dalla (24).

Se AB (fig. 4) è la curva delle pressioni del fluido, costruita prendendo per ascisse i valori dei volumi specifici esatti v, e se M ed L sono i punti le cui coordinate v e p corrispondono rispettivamente allo stato iniziale e finale del fluido, segue dalla (5) che il valore esatto di $\frac{w^2}{2g}$ corrispondente alla pressione finale OI, è pari all'area del quadrilatero misto $RMLI$.

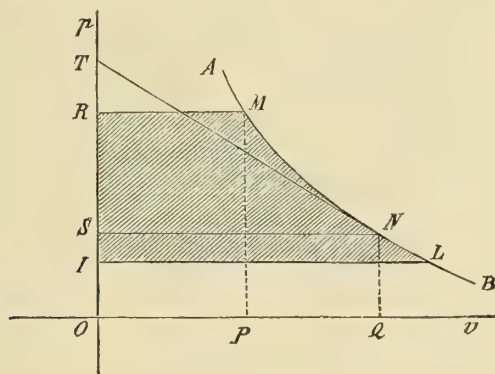



Fig. 4.

Or bene, se si procede nel modo suesposto per calcolare a, b, f, se la pressione finale OI si fa uguale ad 1 atmosfera, e se si traccia la curva delle pressioni, prima coi valori esatti di v dati dalla (23) e poscia con quelli approssimati dati dalla (25), si ottengono due curve poco diverse fra loro, le quali hanno comuni i punti estremi A e B, ed hanno uguali le aree dei corrispondenti quadrilateri $RMLI$. I tentativi fatti mi dimostrarono che non si commette grande errore sostituendo la seconda alla prima.

Nella tabella seguente ho raccolti, per comodo di chi volesse adottare la formola (25), i valori di a, b, f per alcuni valori della pressione iniziale, nel caso dell'acqua, aggiungendovi i valori di v e w, calcolati colla (23) e (24) per una pressione finale uguale ad 1 atmosfera, che hanno servito pel calcolo dei detti tre coefficienti.

Pressione iniziale in atmosfere assolute.	Valore di v e w per la pressione finale di 1 atm.		Valori di a, b, f per l'acqua soprariscaldata senza eccesso di pressione $(x_1 = 0)$		
	v	w	a	b	f
2	0,0635	69,5	— 0,07912	+ 0,1485	+ 0,01174
4	0,1311	145,1	— 0,05457	+ 0,1930	+ 0,00488
6	0,1734	193,0	— 0,04366	+ 0,2243	+ 0,00291
8	0,2047	228,9	— 0,03692	+ 0,2485	+ 0,00196
10	0,2298	258,0	— 0,03217	+ 0,2683	+ 0,00141

22. Considerando, ad esempio, il caso di una pressione iniziale di 10 atm., ed applicando le formole (25) e (26) a diversi valori della pressione P, si trovano i risultati esposti nell' altra tabella seguente.

Pressione in atmosfere assolute		Volume specifico	Velocità	Portata per m²
iniziale	nella sezione considerata	v	w	$\frac{w}{v}$
10	1	0,22970	258,00	1122 kg.
»	2	0,09704	190,90	1970 »
»	4	0,03278	115,20	3510 »
»	6	0,01325	65,98	4980 »
»	8	0,00489	33,11	6360 »
»	8,8	0,00297	21,59	7270 »
»	9	0,00257	18,78	7310 »
»	9,2	0,00220	15,98	7260 »
»	9,4	0,00187	13,12	7020 »
»	9,6	0,00156	10,07	6450 »
»	9,8	0,00128	6,83	5340 »
»	9,9	0,00115	4,70	4090 »
»	10	0,00100	0	0 »

Come si vede, la portata per metro quadrato $\frac{w}{v}$ raggiunge il suo valore massimo quando P è di circa 9 atmosfere. Quindi, per l' acqua soprariscaldata senza eccesso di pressione che si versa nell' atmosfera, giusta la legge esposta al N.° 17, quando la pressione iniziale è di 10 atmosfere, la pressione all' orifizio risulta approssimativamente di 9 atm. e la corrispondente portata di 7310 kg. per metro quadrato.

Apparisce da cio che si è gravemente errato ritenendo che pei liquidi soprariscaldati la pressione all' orifizio fosse uguale alla pressione esterna, alla quale corrisponderebbe una portata per m^2 di soli 1122 kg.

Così procedendo anche per altre pressioni iniziali, ottenni i risultati raccolti nel prospetto che segue. In esso trovansi pure certi valori del coefficiente di contrazione, di cui parlerò più tardi.

Efflusso dell'acqua soprariscaldata senza eccesso di pressione.

Pressione iniziale in atmosfere assolute P_1	Pressione all'orifizio corrispondente al massimo della portata per m². $\frac{w}{v}$ P'	Velocità di efflusso in metri corrispondente alla pressione P' w'	Portata della sezione di area minima in kg. per m². $\frac{w'}{v'}$	Minimo valore assoluto del coefficiente di contrazione φ_n
2	1,90	7,00	1870	0,970
4	3,71	11,30	3300	0,970
6	5,49	14,00	4730	0,972
8	7,26	16,40	6060	0,966
10	9,00	18,78	7310	0,960

Come apparisce da questo prospetto la differenza $P_1 - P'$ è sempre minore di $\frac{1}{10} P_1$. Molto piccolo riesce quindi l'abbassamento di temperatura del fluido all'orifizio.

VI.

23. Se, entro la caldaia, la temperatura del liquido non è uniforme, la temperatura del vapore libero può essere superiore a quella iniziale del liquido che effluisce. In questo caso il fluido rimane totalmente liquido fino alla sezione della vena in cui la pressione uguaglia la tensione del vapore saturo corrispondente alla sua temperatura iniziale. Solo dopo questa sezione una parte del liquido vaporizza, ed il fluido resta costituito da un miscuglio di liquido e di vapore. Il fenomeno dell'efflusso presenta allora, in generale, alcune singolarità degne di particolare attenzione.

L'equazione delle forze vive (5) ci dice che

$$\frac{d\left(\frac{w^2}{2g}\right)}{dp} = -v. \tag{27}$$

D'altra parte, quando è soddisfatta la (20) si ha, per la pressione all'orifizio p':

$$\frac{d\frac{w}{v}}{dp} = 0. \tag{28}$$

Ma se è massimo $\frac{w}{v}$ è pure nel massimo $\frac{w^2}{v^2}$, che differenziato ci dà:

$$v^2 \frac{d(w^2)}{dp} - w^2 \frac{d(v^2)}{dp} = 0$$

che si può anche scrivere, osservando che $\frac{d(v^2)}{dp} = 2v\frac{dv}{dp}$, e dividendo per $2vg$:

(29)
$$v\frac{d\left(\frac{w^2}{2g}\right)}{dp} - \frac{w^2}{2g} \cdot 2\frac{dv}{dp} = 0$$

onde, per la (27):

(30)
$$v^2 + \frac{w^2}{2g} \cdot 2\frac{dv}{dp} = 0.$$

Questa eguaglianza dà luogo alle seguenti osservazioni:

Scelti due assi coordinati ortogonali Ov, Op (fig. 4) prendiamo $OP = v_1$, $OQ = v'$, $MP = p_1$, $NQ = p'$, e conduciamo l'arco MN della linea delle pressioni del fluido. Abbiamo già detto che la forza viva $\frac{w^2}{2g}$ è allora rappresentata dall' area tratteggiata $RMNS$. Se poi conduciamo in N la tangente NT ad MN avremo:

$$\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{SN}} = \frac{\mathrm{ST}}{v'} = -\frac{dp}{dv}$$

donde si deduce:

$$\mathrm{ST} \times v' = -v'^2\frac{dp}{dv}$$

che combinata colla (30) ci dà:

$$\frac{1}{2}\mathrm{ST} \,.\, v' = \frac{w'^2}{2g}$$

Adunque, se la pressione p' è la pressione all' orifizio, conducendo la tangente alla curva delle pressioni nel punto N, corrispondente alla pressione p', l' area del triangolo STN risulta eguale a quella del quadrilatero mistilineo $RMNS$.

Dalle ultime relazioni esposte si deduce altresì che:

$$\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{SN}} = \frac{1}{g}\frac{w'^2}{v'^2}$$

cioè che la tangente dell' angolo TNS è proporzionale al quadrato della portata per metro quadrato della sezione in cui la pressione è p'.

24. Supponiamo ora che si abbia un liquido soprariscaldato con eccesso di pressione.

Sia ancora M (fig. 5) il punto che ha per coordinate p_1, v_1. Siccome la pressione iniziale del fluido è maggiore di quella, che diremo p'_1, a cui comincia la vaporizzazione del liquido, la linea delle pressioni presenta dapprima un tratto MM' parallelo all' asse Op, essendo $MM' = p_1 - p'_1$. In seguito la curva delle pressioni, cambiando bruscamente la direzione, prende l' andamento $M'NZ$.

Se si avesse $MM' = O$, ossia $p_1 = p'_1$, si ricadrebbe nel caso testè esaminato, e la pressione all' orifizio si troverebbe cercando un punto N tale che l' area del triangolo SNT fosse uguale ad $R'M'NS$.

Se MM' non è uguale a zero, l' area del triangolo SNT non è più uguale al-

l'area $RMM'NS$, ed il punto N al crescere di $p_1 - p_1'$ si sposta verso M', cioè la pressione all'orifizio p' si avvicina a p_1' e nello stesso tempo l'angolo TNS diventa più grande. Cresce adunque, per ciò che si disse alla fine del num. precedente, la portata per m. q. $\frac{w'}{v'}$.

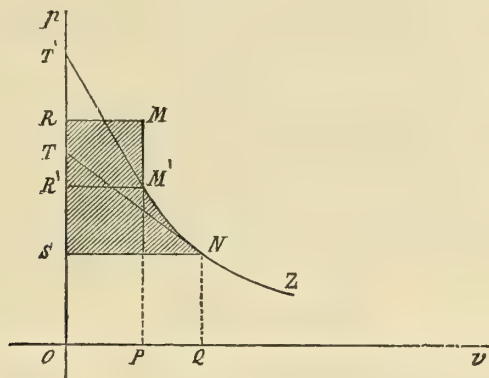



Fig. 5.

Allorquando la differenza $p_1 - p_1'$, che chiameremo *eccesso di pressione,* ha raggiunto un certo valore, il punto N viene a coincidere con M', la retta NT diventa $M'T'$ tale che l'area del triangolo $T'M'R'$ è uguale a quella del rettangolo $RMM'R'$ e si ha $p' = p_1'$.

Crescendo ancora ulteriormente l'eccesso di pressione, siccome alla spezzata $MM'Z$ può essere sostituita, senza alterare sensibilmente il risultato, una linea avente nel punto M' un raggio di curvatura piccolissimo, si vede che la pressione all'orifizio resta sempre quella rappresentata dall'ordinata $M'P$, cioè si ha sempre $p' = p'_1$.

Adunque, nell'efflusso dell'acqua soprariscaldata con eccesso di pressione, *se l'eccesso di pressione supera un certo limite* (che, come vedremo tosto, è assai piccolo) *la pressione all'orifizio è uguale precisamente alla tensione del vapore saturo corrispondente alla temperatura iniziale del liquido.* Il liquido non si trasforma in vapore che dopo oltrepassata la più piccola sezione della vena.

Si ha allora:

$$\frac{w'}{2g} = \text{Area RMM'R'} = \sigma\,(p_1 - p_1')$$

da cui si deduce:

$$w' = \sqrt{2g\sigma\,(p_1 - p_1')} \tag{31}$$

Questa formola è del tutto analoga a quella che serve per calcolare la velocità di efflusso dei liquidi ordinari, e non ne differisce che pel valore della pressione all'orifizio p_1', che non è uguale alla pressione esterna.

Ne segue che col liquido soprariscaldato la portata $\frac{w'}{v'} = \frac{w'}{\sigma}$ è sempre minore di quella che si avrebbe se, a parità di pressione iniziale, il liquido fosse freddo.

25. Se l' eccesso di pressione non raggiunge il limite di cui si è testè parlato, il lavoro esterno corrispondente ad una pressione qualunque p si compone di due parti, cioè del lavoro dovuto al passaggio dalla pressione p_1 alla pressione p_1' più quello dovuto al passaggio dalla pressione p_1' alla pressione p. La prima parte è rappresentata dall' area del rettangolo $RMM'R'$, ed è uguale a $\sigma(p_1 - p_1')$. La seconda è identica a quella che si avrebbe per un liquido soprariscaldato senza eccesso di pressione passando da una pressione iniziale p_1', allo stato di riposo, ad una pressione finale p.

Se adunque, chiamando sempre w la velocità acquistata dal fluido passando dalla pressione iniziale p_1 alla pressione p, diciamo w_1 la velocità che acquisterebbe il liquido freddo passando dalla pressione p_1 alla pressione p_1' e w_2 la velocità che acquisterebbe il liquido soprariscaldato senza eccesso di pressione passando dalla pressione iniziale p_1' (allo stato di riposo) alla pressione p, possiamo scrivere:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{w_2^2}{2g} \tag{32}$$

Quindi la ricerca della pressione all' orifizio, cioè della pressione che rende massimo il valore della portata per m². $\frac{w}{v}$ nel caso considerato, si può fare per tentativi in modo analogo a quello di cui si è parlato pei liquidi soprariscaldati senza eccesso di pressione. Basta aggiungere sempre all' energia $\frac{w_2^2}{2g}$, calcolata per mezzo della (24) o della (26), l' energia costante $\frac{w_1^2}{2g}$ data da

$$\frac{w_1^2}{2g} = \sigma(p_1 - p_1')$$

26. Resta ora a vedere quale sia il valore di $p_1 - p_1'$ al disopra del quale, come si disse al num. 24, la velocità di efflusso è data semplicemente dalla formola (31).

Abbiamo detto al num. 24 che quando l' eccesso di pressione $p_1 - p'_1$ raggiunge un certo limite, il punto N (fig. 5) viene a coincidere con M', e l'area del triangolo $T'M'R'$, determinato dalla tangente $M'T'$ alla curva delle pressioni, è uguale a quella del rettangolo $RMM'R'$. L' eguaglianza di queste aree, essendo la tangente dell'angolo $M'T'O$ eguale a $-\frac{dv}{dp}$, e ricordando che $M'R' = v_1 = \sigma$, ci dà la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}\sigma \cdot \frac{\sigma}{-\frac{dv}{dp}} = \sigma(p_1 - p_1')$$

da cui si ricava

$$p_1 - p_1' = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{-\frac{dv}{dp}} \tag{33}$$

e sostituendo alle pressioni in kg. per m². p_1 e p_1' i valori delle stesse pressioni in atmosfere che diremo P_1 e P_1', tenendo presente che $P = \frac{p}{10333}$, e che $\frac{dv}{dp} = \frac{dv}{dP} \cdot \frac{dP}{dp} = \frac{dv}{dP} \cdot \frac{1}{10333}$, si ha:

$$P_1 - P_1' = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{-\frac{dv}{dP}}$$

Il valore di $\frac{dv}{dP}$, si può dedurre dalla (25) la quale ci dà:

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{b}{P^2} + f$$

onde, ricordando che, per l'acqua, $\sigma = 0{,}001$:

$$P_1 - P_1' = \frac{1}{2} \frac{0{,}001}{\frac{b}{P^2} - f} \tag{34}$$

Col sussidio di questa formola, venne calcolata la seguente tabella:

Efflusso dell'acqua soprariscaldata con eccesso di pressione.

Temperatura iniziale dell'acqua (t_1)	Tensione del vapore corrispondente alla temperatura iniziale in atmosfere assolute (P_1')	Minimo eccesso di pressione, pel quale la pressione di efflusso resta uguale a P_1' in atmosf. assolute ($P_1 - P_1'$)	Pressioni iniziali corrispondenti (P_1)	Differenza fra la temperatura t_1 e la temperatura corrispondente ad una tensione del vapore eguale a P_1 (gradi centigradi)
120°,60	2	0,020	2,020	0°,32
144°,00	4	0,070	4,070	0°,62
159°,22	6	0,152	6,152	0°,98
170°,81	8	0,261	8,261	1°,34
180°,31	10	0,395	10,395	1°,61

Ogniqualvolta la temperatura iniziale dell'acqua effluente è inferiore a quella del vapore libero nella caldaia delle quantità risultanti dall'ultima colonna di questa tabella, la pressione all'orifizio uguaglia la tensione del vapore corrispondente alla temperatura iniziale del liquido effluente; la velocità di efflusso si calcola immediatamente colla formola (31); ed il volume specifico di efflusso è $\sigma = 0{,}001$; onde tosto ne risulta conosciuta la portata $\frac{w'}{\sigma}$.

Se, per esempio, la pressione in caldaia è di 6 atm. assolute, e se l'acqua effluente ha la temperatura iniziale inferiore di 2° a quella del vapore libero nella

caldaia, siamo nel caso dell' efflusso dell' acqua soprariscaldata con eccesso di pressione. Dalle tavole usuali si ricava che il vapore a 6 atm. ha la temperatura di 159° 22. La temperatura iniziale dell' acqua è adunque di 157° 22, a cui corrisponde, pel vapore saturo, una tensione di atmosfere 5,70.

La (31) ci dà quindi:

$$w' = \sqrt{2g \,.\, 10{,}333\,(6 - 5{,}70)} = 7^{m}{,}80$$

da cui si deduce per la portata:

$$\frac{w'}{v'} = \frac{w'}{\sigma} = 7800 \text{ kg.}$$

27. Se si fosse trattato di acqua soprariscaldata senza eccesso di pressione, si sarebbe invece avuto, come dalla seconda tabella data al num. 22:

$$w' = 14^{m}{,}00 \quad \text{e} \quad \frac{w'}{v'} = 4730\,.$$

Vedesi quindi quanto sia modificato il fenomeno per piccole differenze di temperatura dell' acqua effluente, a parità di pressione iniziale.

Secondo le tavole di Zeuner, la portata, nel caso dell' efflusso di acqua soprariscaldata alla pressione iniziale di 6 atm. assolute, non sarebbe che di 1113,20 kg. Nel caso testè considerato, essa è invece più che 7 volte maggiore, ciò che spiega i risultati ottenuti nelle mie esperienze, nominate al Capo I.

VII

28. Aggiungerò alcune osservazioni interessanti circa il valore del *coefficiente di contrazione*, per l' acqua soprariscaldata.

Sia $ABCD$ (fig. 6) un recipiente che contenga un fluido inizialmente allo stato di riposo, alla pressione p_1. Sia ω l' area della sezione MN dell' orifizio, in cui la vena

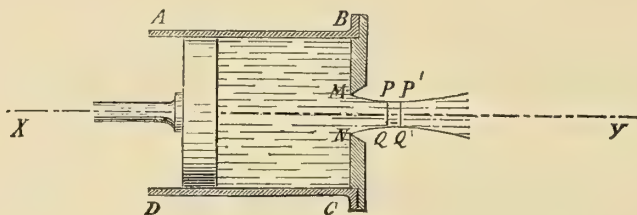



Fig. 6.

fluida si stacca dal recipiente, e sia XY l' asse della luce MN e della vena fluida. Supponiamo ancora che si abbia *contrazione*, e che sia PQ la più piccola sezione della vena. L' area di questa, sarà $\varphi\omega$, essendo φ il *coefficiente di contrazione*.

Sia finalmente p_2 la pressione esterna uniforme che regna intorno al recipiente. Si consideri la massa fluida che è limitata dalle pareti interne del recipiente e

dalla superficie del tronco di vena $MPQN$, e si chiamino al solito p', w', v' la pressione, la velocità ed il volume specifico, che si verificano in PQ. Si proietti la quantità di moto di ciascun elemento della massa fluida sull' asse XY.

Se il moto si può considerare come permanente e se la velocità iniziale del fluido può considerarsi come nulla, la somma delle proiezioni delle quantità di moto di tutti gli elementi della massa limitata in ogni istante dalla parete del recipiente e dalla superficie del tronco $MPQN$, sarà una quantità costante.

Ora il fluido che si trova in PQ al principio di un tempuscolo qualunque $d\theta$ giungerà in questo tempuscolo in $P'Q'$ percorrendo, parallelamente ad XY lo spazio $PP' = w'\,d\theta$. Quindi la massa fluida che era limitata nel modo anzidetto al principio del tempuscolo $d\theta$, sarà alla fine dello stesso intervallo di tempo limitata dalle pareti del recipiente e dalla superficie del tronco $MP'Q'N$, e la somma delle proiezioni delle quantità di moto dei singoli suoi elementi, sull' asse XY sarà aumentata della quantità corrispondente al tronco cilindrico $PP'Q'Q$, pari a

$$\frac{\varphi\omega \,.\, w'\,d\theta}{v'g} \cdot w' = \varphi\omega \frac{w'^2}{gv'}\,d\theta\,.$$

Questo aumento della quantità di moto deve essere uguale alla somma delle proiezioni, sullo stesso asse XY, delle impulsioni elementari delle forze che agiscono sulla stessa massa fluida durante il tempuscolo $d\theta$.

Se nell' interno del recipiente la pressione restasse uniformemente eguale a p_1, l' azione del recipiente sul fluido, eguale ed opposta alla *reazione* di questo, sarebbe eguale a $p_1\,\omega$. In realtà però la pressione diminuisce, in generale, nelle parti interne del recipiente che circondano l' orlo dell' orifizio.

Sia δ questa diminuzione. L' azione del recipiente sul fluido, secondo XY, sarà quindi $p_1\,\omega + \delta$, e la relativa impulsione sarà $(p_1\,\omega + \delta)\,d\theta$,

Oltre a questa forza agisce sul fluido la pressione esterna p_2 sulla superficie laterale del tronco $MPQN$, e la pressione p' nella sezione PQ. La somma delle componenti di queste azioni, secondo XY, è $-(\omega - \varphi\omega)p_2 - \varphi\omega p' = -\omega p_2 - \varphi\omega\,(p' - p_2)$, e la relativa impulsione è $[-\omega p_2 - \varphi\omega\,(p' - p_2)]\,d\theta$.

Dobbiamo adunque avere:

$$(p_1\,\omega + \delta)\,d\theta - \omega p_2\,d\theta - \varphi\omega(p' - p_2)\,d\theta = \varphi\omega \frac{w'^2}{gv'}\,d\theta$$

e dividendo per $\omega\,d\theta$:

$$p_1 - p_2 + \frac{\delta}{\omega} = \varphi\left(p' - p_2 + \frac{w'^2}{gv'}\right) \tag{35}$$

da cui si ricava:

$$\varphi = \frac{p_1 - p_2}{p' - p_2 + \dfrac{w'^2}{gv'}} + \frac{\dfrac{\delta}{\omega}}{p' - p_2 + \dfrac{w'^2}{gv'}} \tag{36}$$

Siccome si ha sempre $p_1 > p' > p_2$, e siccome δ è sempre positivo, si vede che φ non può mai assolutamente essere inferiore a ciò che si ottiene facendo nella (36) $\delta = 0$. Chiamando φ_n questo valore minimo assoluto di φ, avremo:

$$\varphi_n = \frac{p_1 - p_2}{p' - p_2 + \frac{w'^2}{gv'}}. \tag{37}$$

Questa formola vale qualunque sia l'orifizio, in cui si produce la contrazione.

29. La forza δ si potrebbe ritenere effettivamente uguale a zero per un fluido qualunque quando l'orifizio avesse un tubo di accompagnamento rientrante ABCD disposto come nella fig. 7, e questo tubo avesse uno spessore esilissimo, tanto da poter trascurare la pressione sulla sua base anulare *CD*. In questo caso quindi il coefficiente di contrazione avrebbe effettivamente il valore di φ_n [1].

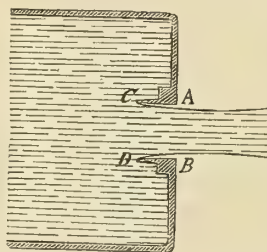



Fig. 7.

30. Applicando al caso dell'acqua soprariscaldata *senza eccesso di pressione*, per una pressione iniziale di 10 atm. assolute, la formola (37), bisogna fare in essa $p_2 = 10333$, $p_1 = 10 \times 10333$, $g = 9{,}805$, ed inoltre, giusta le tabelle date al num. 22, $w' = 18^m{,}78$, $p' = 9 \times 10333$ e $v' = 0{,}00257$. Si trova così

$$\varphi_n = 0{,}96.$$

Il coefficiente di contrazione φ è adunque compreso fra 1 e 0,96, qualunque sia la forma dell'orifizio. Ciò significa che l'efflusso dell'acqua soprariscaldata senza eccesso di pressione avviene sempre *quasi a bocca piena*. Ciò è ben naturale, perchè il fluido tende violentemente ad espandersi appena uscito dall'orifizio. Ripetendo il calcolo per pressioni iniziali di 2, 4, 6, e 8 atm. assolute, si trovano gli altri valori analoghi di φ_n, che furono esposti nella seconda tabella data al num. 22.

Per l'acqua soprariscaldata con eccesso di pressione il valore di φ_n risulta tanto più elevato quanto più è piccola la differenza che abbiamo chiamata $p_1 - p_1'$.

[1] Coll'orifizio rappresentato dalla fig. 7, se il fluido è un liquido ordinario (nel qual caso si ha $p' = p_2$) risulta $\varphi_n = 0{,}50$. Questo stesso risultato fu ottenuto dal Borda, che lo accertò anche mediante esperienze. V. *Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases.* Mémoires de l'Académie des sciences. 1766, pag. 579.

Criptocrosi, ed altre ricerche intorno ai raggi X.

Memoria del Socio A. RÒITI

presentata il 30 luglio 1896.

1. *Tubi in parallelo ed in serie sul secondario d'un rocchetto di Ruhmkorff.* — Premetterò alcune esperienze intorno all'esame comparativo di due tubi.

Ho cominciato con due del genere di quello che ho descritto or non è molto [1], nei quali l'alluminio, che è anode, fa anche da anticatode ed insieme fa da parete di separazione fra lo spazio vuotato e l'aria esterna [2]. Ma l'alluminio invece di aver forma di bocciuolo abbracciante a smeriglio il tubo di vetro, era un piatto sul quale appoggiava pure a smeriglio il labbro piano di una canna di vetro largo un centimetro, ed era brunito così all'interno come all'esterno nella parte libera che era piana ed aveva la grossezza di poco più che 2 mm. Il catode, d'alluminio anch'esso, aveva la forma di callotta sferica col centro di curvatura ad un centimetro circa al di qua del piatto, ossia all'esterno, talchè la parte libera del piatto veniva colpita quasi uniformemente dai raggi catodici.

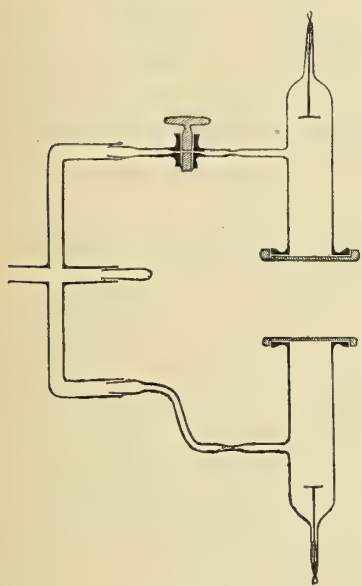



Fig. 1.

Questi due tubi sono rappresentati ad un quinto del vero nella fig. 1, attaccati come si trovavano alla tromba di Geissler, coi due piatti affacciati alla distanza di 5 cm.

Li ho disposti in parallelo congiungendo i piatti al polo positivo del grande rocchetto di Ruhmkorff e le callotte al polo negativo; e vi ho mandato le scariche, le quali destavano la fluorescenza verde su tutte le pareti di vetro, ma con intensità maggiore

[1] *Un buon tubo per le esperienze di Röntgen.* « L'Elettricista », anno V, n. 6. — Ho già pronto da circa un mese un altro tubo che dovrebb'essere anche migliore. In esso l'anticatode è di platino ed il bocciuolo d'alluminio, col fondo curvo, fa da catode e da parete divisoria. Finora, avendo impegnata altrimenti la tromba, non ho potuto provarlo.

[2] Due mesi dopo il prof. Righi (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. V, 2° sem., fasc. 2°) ha tratto partito dalla medesima idea.

in vicinanza dei piatti, probabilmente per la riflessione dei raggi catodici sui piatti medesimi.

Furono costruiti i due tubi il più possibilmente uguali fra loro; ma affinchè la luminosità risultasse uguale in entrambi, trovai necessario di derivare al suolo gli anodi. La luminosità era al principio del terzo stadio ([1]), cioè quando per l' appunto scomparisce il pennacchietto filiforme che si stacca dal centro della callotta: e pure i cannelli di congiunzione colla tromba erano invasi dal terzo strato della luminosità catodica, mostrando un bagliore bianchiccio.

Ho poi disposto i due tubi in serie unendo la callotta del primo al reoforo negativo del rocchetto, il piatto del secondo al reoforo positivo e congiungendo fra loro mediante un filo di rame gli altri due elettrodi.

Essendo la rarefazione al principio del terzo stadio e tenendo aperte le chiavette che guidano alla tromba, il tubo attaccato al polo negativo presentava l' aspetto normale di fluorescenza testè descritto; mentre quello attaccato al polo positivo non era punto verde, e conteneva una nube biancastra proveniente dal cannello di congiunzione, il quale era luminoso ([2]). Siffatta nube faceva da anode insieme col piatto nel secondo tubo, proteggendo questo piatto dai raggi catodici e quindi impedendo che emettesse i raggi X. La nube era costituita da un resto di aeriforme: e l' energia dei raggi catodici che l' invadevano, anzi che trasformarsi in raggi X, vi produceva il lavoro della dissociazione molecolare e la conseguente luminiscenza.

2. *Raggi X emessi dai liquidi, non dagli aeriformi.* — Due ragioni m' inducono a ritenere che i raggi catodici non destino i raggi X quando colpiscono gli aeriformi. La prima è la mancata fotografia attraverso a piccola apertura di un tubo avente per elettrodi due anelli coassiali e presentante fra gli anelli un bel pennacchio luminosissimo a forma di birillo. La fotografia è mancata malgrado l' esposizione di qualche ora.

La seconda ragione è che, affacciando al piatto del secondo tubo attaccato al polo positivo, una lastra fotografica con sopra dei dischetti di piombo, la lastra non rimase impressionata malgrado la ben nota trasparenza dell' alluminio pei raggi X.

Se i raggi X non emanano dagli aeriformi, possono bensì emanare dai liquidi: almeno l' ho osservato per il mercurio. M' ha servito per ciò il tubo rappresentato dalla fig. 2 ad un terzo del vero. Il catode è una callotta d' alluminio, l' anode è il mercurio stesso nel quale fa capo un filo di platino saldato nel vetro. L' ampolla laterale si te-

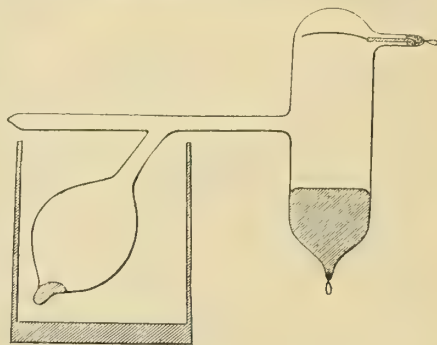



Fig. 2.

([1]) Vedi l' art. 2 della mia Nota: *Alcune esperienze coi tubi di Hittorf e coi raggi di Röntgen*, presentata alla R. Acc. dei Lincei il 1° marzo 1896.

([2]) J. J. Thomson ha già messo in rilievo che la scarica passa piuttosto per una colonna ininterrotta di aeriforme rarefatto, che non dall' aeriforme all' aeriforme attraversando un conduttore metallico.

neva da prima immersa nel ghiaccio pel caso che il calore della scarica avesse evaporato copiosamente il mercurio; ma poi tale precauzione si è mostrata superflua, che anzi la scarica incontra molta difficoltà a passare per questo tubo dopo che è stato riscaldato con un bruciatore di Bunsen mentre si trovava attaccato alla tromba.

Il fondo di vetro a tergo del catode non si illumina e non emette raggi X perchè troppo vicino, come più volte ebbi a notare (1): ma attraverso ad un diaframma di piombo, con foro minore del catode, posto quasi a contatto di quel fondo, i raggi X hanno impressionato delle lastre fotografiche poste a diverse distanze: ed i circoli impressionati avevano l'estensione come se i raggi provenissero dal centro della superficie di mercurio, con una stretta penombra indicante che, sebbene quella superficie fosse oltre il centro di curvatura del catode, pure non conteneva ancora il punto di concorso dai raggi catodici.

3. *Dissociazione dell'acido solforico operata dai raggi catodici.* — Sarebbe interessante un'esperienza consimile sostituendo al mercurio un liquido che desse vapori di piccola tensione e non monoatomici. Si presenta tosto alla mente l'acido solforico, e con l'acido solforico tentai la prova. L'avevo già ritirato come puro dal Trommsdorff, ma lo feci esaminare dal collega A. Piccini il quale infatti lo trovò puro a meno di qualche traccia azotata: e seguii il suo consiglio di distillarlo sul solfato ammonico, così che dopo la distillazione non colorava quasi punto la brucina.

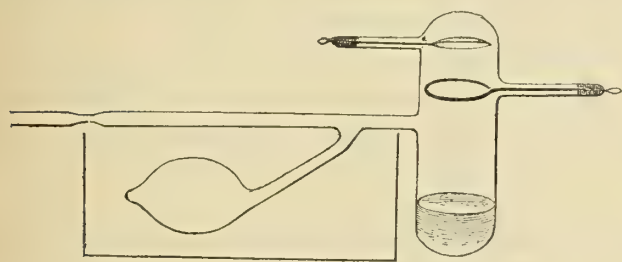



Fig. 3.

Ne introdussi cautamente in un tubo, rappresentato dalla fig. 3, con elettrodi d'alluminio, il catode a callotta e l'anode ad anello, in maniera che la superficie liquida fosse per più di 1 cm. sotto al centro di curvatura della callotta. Il tubo era stato precedentemente vuotato colla tromba di Geissler mentre era tenuto caldo con un bruciatore di Bunsen. Subito dopo l'introduzione dell'acido solforico lo riapplicai alla tromba, ne tolsi l'aria, circondai l'ampolla laterale con ghiaccio e cloruro sodico, e riscaldai l'acido per liberarlo dai gas che potesse tenere ancora disciolti. Lasciatolo raffreddare mentre agiva continuamente la tromba, la rarefazione giunse a tale che il mercurio di questa dava un colpo secco contro la chiavetta, e si manteneva a tal grado per ore ed ore se nel tubo non si mandavano le scariche.

Mandandovi le scariche del grande rocchetto di Ruhmkorff, si destava una viva fluorescenza verde su tutta quella parte della parete laterale che non era bagnata dall'acido, e restava oscuro il vetro a tergo della callotta catodica. Ma dopo poche scintille, il tubo si riempiva d'una luminosità cerulea che si faceva sempre più viva a scapito della fluorescenza laterale.

(1) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, sedute del 3 febbraio e del 15 marzo. Se il prof. O. Murani (Memorie del R. Istituto lombardo, vol. XVIII) credè di non trovare confermata questa mia osservazione, fu per un malinteso, com'egli stesso volle poi dichiararmi.

Facendo agire la tromba, riscontrai che si svolgeva nel tubo un aeriforme che non si condensava, e ne potei raccogliere cm³ 6,7 in una campanetta sopra il mercurio prolungando il passaggio delle scariche per un' ora e mezzo mentre la tromba agiva senza interruzione. Nel laboratorio chimico del prof. U. Schiff si riconobbe che v' erano cm³ 3,6 di anidride solforosa, cm³ 0,7 di ossigeno. Al resto, non assorbibile, fu aggiunto dell' ossigeno, ma la scintilla non ridusse il volume della mescolanza. Probabilmente sarà stato azoto, però non si potè accertare per l' inavvertenza d' un assistente che fece entrare dell' aria nella campanetta.

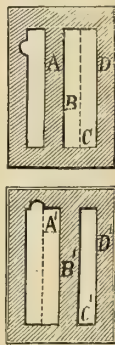
Intorno alla natura ed alla genesi del miscuglio gassoso svolto sotto l' azione dei raggi catodici, non riferirò qui le congetture che vengono spontanee, rilasciandole a chi voglia sottoporre il fenomeno ad uno scrupoloso esame; ma credo di poter asserire che i raggi catodici battendo sull' acido, ne provocano la dissociazione sia direttamente, sia piuttosto vaporizzandolo ed attraversandone poi i vapori. Fatto sta che una lastra fotografica, posta al di sopra del tubo e protetta da diaframma di piombo opportunamente forato, non ricevè impressione alcuna da ben 5000 scariche che nell' aria avrebbero avuto la lunghezza di 12 cm. e che si provocavano interrompendo a lunghi intervalli con la mano la corrente primaria nei soli momenti che la tromba aveva tolto i gas svoltisi e la fluorescenza verde si mostrava sulla parete del tubo.

I raggi catodici, mentre destano i raggi X alla superficie del mercurio, pare adunque che non li destino alla superficie dell' acido solforico e che invece la loro energia vada spesa nel lavoro chimico della dissociazione.

4. *Impressioni fotografiche prodotte fra due tubi opposti.* — Dopo questa digressione, ritorno ai due tubi gemelli col piatto di alluminio della fig. 1, e confesso ingenuamente che mi posi la questione se una pellicola fotografica, collocata fra i due piatti, si sarebbe impressionata più o meno per l' azione simultanea di entrambi i tubi, o per quella d' uno solo.

Tagliai due pezzi uguali d' una stessa pellicola Eastman per Kodak, misi fra loro a contatto le due faccie impressionabili e le posi fra due lastre di piombo aventi delle aperture che in parte si corrispondevano ed in parte no, come per esempio si vedono nella fig. 4 ad un terzo del vero; rinvoltai il tutto in carta nera e lo racchiusi in apposita scatolina d' alluminio, che collocai fra i piatti dei due tubi applicati alla tromba. I tubi erano disposti in parallelo come dissi di sopra, ed i raggi X destati sui piatti dovevano attraversare grossezze uguali delle varie sostanze per arrivare alle superficie impressionabili.

Fig. 4.

Le impressioni A′ e B prodotte da uno solo dei tubi risultarono della stessa forza, e molto più intense risultarono le impressioni come C e C′ prodotte da entrambi i tubi. Anzi, avendo tagliata via da una delle pellicole la parte C, avendovi sostituito la parte D non impressionata perchè protetta da ambo i lati, ed avendola sovraposta alla seconda pellicola in maniera che A′ e B coincidessero, le positive tirate da tale accoppiamento risultarono presso che della stessa forza nella regione A′B impressionata separatamente dai due tubi, e nella regione C′D impressionata simultaneamente. Il che vuol dire che gli effetti dei raggi X provenienti dalle due sorgenti si sommano.

Le stesse cose ho verificato disponendo la cassettina diagonalmente in modo che un lato corto toccasse il piatto superiore ed il lato opposto toccasse l' inferiore. Com' è naturale, le due regioni A′ e B riuscirono sfumate in senso opposto: e la regione C C′, esposta ad entrambi i tubi, risultò più intensa alle estremità che nel mezzo.

Ripetute le esperienze simili dopo aver riuniti i tubi in serie, l' impressione mostrò efficace quello solo che aveva la propria callotta in comunicazione diretta col polo negativo del rocchetto.

Allora intercalai la chiavetta che, come indica la fig. 1, permette di chiudere la comunicazione fra i due tubi; e con la comunicazione chiusa, entrambi produssero effetto, ma sempre più intensamente quello che era attaccato al polo negativo: e ciò tanto se tutto lasciavo isolato, quanto se derivava al suolo uno dei poli o il filo metallico intermedio che congiungeva la callotta di un tubo col piatto dell' altro.

Nel timore che la chiavetta di vetro non opponesse ostacolo sufficiente alla trasmissione del disequilibrio elettrico lungo i cannelli di congiunzione, ripetei la prova opponendo due dei soliti tubi piriformi ritirati di Germania; ma anche con questi si mostrò più intensa l' azione proveniente direttamente dal polo negativo del rocchetto.

5. *Un attinometro pei raggi X.* — Da queste esperienze al confronto di due tubi per mezzo della fluorescenza era breve il passo: e pensai di far arrivare i raggi X dei due tubi sulle faccie laterali d' un prisma triangolare rettangolo, come praticò Ritshie nel suo fotometro. Diedi la preferenza al platinocianuro di potassio che possedevo in cristalli minuti, e lo feci cadere con uno staccio sul prisma verniciato a coppale e trementina. Un primo prisma era formato col gesso da presa, un secondo, era fatto con lastra d' ottone rivestita di piombo, e si vede rappresentato ad un terzo del vero nella fig. 5 al fondo d' una custodia d' ottone pure foderata di piombo, munita davanti di conveniente oculare ed avente ai lati due finestre in corrispondenza del prisma. Le due pareti, ove sono praticate le finestre, hanno acconcie guide longitudinali per potervi infilare diversi diaframmi a seconda dei casi.

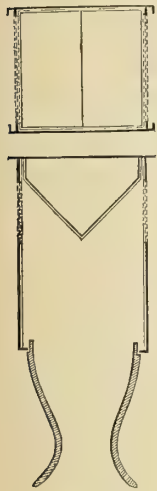



Fig. 5.

Vi ho infilato due cartoni tagliati da una scatola ove le lastre del Lumière vanno in commercio: ed ho collocato quest' attinometro sul banco del solito fotometro fra due tubi di Crookes.

Da prima disponeva i tubi in parallelo sopra un unico rocchetto, ma con tale disposizione non ho potuto utilizzare tutti quelli che posseggo, perchè i loro poteri fosfogenici riuscivano fra loro troppo diversi. Poi il prof. Bazzi mi ha prestato gentilmente il rocchetto dell' Istituto tecnico, ed allora ho potuto affidare i due tubi a due distinti rocchetti i quali però erano eccitati da una medesima corrente e da un unico interruttore, avendo le loro eliche primarie in serie ed i loro condensatori riuniti in batteria. Certo che con questa disposizione il regime dell'un tubo non era indipendente da quello dell' altro, perchè le correnti secondarie dei rocchetti diminuivano l' impedenza totale nel primario, e quindi riusciva diversa la durata delle medesime; e con essa la distanza esplosiva negl' indotti. Ma potevo regolare le cose opportunamente avendo messo un reostata in derivazione sul primario del rocchetto più forte,

in maniera da conferire ai tubi sotto esame dei poteri fosfogenici non molto diversi; e di più poteva apprezzare all'ingrosso la differenza di potenziale massima fra gli elettrodi di ciascun tubo, mettendoli in parallelo con uno spinterometro e determinando volta per volta la lunghezza della scintilla.

6. *Criptocrosi.* — Fra i varî problemi che si possono affrontare con tale apparato mi sono fermato più specialmente su quello della colorazione, per così dire, dei raggi X, che potrà chiamarsi *criptocrosi*.

Andrei troppo per le lunghe se riferissi tutte le esperienze nello stesso ordine col quale le ho eseguite, e però preferisco riassumerle aggruppandole nel modo che mi pare più razionale.

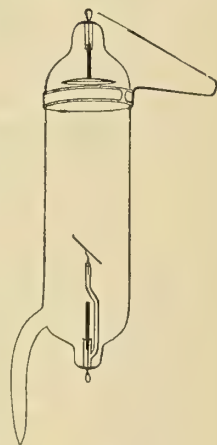
Collocati sul banco i due tubi in maniera che i loro anticatodi fossero ad una distanza fissa, che il più delle volte era di 40 cm., ricercava coll'attinometro il punto nel quale appariva uniforme il suo campo e poi metteva davanti alle due finestre due lastre fra loro identiche, per vedere se l'uniformità era turbata e conchiuderne che una stessa sostanza può essere attraversata più o meno facilmente dai raggi X a seconda della sorgente.

I tubi, che per lo più ho adoperato in queste ricerche, mi sono stati forniti dalla casa Greiner e Friedrichs di Stützerbach: li ho trovati eccellenti; ma in alcuni coll'anticatode di platino, il passaggio delle scariche si rendeva, come sempre, via via più difficile. Riscaldarli con una fiamma giova, come giova invertirvi la scarica: ma il vantaggio è di breve durata. Molto più comodo ho trovato lo spediente di appiccicare con vernice una striscia di stagnola un po' sotto al catode, come mostra la fig. 6, di applicare su di essa un collarino molleggiante d'ottone che porta un filo di rame rincotto, terminante con filino sottilissimo a breve distanza dall'anellino catodico.

Fig. 6.

Siccome l'uniformità del campo, anche senza frapporre le lastre, non si manteneva costante che per un certo intervallo indicando che i poteri fosfogenici dei tubi variavano continuamente, così non mancava di fare ripetute osservazioni alternate con e senza le lastre, come non mancava di permutare queste fra loro.

In generale l'interposizione di due lastre uguali turba l'uniformità del campo, e quella parte che rimane più splendente rivela che i raggi X che vi arrivano hanno maggior *potere penetrante*: e mi pare che questa esperienza debba persuadere chi mette ancora in dubbio che i raggi X siano di natura composta (1).

Fu già notato da parecchi fisici, ed io stesso lo notai riferendo intorno al tubo col bocciuolo d'alluminio (2), che talvolta le ossa appaiono trasparenti poco meno delle carni, mentre più spesso quelle sono opache e queste trasparentissime. V'è chi

(1) V. la discussione avvenuta il 27 giugno nella riunione solenne della Società elettrochimica tedesca (Zeitschrift für Elektrochemie, III Jahrg. pag. 59).

(2) L'Elettricista, anno V, n. 6.

ha incontrato il fatto spingendo la rarefazione più oltre del consueto, chi l'ha messo in evidenza riscaldando il tubo già chiuso ermeticamente, chi disponendolo in un campo magnetico per modo che la direzione dei raggi catodici coincidesse colla direzione del campo. In tutti questi casi il diverso potere penetrante dei raggi X deriva dalle condizioni dell'aeriforme rinchiuso nel tubo; ma non mi pareva che pel caso da me segnalato bastasse questa spiegazione, poichè la rarefazione, mentre presi la fotografia della mano, aveva il solito grado per cui il pennacchietto che parte dal catode stava lì per iscomparire, era cioè fra il secondo ed il terzo stadio ([1]); quindi propendeva a ritenere che sulla qualità dei raggi X eserciti un'influenza non lieve la sostanza che fa da anticatode e quella ond'è costituita la parete del tubo: e si vedrà più oltre come quest'opinione sia stata corroborata dall'esperienza.

7. *Raggi di ugual potere penetrante.* — Due tubi contrassegnati n. 6 e n. 7 (uno dei quali è rappresentato dalla fig. 6) sono fra loro uguali in tutto: hanno la callotta catodica col raggio di 3 cm., ed a 6 cm. da essa hanno il riflettore di platino inclinato a 45°, e sotto l'anode filiforme; sono di vetro al borace, come li qualifica il costruttore, con fluorescenza d'un verde azzurrognolo. Essi emettevano raggi di uguale penetrazione sebbene la rarefazione vi dovesse essere diversa poichè affidati uno dopo l'altro ad un medesimo rocchetto, lo spinterometro con palline di zinco dava scintille di 39 mm. Se messo in parallelo col primo e di soli 9 mm. col secondo. Si sono mantenuti di ugual potere penetrante sebbene provati in condizioni molto diverse, e cioè:

α) Affidati ai due rocchetti coi primarî in serie per modo che lo spinterometro in derivazione col n. 7 dava scintille di 35 mm. e col n. 6 le dava di 77 mm.

β) Permutati sui rocchetti e regolato il reostata per modo che lo spinterometro col n. 7 dava scintille di 120 mm., e di soli 80 mm. col n. 6 perchè, essendovisi resa difficile la scarica, era stato munito del collarino e della punta indicati dalla fig. 6. Il potere fosfogenico del n. 7 era in queste condizioni più che triplo di quello del n. 6.

γ) Disposti in parallelo sopra un unico rocchetto e muniti entrambi del collarino con la punta, presentavano poteri fosfogenici molto minori che precedentemente.

E pure in tutte queste condizioni diverse, ed essendo stati adoperati negli intervalli per altre esperienze, fu accertata l'uguaglianza fra i poteri penetranti dei loro raggi provandoli via via col rame (mm. 0,1), con l'alluminio (mm. 4), il vetro (mm. 2,3), l'ebanite (mm. 8).

Si può dunque ritenere che per questi due tubi la differenza di potenziale agli elettrodi, la quantità di elettricità che vi passa, il grado di rarefazione (certamente molto diverso nelle varie condizioni in cui furono esaminati) non esercitino che un'influenza secondaria sul potere penetrante dei raggi X che emettono.

Hanno anche mostrato di avere uguale potere penetrante i raggi di due tubi controssegnati n. 3 e n. 4 ed aventi anch'essi la forma rappresentata dalla fig. 6. Il tubo n. 3 è di vetro di Turingia, ha per catode una callotta sferica a 7 cm. dall'anticatode che è una lastrina di platino a 45°, sotto di essa l'anode d'alluminio è

([1]) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1° marzo 1896, pag. 158.

filiforme. Il tubo n. 4 ha la riga violetta con la quale si distingue il vetro di Jena, ha la distanza fra catode ed anticatode di 6 cm. ed ha per anode una pallina d'alluminio.

In principio li ho messi in derivazione sopra un unico rocchetto; ma siccome nel n. 4 la scarica cominciava a passare difficilmente, così ogni tanto mandava la corrente invertita in questo solo per riattivarlo, e poi riprendeva le osservazioni. Questi tubi, per una serie d'osservazioni, conferivano splendore uniforme al campo dell'attinometro quando esso si trovava a 23 cm. dal n. 3 ed a 10 dal n. 4, e l'uniformità non era visibilmente turbata frapponendo dai due lati delle grossezze d'alluminio di 4 ed 8 mm., della latta di mm. 0,3, dell'ebanite di 13 mm.

Dopo, i due tubi furono affidati a due rocchetti aventi, come ho detto, i primarî in serie: lo spinterometro dava scintille di 35 mm. quand'era in derivazione col n. 3 e di 62 col n. 4. La luminosità non era più tanto regolare in quest'ultimo tubo, nemmeno invertendovi spesso la corrente; ma pur tuttavia potei riscontrare che erano ugualmente trasparenti pei raggi dei due tubi e l'ebanite di mm. 2,7 ed il rame di mm. 0,1.

Più tardi ancora, per adoperare il n. 4 ho dovuto applicare al suo anellino catodico un filino metallico che facesse capo di fronte alla parete, sotto allo specchio concavo. In queste condizioni, confrontato col n. 3, ha mostrato di aver perduto un pochino del suo potere prenetrante sia che gli conferissi maggior potere fosfogenico sia minore che al n. 3 regolando la resistenza in derivazione sul primario del rocchetto cui era affidato.

Indi ho applicato il filino anche al n. 3, ma anche allora sono riuscito a riscontrare che aveva potere penetrante alquanto maggiore del n. 4. Feci le prove col vetro di mm. 2,3 e coll'ebanite di mm. 5,4.

Quando volli riesaminare questi due tubi ponendoli in parallelo sopra un unico rocchetto dopo averli muniti del collarino colla punta (fig. 6), il n. 4 rimase perforato sotto la stagnola.

8. *Il potere penetrante dei raggi X dipende dalle sostanze attraversate.* — Siccome fra i varî tubi cimentati non aveva incontrato che le due coppie su descritte le quali dessero raggi ugualmente penetranti, così con esse feci delle lunghe serie di osservazioni.

Citerò da prima questa, che se si fa scoccare una piccola scintilla fra l'anode di uno dei tubi ed il reoforo del rocchetto e si colloca l'attinometro nel punto del banco ove le due metà del campo hanno uguale splendore, mettendo poi davanti alle finestre due lastre identiche, si oscura più quella metà sulla quale arrivano i raggi emanati dal tubo senza scintilla. In tal modo ho riscontrato che la scintilla all'anode, accresce il potere penetrante dei raggi emessi anche nei casi che ne indebolisce il potere fosfogenico.

I raggi X, che hanno attraversato un dato corpo, hanno un potere penetrante diverso da quello che avevano entrandovi. Finora non ho incontrato il caso che l'abbiano minore, come accadrebbe per esempio della luce ordinaria la quale, passando per certi vetri gialli, sarebbe poi assorbita in maggior proporzione da un vetro di cobalto.

Posta una lastra davanti ad una finestra, e ricercato il punto dove l' attinometro presentasse il proprio campo uniforme, l' interposizione ulteriore dalle due parti di lastre, fra loro identiche, turbava l' uniformità nel senso che appariva più luminosa quella parte sulla quale arrivavano i raggi che preventivamente erano stati, per così dire, filtrati. Le lastre adoperate in questa ricerca furono di ebanite, vetro, alluminio, rame, latta: e tanto la coppia di tubi n. 3 e n. 4, quanto l' altra n. 6 e n. 7 diedero sempre il medesimo risultato, qualunque fossero le condizioni della loro eccitazione; tal che, se non fosse troppo ristretto il numero delle sostanze cimentate, potrei dire che i raggi X, attraversando una data sostanza, acquistano la proprietà di essere meno assorbiti, non solamente dalla sostanza medesima, ma anche dalle altre.

Occorrono ulteriori prove per istabilire se questo enunciato sia veramente generale.

9. *Tubi che dànno raggi diversamente penetranti.* — Questo è il caso più comune, ed i raggi che penetrano meglio una sostanza, penetrano meglio anche tutte le altre da me cimentate.

Cito per esempio il tubo n. 3 che, posto in parallelo col n. 6 sopra il grande rocchetto, aveva maggior potere fosfogenico e dava raggi pei quali riconobbi più trasparente che per quelli del n. 6: l' ebanite di mm. 5,4, l' alluminio di 4 mm., il rame di mm. 0,1.

Ho poi messo a confronto col n. 6 un altro tubo (n. 5) pure di vetro al borace ad esso uguale in tutto, meno che la distanza fra catode ed anticatode era maggiore per circa 5 mm. La scintilla dello spinterometro in derivazione col n. 5 era di mm. 37, mentre col n. 6 senza collarino era di mm. 39, e questo si illuminava molto meno.

In una prima serie di osservazioni il n. 6, provvisto ora del collarino (fig. 6), era affidato al rocchetto più grande col reostata in derivazione sul primario, così regolato che lo spinterometro in parallelo col tubo dava scintille di soli 9 mm., mentre le dava di 56 mm. se messo accanto al tubo n. 5 affidato al secondo rocchetto. L' attinometro doveva trovarsi a 14 cm. dal n. 6 ed a 26 cm. dal n. 5 per presentare l' uniformità di splendore; così che il potere fosfogenico del n. 5 era molto maggiore, e maggiore trovai pure il potere penetrante dei suoi raggi perchè, poste davanti alle due finestre lamine uguali, dalla sua parte lo splendore era meno indebolito. L' effetto fu costante, sebbene in grado diverso, col rame di mm. 0,1, con l' alluminio di mm. 4, la latta di mm. 0,3, l' ebanite di mm. 8, il vetro di mm. 2,3, con pile di mica complessivamente di mm. 1,8, con osso di bove di mm. 2,5, con tre tavolette d' abeto complessivamente di mm. 75, con corno di buffalo di mm. 2,4, con paraffina di mm. 18.

Non una sostanza sola che si mostrasse più trasparente pei raggi del n. 6.

La penetrazione dei raggi non va di pari passo col potere fosfogenico, perchè, permutati i tubi sui rocchetti e cambiata la resistenza in maniera che il n. 5 destasse nell' attinometro dalla distanza di 16 cm. la stessa fluorescenza che il n. 6 da 24 cm., e quindi fosse di questo molto più debole, pure la vinceva sempre in potere penetrante. La distanza esplosiva in parallelo col n. 5 era di 53 mm., col n. 6 di 43 mm.

In molti altri casi ancora ho osservato che un tubo di minor potere fosfogenico può emettere raggi più penetranti.

Mi permetto di riferire ancora alcune osservazioni fatte nel confronto del tubo n. 5 or ora descritto col tubo n. 3 composto con vetro di Turingia e descritto dianzi.

Il n. 5 dà raggi, come abbiamo veduto, più penetranti che non il n. 6; ma li dà meno penetranti del n. 3:

α) Il n. 5 era affidato al rocchetto più grande col reostata in derivazione sul suo primario, regolato in modo che lo spinterometro, in parallelo col tubo, desse scintille di 34 mm. Il n. 3 era affidato al rocchetto dell' Istituto tecnico e lo spinterometro in parallelo con esso dava scintille di 86 mm. Per ottenere l' uniformità del campo l' attinometro doveva porsi a 16 cm. dal n. 5 ed a 24 cm. dal n. 3, così che in queste condizioni l' ultimo tubo era più efficace, ed i suoi raggi si mostravano pure più penetranti.

β) Permutati i tubi sui due rocchetti e regolata la resistenza, il n. 3 permetteva allo spinterometro scintille di 68 mm., il n. 5 di 35 mm., ed il n. 3 continuò a dare raggi più penetranti.

γ) I due tubi erano in parallelo sopra un unico rocchetto. Per l' uniformità del campo l' attinometro doveva trovarsi a 23 cm. dal n. 5 ed a 17 cm. dal n. 3. Questo era dunque più debole, e pure seguitò a dare raggi più penetranti.

δ) I due tubi erano affidati a due rocchetti indipendenti, eccitati ciascuno da un interruttore rapido di Deprez. Le correnti primarie erano regolate in modo che il n. 3 permetteva allo spinterometro delle scintille di 60 mm. ed il n. 5 di 72 mm. L' uguaglianza di splendore si aveva collocando l' attinometro ad 11 cm. dal n. 3 ed a 15 cm. dal n. 5. Il n. 3 diede ancora indubbiamente i raggi più penetranti, sebbene in queste condizioni la differenza di splendore nell' attinometro fosse molto meno appariscente.

Le due ultime esperienze portano a conchiudere che un tubo può dare raggi più penetranti d' un altro avendo i suoi elettrodi ad una differenza di potenziale uguale od anche minore che questo.

È superfluo che adduca altri esempi, e basterà che dica come non abbia mai incontrato un tubo il quale dal dare raggi più penetranti passasse a darli meno penetranti d' un altro. Ciò vale almeno pei tubi ermeticamente chiusi: e si pensi come in alcuni di essi per il lungo uso l' aeriforme si trovasse in condizioni finali profondamente diverse dalle iniziali.

I tubi col piatto d' alluminio (fig. 1) sono pel potere penetrante dei loro raggi superiori a tutti gli altri, anche al tubo col bocciuolo d' alluminio descritto nell' Elettricista [1]: ed è molto probabile che debbano tale proprietà all' avere il fondo d' alluminio alquanto più grosso, giacchè abbiamo veduto al § 8 che la penetrazione aumenta dopo che i raggi hanno attraversato un corpo solido.

Il tubo col bocciuolo d' alluminio è il solo che mi abbia permesso d' intravedere che il grado della penetrazione possa invertirsi al variare della rarefazione. L' ho confrontato col n. 3, che dà raggi più penetranti di tutti gli altri a pareti di vetro, e s' è mostrato ad esso superiore non solo per tutto il terzo stadio della luminosità, ma anche alla fine del secondo stadio quando cioè esce dal catode un pennacchino esilissimo. Alzando però il recipiente della tromba a mercurio, il pennacchio arriva ad avere la grossezza d' una matita, ed allora non si riesce di accertare differenza fra i

[1] L. c.

poteri penetranti dei due tubi, ma l' efficacia s' indebolisce tanto da costringere ad accostare assai l' attinometro al piatto d' alluminio e da rendere per ciò difficili le osservazioni. Ad ogni modo sono giunto ad assicurarmi che, diminuendo ancora la rerefazione tanto da approssimarsi al primo stadio, i raggi si riducono ad avere un potere penetrante lievemente minore di quelli del n. 3.

Dal fin qui detto si può dedurre che il potere penetrante aumenta colla rarefazione, colla differenza di potenziale agli elettrodi, forse colla distanza fra catode ed anticatode; ma dipende principalmente dai corpi per cui sono passati i raggi X e, secondo ogni probabilità, dalla sostanza che è sede della loro emanazione. Spero di rischiarare meglio la questione con alcuni tubi simili a quelli della fig. 1, ma con piatti di metalli diversi, ed applicati simultaneamente alla tromba.

10. *Il potere assorbente relativo delle varie sostanze pei raggi X* deve dipendere, per ciò che precede, dalla sorgente; ma ho incontrato qualche difficoltà a metterlo in evidenza. Finalmente vi sono riuscito nel seguente modo.

Ho avuto ricorso ai due tubi i cui raggi avevano presentato maggior differenza di penetrazione, cioè il tubo col piatto d' alluminio, che chiamerò K, ed i tubi n. 6 o n. 7; ho cercato il punto di splendore uniforme avendo posto davanti a ciascuna finestra dell' attinometro una lastra d' ebanite di mm. 2,7; ho trovato per tentativi che era di mm. 0,7 la grossezza d' alluminio da sostituire all' ebanite davanti a K senza che fosse turbata l' uniformità del campo. Poi, permutando alluminio ed ebanite, ho trovato che aveva più splendore il lato rivolto al n. 6. Dunque l' alluminio, che per i raggi di K era equivalente all' ebanite, assorbiva meno quelli del n. 6.

La mica equivalente a mm. 2,7 d' ebanite pei raggi di K, aveva la grossezza di mm. 1,3 e, messa davanti al n. 6 rendeva invece più oscura la faccia del prisma rivolta a questo tubo.

Per riprova ho verificato che i raggi di K erano indeboliti in ugual misura da mm. 0,7 d' alluminio e da mm. 1,3 di mica; ma che quest' ultima era più opaca pei raggi del n. 6.

Ho poi modificato l' attinometro sostituendo ad uno dei cartoni un vetro molto cupo di cobalto, e disponendo davanti a questa finestra una lampadina ad incandescenza da 2 candele e 5 volta, racchiusa in acconcio lanternino con vetro di cobalto e messa in circuito con un galvanometro ed un reostata che servono a mantenerle il medesimo potere illuminante. Con questa disposizione la fluorescenza destata sul platinocianuro di potassio dalla luce comune ha lo stesso colore di quella destata sull' altra faccia del prisma dai raggi X che attraversano il cartone, così che si possono con piena sicurezza condurre all' uniformità le due metà del campo.

È chiaro che l' attinometro così modificato può rendere ben altri servigi. Per ora riferirò solamente che l' ho usato in questa ricerca del potere assorbente relativo.

Fissata a 15 cm. dal tubo K e messa davanti alla finestra corrispondente una lastra d' alluminio, ho spostato il lanternino fino ad ottenere l' uniformità del campo; poi, con mia sorpresa, ho trovato che per mantenerla dovevo sostituire ai mm. 0,7 d' alluminio niente meno che mm. 1,37 di vetro. Era vetro ben pulito delle lastre fotografiche del Lumière.

Com' era da aspettarsi, sostituendo al tubo K il tubo n. 7 e spostando convenientemente il lanternino, si riconobe facilmente che pei raggi di quest' ultima sorgente quel vetro è più opaco dell' alluminio.

Riscontrai in appresso che i mm. 1,37 di vetro indebolivano i raggi del n. 7 più che i mm. 2,7 d' ebanite; ma non mi fu possibile discernere differenza di opacità fra questo vetro e mm. 1,3 di mica, quand' erano esposti ai raggi del n. 7 come quando ricevevano quelli di K.

Il campo delle osservazioni di questo genere è sconfinato, ma per ora non posso inoltrarmivi perchè i miei tubi di minor potere penetrante sono andati affievolendosi in maniera che, se l' artificio del collarino colla punta può ancora renderli atti a dare delle fotografie, non assicura più una regolarità sufficiente per determinazioni fotometriche.

Intanto bisogna tener presente che le osservazioni surriferite valgono solo per il platinocianuro di potassio protetto dal cartone; ma esse sono più che sufficienti per provare che le scale di trasparenza dei varî corpi pei raggi X stabilite fin' ora, non possono avere un valore assoluto.

In queste lunghe e tediose osservazioni mi ha assistito con molto zelo il dottor Flaminio Chiavassa, e mi è caro di ripetergliene qui i miei ringraziamenti.

Firenze, luglio 1896.

Dei terremoti di Spoleto nell' anno 1895, con catalogo dei terremoti storici nella Valle Umbra compilato dal sig. prof. P. F. CORRADI.

Memoria del Socio T. TARAMELLI

letta nella seduta del 1º marzo 1896.

(con una Carta geologica).

Per incarico del signor Ministro G. Baccelli, verso la fine di settembre dello scorso anno ebbi ad occuparmi dei terremoti di Spoleto, che, incominciati colle scosse del 20 maggio, poco dopo il forte terremoto di Firenze, si protrassero sin verso la fine di ottobre. Questo periodo sismico, quantunque non sia stato cagione di disastri paragonabili ai tanti, che afflissero anche in questi ultimi anni il nostro non fortunato paese, non mancò di produrre colle sue scosse più intense dei danni rilevanti negli edifici, in particolare nella città di Spoleto, ed un disagio facile a concepirsi negli abitanti, mantenuti sempre in allarme. Si aggiunse anche l' altro danno che i villeggianti, i quali sogliono ogni anno, specialmente dalla capitale, recarsi in quella amena regione per ristoro nei calori estivi, o non ci andarono o ne partirono anzitempo. Vedremo poi dal catalogo, che ho potuto aggiungere a questi cenni, giovandomi delle notizie raccolte dal signor prof. P. F. Corradi di Trevi, in parte desunte dal noto catalogo del prof. Mercalli ed in parte comunicatemi gentilmente da lui stesso, come la Valle Umbra, ed in particolare Spoleto, contino nella storia frequentissimi terremoti, sebbene non violenti come in altre regioni anche prossime, quali i dintorni di Norcia, e resi meno temibili dalla buona costruzione degli edifici, anche antichi, sia pei materiali di costruzione impiegati, sia per l' impiego non scarso di legnami d' opera e per le dimensioni delle mura di solito ragguardevoli. Onde sempre più si conferma una verità, che per quanto evidente, non sarà tuttavia mai abbastanza ripetuta, che cioè i danni dei terremoti disastrosi sono per la massima parte da attribuirsi alla qualità ed allo stato delle costruzioni, e che quindi l' eventualità dei terremoti, pressochè per tutta Italia e per la Sicilia, deve essere tenuta presente dalle autorità incaricate di invigilare all' edilizia, cittadina e rurale. In Spoleto e dintorni l' abbondanza della calce, la frequenza delle cave di buone pietre da taglio, calcari ed arenacee, la tradizionale perizia nei muratori, che forse rimonta all' epoca delle costruzioni me-

galitiche, ed ancora una discreta agiatezza in quella popolazione calma e riflessiva, sono tali condizioni, che fortunatamente controbilanciano la naturale tendenza del suolo a scotimenti sismici frequenti e prolungati.

Di questa innegabile predisposizione ai terremoti della regione spoletina, dovrebbe il geologo rendersi conto e quasi sarebbe suo compito il discutere in proposito parecchie ipotesi, onde almeno spianare ad altri la via a concludere qualche concetto meno vago. Trattandosi poi di una regione prettamente sedimentare, dove, per quanto io mi sappia, mancano del tutto rocce vulcaniche terziarie e quaternarie (poichè le più prossime tra queste sono le diabasi e serpentine tra Gualdo Tadino e Gubbio e le trachiti a mellilite di Rieti) non è nemmeno il caso di vagare colla fantasia in cerca di cagioni direttamente legate alla attività vulcanica. Piuttosto converrebbe indagare attentamente la natura litologica e la struttura stratigrafica delle adiacenze di Spoleto, per non edificare sull' arena delle ipotesi a base di geotectonica in tutto od in parte immaginaria, come pur troppo molte volte è accaduto. Ma sgraziatamente io mi sono fermato nei dintorni di Spoleto pochi giorni, quasi sempre con cattivo tempo; in seguito, per motivi di salute e per impegni di ufficio, non ho potuto approfondire lo studio geologico delle formazioni secondarie, le più importanti nell' argomento, e debbo riferirmi ad alcune mie osservazioni fatte anni sono in una gita da Spoleto a Norcia ed alle indicazioni favoritemi dal mio egregio amico, il colonnello Antonio Verri, che della geologia dell' Umbria è certamente il migliore conoscitore. Altre notizie ebbi inoltre dal signor professore Arpago Ricci di Spoleto, che da molti anni attende alle osservazioni meteorologiche e sismiche in quella città, e che ebbe non piccola parte nell' inizio dell' industria della estrazione delle ligniti nei dintorni di S. Angelo e di Morgnano, a breve distanza da Spoleto. A questi signori attesto pubblicamente il mio animo grato. Inoltre, consultai le pubblicazioni del compianto conte Toni e la interessante Memoria del signor ingegnere P. Toso, del R. Corpo delle Miniere; e per gentile consenso del signor ing. Zezi direttore del R. Ufficio Geologico di Roma, ho potuto consultare le due tavolette di Massa Martana e di Spoleto coll' abbozzo di rilievo, quale servì per la Carta geologica a piccola scala, pubblicata da quell' ufficio. Ad onta di questi elementi, devo deplorare di essere appena approssimativamente informato della stratigrafia della regione e posso soltanto manifestare il desiderio che altri se ne occupi più efficacemente di quanto a me fu possibile di fare. Tuttavia non credetti di dover tacere del tutto, perchè il mostrare la necessità di uno studio può talvolta giovare, nel senso di invogliarne altri a compierlo; ed ancora perchè ho desiderato di rendere di pubblica ragione i dati di sismologia storica per la Valle Umbra, raccolti con molta cura dall' egregio signor Corradi.

Ricorderò anzitutto, per chi non conosca la orografia della regione, come la città di Spoleto sorga sopra un dosso calcare degradante verso sera in un terreno *breccioso*, quindi di ghiaje, sabbie e marne del Terziario recente; mentre a levante il dosso calcare è tagliato da profondo solco, percorso dal fiume Tescino, che viene da sud e segare il dosso di Spoleto dal M. Luco; quello alto 423^{m} colla rocca, torreggiante a 85 metri sul fiume, questo che si eleva a 830^{m} con bellissimi dirupi sporgenti dalla folta vegetazione di lecci e di roveri. Tra la rocca e le falde di M. Luco si erge il famoso ponte-acquedotto, in parte di costruzione romana, poi riattato ed inal-

zato nel medio evo; opera veramente meravigliosa e di buona garanzia a conferma della verità di sopra accennata.

Mentre la profonda valle del Tescino, scavata dall'erosione fluviale nella compatta roccia calcare, limita il dosso della rocca, sul quale posa altresì la parte elevata della città, una depressione nella quale si potrebbe scorgere una traccia di un antico decorso di acque, separa il dosso dal Colle Risciano e dal M. Pincio (445 e 377^{m}), che sorgono a sera della città. La parte più bassa di questa riposa sulla breccia calcare e soltanto in piccola parte sulle sabbie e ghiaje plioceniche. La strada per Collerisana, in parte fiancheggiata dal portico della Madonna di Loreto, che poi discende ancora più a sera nella valle del Maroggia, separa le ghiaje, le marne e le sabbie plioceniche della roccia calcare, che appena a sud di Spoleto forma entrambe le sponde della valle del Tescino, rimontata dalla strada nazionale per Terni. A settentrione poi si apre la fertile ed amena vallata Umbra, solcata dal Maroggia e dallo storico Clitunno; essa vallata presso Campello si stende ad altitudine di 290 a 220^{m}, foggiata a gettate ed a conoidi alluvionali, e verso nord si apre sempre più sotto Trevi, Spello, Foligno ed Assisi, sin presso alla confluenza del Chiascio nel fiume Tevere.

Scende il Maroggia per la valle seguito dalla ferrovia da Spoleto a Terni, attraversa terreni calcari, mesozoici, sino sopra Porchia, quindi terziari pliocenici; con largo sviluppo di alluvioni, che a ponente di Spoleto riempiono un rimarchevole largo di valle allo sbocco del R. di S. Severo, contornando a sud il Col Ferretto, di calcare. Appunto a questo sprone di calcare mesozoico, tagliato dal Maroggia in modo somigliante a quello della rocca di Spoleto, tagliato dal Tescino, si appoggia con discordanza il terreno pliocenico lignitifero di S. Angelo in Marcole, del quale parleremo più sotto.

La valle del Tescino nelle adiacenze a sud di Spoleto è totalmente scavata in terreno calcare con discreto sviluppo di alluvioni recenti. Le alture a levante, sono più importanti, notandosi oltre all'accennato M. Luco, il M. Colonne (963^{m}) ed a mezza distanza tra Tescino e Nera, il Montecchio (1074); quelle del versante occidentale sono più umili, quali il M. Carmelano (890^{m}), il M. Pio (777), il M. della Croce (701^{m}), li Rossi (659^{m}), M. del Moro (638^{m}) ed il dosso a sud Collerisana (437^{m}); i dossi del pari calcari a sud di Spoleto, di S. Paolo e dei Cappuccini sono a 369 e 450^{m}.

A ponente ed a nord-ovest di Spoleto, al versante occidentale della valle Umbra si osservano ampiamente sviluppate quelle alluvioni plioceniche, che contengono la lignite; più a monte, dei colli di arenarie e marne eoceniche (terziario antico), quindi sino al crinale dei Monti Martani, le masse calcaree mesozoiche, che toccano nella più alta cima la quota di 1094^{m}; e questa ruga mesozoica separa il bacino terziario di Spoleto da quello più ampio di Massa Martana, Acqua-Sparta e Todi, percorso del Tevere.

A levante ed a nord-est della città di Spoleto si stendono dossi calcari, di terreni mesozoici, sui quali si ergono in amenissima postura Eggi, Bazzano, Porretta, Castello, Pizzo, Bovara e Trevi; e più oltre, Coste, Mattigge, Cancellara e Cesta, fino al piano di Foligno; più a nord ancora, Spello ed Assisi. Un tenue lembo pliocenico si osserva da questo lato appena fuori di Spoleto, nella regione Licino sin dove

la ferrovia passa il Fosso Cartoccione (281^m), ed altra eminenza pliocenica sporge dalle alluvioni ai colli di Croceferro (295^m) e di S. Tommaso (362^m) a nord di Spoleto ed a levante della confluenza del Tescino nel Maroggia, a valle di Ponte Bari (276^m).

La esistenza in larga e continua zona del pliocene alluvionale dal lato occidentale della Valle Umbra e la mancanza di esso quasi assoluta sul versante orientale, alle falde dei monti di calcare mesozoico, è un fatto importante nella orogenesi della regione; poichè esso dipende dall' altro fatto che la prevalente inclinazione di questo terreno è verso est e sud-est, accennando ad un prevalente sollevamento a nord-ovest, già notato dal signor Verri quando trattò dei movimenti quaternari del suolo nell'Umbria, in rapporto colle manifestazioni vulcaniche del M. Amiata e del gruppo Vulsino. D' altro lato poi, la sporgenza dell'isolotto pliocenico di S. Tommaso ed il residuo dello stesso terreno a nord-est di Spoleto, in R. Licino, dimostrano come, anteriormente al deposito delle alluvioni posterziarie ed attuali, costituenti il piano della Valle Umbra, la formazione pliocenica sia stata, oltrechè sollevata, rotta e smembrata in grandi masse inclinate come si disse, altresì erosa e modellata in colli e dossi, che poi vennero parzialmente dalle alluvioni interrati. Fu questo certamente un episodio della denudazione, operata dalle prime abbondanti precipitazioni acquee del periodo diluviale, alla quale conseguì un' azione di interrimento, e quindi una terza fase di terrazzamento; della quale ultima però nelle alluvioni della valle Umbra troviamo non profonde tracce, stantechè quivi avvenne piuttosto una sopraposizione che una justaposizione terrazzante di alluvioni; in analogia a quanto è avvenuto in vasti tratti della depressione cisalpina, così nel Piemonte come nel Veneto e nel Friuli. Ed una prova dell' abbondante interrimento posglaciale, esercitato anche in epoca storica dalle correnti nell'Umbria, l' abbiamo manifesta alle porte di Spoleto, dove le alluvioni del Tescino hanno sepolto interamente il bel ponte Romano, del quale furono con appositi scavi resi accessibili gli avanzi. Li visitai, con altre molte importanti antichità di Spoleto, in compagnia del chiarissimo cav. ispettore Sordini.

E poichè ho ricordato le osservazioni e le deduzioni del signor colonnello Verri sui movimenti postpliocenici del suolo in Umbria, manifestate dalla disposizione delle masse plioceniche, non tralascierò di ricordare altresì, come, secondo l'avviso di lui, questi movimenti abbiano, tra l'altro, prodotto un notevole cambiamento nel corso del Tevere, il quale fiume nell' epoca pliocenica aveva foce nel golfo corrispondente alla Chiana seguendo l'attuale valle del Topino. In modo analogo mutarono più volte il loro decorso, durante e dopo il periodo pliocenico, la Nera ed il Velino, lasciando a traccia dei loro antichi passaggi alluvioni e incisioni di selle. Che se fosse conosciuta nel suo dettaglio la stratigrafia delle masse mesozoiche e terziarie, noi potremmo formarci un concetto meno vago di questi movimenti, geologicamente recentissimi, ai quali ponno essere collegati quegli altri impercettibili cambiamenti di posizione delle masse stesse, che secondo molti sismologi sono ritenuti la cagione dei terremoti non vulcanici. Se non chè il corrugamento delle masse calcari mesozoiche fu incomparabilmente più complicato in confronto della dislocazione delle masse plioceniche e non sarà certamente agevole, anche con un minuto rilievo, di distinguere quali siano precisamente le più recenti fratture e quale il senso dei più recenti movimenti di massa.

Epperò bisogna che per ora ci accontentiamo all'idea che questa regione spoletina fu sconnessa da rilevanti movimenti, dovuti alla prevalenza di una spinta dal lato occidentale, avvenuti in epoca quaternaria e con tutta probabilità continuati, sebbene in scala assai minore, in epoca attuale.

Quanto alla struttura dei calcari mesozoici a levante ed a sud di Spoleto, poco posso esporre di sicuro. Le tavolette dell'Ufficio geologico segnano un largo sviluppo di dolomia e calcare *retico* nella parte bassa dei due versanti della valle del Tescino e in due noccioli di anteclinale convergenti in Spoleto da est sino da Matrignano e di sud-est sino da Renzano; e sopra questo terreno retico il calcare cristallino del *Lias superiore*, il calcare compatto del *Lias medio* ed i calcari rossi o variegati, scistosi del *Lias superiore;* più a nord-est nei dossi sopra Castello, Eggi e Trevi *Creta* e *Lias superiore.* Secondo questa interpretazione bisogna ammettere una faglia a levante di Spoleto, tra la Creta ed il Retico ed altra faglia, per un certo tratto della valle del Tescino, dalla gola sotto la rocca di Spoleto al ponte di Pompagnano. Non mi pare che questa disposizione combini colla natura e colla disposizione di strati da me osservati, e nemmeno colle indicazioni che mi furono comunicate dal signor Arpago Ricci. È molto probabile che, piuttosto che retico, il calcare inferiore di M. Luco, al quale sembrano in fatto appoggiarsi gli strati della rocca di Spoleto, di certo non dolomitici, appartenga al Lias inferiore, come quel calcare rupestre, che è assai sviluppato nei dintorni di Terni e di Cesi ed anche lungo la valle dell'Esino a levante di Fabriano. Il Lias superiore certamente esiste a sud di Spoleto e precisamente lo rappresentano, come risulta dalle tavolette dell'Ufficio Geologico, i calcari scistosi variegati, che si vedono sotto al calcare della rocca, quindi lungo la strada sotto ai Cappuccini e più a sud ancora in più siti presso al Palazzo; io vi raccolsi in quest'ultima località un esemplare di *Leioceras discoides* Zittel, ed in parecchi altri siti furono raccolti od avuti dal signor conte Toni altre ammoniti, assai probabilmente del Lias superiore o medio. Ma il calcare della rocca di Spoleto e quell'altro che prevale nel versante occidentale della valle del Tescino superiormente alla stretta zona degli scisti variegati liasici, e che contiene selci in nuclei od in straterelli, inalterate o decomposte (come spesso avviene della piromaca nei terreni giuresi e liasici lombardi) a me sembrano rappresentare piuttosto che il Lias, qualche gruppo di piani giuresi, al pari dei calcari giallicci, distinti dal signor Verri nelle conche di Terni e di Rieti. Il Lias superiore, colla stessa roccia scistosa, ricompare a nord di Spoleto alle fonti del Clitunno; forse esso orizzonte determinando, perchè di roccia meno permeabile, la esistenza delle fonti. Più a nord ancora, dal M. Pensa di Trevi, da M. Pettino, dalle falde e dal dorso del Subasio provennero alla raccolta del conte Toni i bellissimi fossili liasici, che furono poi determinati da Meneghini e da Canevari. Nè manca il piano ad *Aptichi,* forse distinto dal Lias superiore, essendo stato raccolto l'*Aptycus profundus* a Sustrico, poco lungi dal Palazzo, e gli *A. lamellosus* e *punctatus* a Colle Risano. Ma è noto come sia facile confondere, in mancanza di una sicura determinazione di copiosi fossili, i vari piani ammonitici della serie giurese; in particolare nell'Appennino centrale, dove si presentano del pari quelli liasici di Lombardia e del Friuli e quelli giuresi del Veneto. Nè la ricerca meriterebbe d'essere fatta soltanto per la constatazione paleontologica

delle serie, ma perchè essa è indispensabile per un esatto rilievo stratigrafico. Ora possiamo dire soltanto che la massa di calcari secondari attorno ed a sud di Spoleto comprende certamente tutta la serie giurese e liasica, forse anche estesa all' imbasso sino al calcare cereo del retico superiore (*infralias*), qualora si possa constatare l' equivalenza del calcare cereo di M. Luco alla roccia per verità molto simile che nelle Prealpi Bresciane dicesi *corna*. Quivi questa roccia, stante la sua considerevole potenza e straordinaria compattezza, esercitò una notevolissima influenza nel corrugamento orogenetico, determinando i più strani scorrimenti, quali ad esempio furono rilevati abilmente dal signor Cozzaglio Arturo sulla sponda occidentale del Lago di Garda. E richiamo questo esempio perchè qualcosa di consimile parmi che sia avvenuto presso alle fonti del Cortaccione, dove attinge acqua la conduttura per la città di Spoleto, recentemente sistemata dall' egregio signor ingegnere Bresadola Pompeo; località interessantissima, che visitai appunto con questo signore e col chiarissimo signor cav. Abetti, sottoprefetto di Spoleto, entrambi verso di me assai gentili per tutto il tempo che passai in quella città.

In quella località si osserva che tra la scaglia rossa cretacea, la quale per la sua poca permeabilità rappresenta la massa che arresta le acque sotterranee, ed il calcare cereo, probabilmente retico, che forma la grossa e fratturata massa acquifera, manca, per quanto ho potuto vedere e per quanto anche risulta in parte dalla tavoletta dell' Ufficio geologico, la serie dei calcari giuresi e liasici, i quali invece è assai probabile che compajono più a nord sotto alla scaglia, fortemente inclinata verso sud-est, in corrispondenza alla sorgente. Epperò quivi parmi che sia avvenuto uno scorrimento della massa calcare retico sopra una frattura obliqua; così da venire a contatto le due formazioni, retico e cretacea, come appunto avviene le molte volte nella accennata regione della Riviera Gardense. Se così di fatto stanno le cose, si avrebbe un piano di frattura approssimativamente diretto da ovest a est, che verrebbe a concorrere nei pressi di Spoleto con quelle altre fratture, che indubbiamente vi esistono in senso parallelo alle valli del Tescino e del Maroggia ma che sono meno chiaramente accennate.

Quanto poi alla composizione ed alla disposizione del sistema cretaceo, posto fuori di dubbio che ad esso appartenga la detta scaglia rossa (*calcari marnosi rossi scistosi a globigerina*) sviluppatissima in tutto l'Appennino centrale come nel Veneto, nel Friuli ed in alcuni tratti della Lombardia, rimane ancora il dubbio, che mi accennava l' egregio amico Verri, che nelle adiacenze di Spoleto cominci già a manifestarsi quella interposizione di *masse calcari a Rudiste*, che caratterizza l' area circostante all' Abruzzo Aquilano. Rammento che, a quanto mi viene comunicato dal signor prof. Ricci, nella collezione Toni esistono un *Radiolites squamosa* raccolta in alcuni campi tra Porretta e Silvignano, un *Echinocorus conicus* dai monti di Sellano ed un *Hamites dissimilis* dalle alluvioni del Tescino, presso Palazzo; e lo stesso professore mi informa di avere osservati anche al piano di S. Maria, a sud di Castellaccio, quegli stessi strati che egli trovò nella località dalla quale provenne la detta Radiolite. Ma sia o meno presente, con efficacia sensibile sulla orogenia, questa *facies* del *cretaceo a Rudite* anche nello spoletino, se confrontiamo la catena dei Martani come è segnata sulla Carta Geologica d' Italia a piccola scala, colla massa di mon-

tagne tra la Valle Umbra e la Valle della Nera, vediamo che in questa massa il cretaceo prende uno sviluppo straordinario; il che ci fa ritenere assai probabile che una più minuta ricerca abbia a svelare complicati corrugamenti e conseguenti affioramenti di terreni secondari più antichi della Creta. Dal complesso, insomma, nulla di sicuro quanto alla stratigrafia mesozoica della regione spoletina; soltanto qualche indizio, qualche barlume per invogliare chi ne abbia opportunità a voler sottoporre anche questo paese ad un' analisi stratigrafica paziente, non già occasionale e fugace, come fu il caso si può dire generale dell' Appennino centrale, di cui si comincia appena ora ad avere la carta topografica in scala sufficiente per rilievi geologici.

Frattanto converrà però rilevare un fatto che risulta dalla descrizione del campo lignifero di S. Angelo e Morgnano fornita dal signor ingegnere Toso e che ebbi a verificare in compagnia col signor prof. Ricci. Esso consiste nella esistenza di uno sprone calcare, in parte sepolto dai terreni terziari e quaternari, che dipartendosi dal Col Ferretto (390^m) sulla sinistra del Maroggia, a ponente di Spoleto, si avrà in direzione di nord-est-nord a Col Fiorito, Casa Luzzi (350^m), Collicelli presso il ponte Bari (305^m) e S. Venanzio (280^m). Quivi si presenta la direzione degli strati presso a poco parallela a quella del calcare giurese sottostante alla rocca di Spoleto. Che sia tutto calcare giurese non saprei dire; ma è un fatto che questo residuo di terreno mesozoico sotto l' infranta massa del pliocene lignitifero del bacino Spoletino, che si protende come un cuneo a nord della grande massa dei calcari mesozoici in cui sono scolpite le valli del Tescino e del Maroggia, costituisce una condizione tectonica di qualche importanza per la distribuzione di quegli scotimenti sismici, che sono pur troppo frequenti nelle adiacenze di Spoleto. Noto altresì che la prevalente inclinazione a ponente degli strati calcari è contraria a quella dei banchi lignitici e delle rocce alluvionali e lacustri, dalle quali questi banchi sono compresi; e questa justaposizione discordante può avere del pari una influenza sulle condizioni di equilibrio delle masse rocciose.

L' accennato lavoro del signor ing. Toso mi permette di aggiungere qualche dettaglio, a mio avviso non da trascurarsi dal punto di vista sotto cui consideriamo la regione Spoletina. Dopo il giacimento lignitifero di Val d' Arno, quello presso Spoleto è il più importante fra i depositi di *lignite xiloide*. La lignite si compone almeno per una terza parte di legno fossile perfettamente conservato e di una massa scistosa, carboniosa, più o meno compatta, intersecata da straterelli di argilla; i quali sono poi alla loro volta disseminati di parti legnose, del pari ben conservate. Il banco coltivato ha una potenza variabile da 5 a 7 metri. Al sud, verso S. Angelo, posa direttamente sopra conglomerati a ciottoli calcari, oppure su marne scistose riferite all' eocene; a Morgnano invece, tra la lignite e queste marne esiste uno strato di 8 a 9 metri di argille rimaneggiate, con straterelli di conglomerato. Il tetto del banco è formato da marna più o meno sabbiosa, alternata a conglomerati. Evidentemente il banco rappresenta una formazione lacustre, come è comprovato anche da conchiglie trovate presso Morgnano e da ossami, che furono riferiti dal prof. Pantanelli al *Mastodon Arvernensis*, al *M. Borsoni* ed al *Tapirus Arvernensis*, e deve ritenersi coevo alla formazione analoga di Valle d' Arno.

Il giacimento venne esplorato da lavori assai bene diretti, pei quali poteronsi

constatare parecchi salti e delle importanti variazioni di pendenza. Mentre questa è di solito tra i 20° e 35° a sud-est-est, nella parte mediana del campo minerario di Morgnano si avverte una disposizione ad anteclinale, ciò forse accenna ad una irregolarità del fondo, in cui si raccolsero le materie galleggianti sull' antico lago, che occupava in parte l' attuale valle Umbra. I salti o meglio le spezzature del banco sono evidentissimi nei cantieri Morgnano e S. Croce, di cui si hanno le sezioni nella tavola III, che accompagna la descrizione dell' egregio ingegnere.

Alla miniera di S. Angelo furono stabiliti i tre cantieri di Moje, Colle Fabbri e San Filippo, ora tutti in comunicazione; tutta la lignite si estrae dal solo pozzo al primo cantiere, profondo 43^{m}. Alla miniera di Morgnano sonvi due cantieri, di Morgnano e di S. Croce, il primo con un pozzo di 50^{m}. A S. Angelo, le fratture avvennero in generale secondo linee parallele alla inclinazione; a Morgnano invece secondo la direzione. Le condizioni di estrazione sono meno fortunate a Morgnano, dove l'argilla sottostante al banco di lignite si gonfia appena risenta l' azione dell' aria e dell' acqua; epperò vi si richiedono fortissime armature, persino con grosse rotaje di acciajo, e frequenti riparazioni. Per lo passato devono essere avvenute alla superficie delle combustioni spontanee della lignite, come lo provano le chiazze di *laterite* (argilla naturalmente cotta, rossa e compatta) che si osservano in più siti e specialmente a Colle Fabbri. Anche al presente una massa, che fu perfettamente isolata, trovasi in combustione lenta di qualche anno, senza però che si avverta il menomo disturbo meccanico nelle masse vicine.

La miniera si cominciò ad esercitare nel 1885 dalla Società Mineraria Appennina e nell' anno seguente fu assunta dalla Società delle Acciajerie di Terni; la quale costrusse 12 kilometri di ferrovia a scartamento ordinario per trasportare il combustibile dove per la massima parte si consuma, cioè a quelle stesse acciajerie; ed al consumo si conforma la escavazione, che nel 1890 fu di 120,000 tonnellate e nell'anno seguente di 200 tonnellate al giorno, al costo di lire 5 alla tonnellata umida, sopra vagone.

Il giacimento fu giudicato dal signor ingegnere Toso, come esteso almeno 3 ½ milioni di metri quadrati, quindi contenente non meno di 11 milioni e ½ di tonnellate di lignite. Rimontando poi all' origine di questo importante deposito, il signor Toso, attribuisce all' accennato sprone calcare del Col Ferretto a S. Venanzio la cagione perchè il legname galleggiante nelle piene di una fiumana, che preluse col suo decorso all' attuale Maroggia, si raccogliesse dal lato occidentale dell' antico bacino Umbro; poi le alluvioni plioceniche, soperchiato quello sprone, seppellirono il tutto con una massa, che in seguito fu spostata e rotta dai movimenti posterziari del suolo. Qualcosa di analogo avvenne anche nel deposito di Leffe, laterale alla Valle Seriana, in provincia di Bergamo; poichè anche colà le alluvioni preglaciali copersero una massa di argille lignitifere, formata in gran parte di torbe, ma con frequenti tronchi di legname fluitato. Se non che il deposito di Leffe è alquanto più giovane dello Spoletino, essendosi formato all' aurora del periodo diluviale, però quando viveva ancora l'*Elephas meridionalis*, compagno in Val d' Arno alle accennate specie di rinoceronti.

Per quanto io sappia, nelle adiacenze di Spoleto non si osserva quel grande sviluppo di travertino, che presso Terni, in vari tratti dell' Abruzzo, nelle vicinanze

dell' antica Carsoli, a Massa Martana e in tanti altri siti dell' Italia Centrale attesta la grandiosità della traspirazione di acido carbonico dalle dilacerate masse calcari, quando volgeva al suo termine l' attività vulcanica tirrena; la quale appunto aveva avuto luogo secondo le fratture, determinate dai movimenti di suolo posteriori al pliocene. Ma non pertanto dobbiamo ammettere che anche nella valle Umbra sia avvenuta quella intestina cariatura delle masse calcari, che preparò le vie alla circolazione sotterranea delle acque; ed anzi, che questa erosione interstiziale possa in certa misura anche tuttora avvenire. Ma ammesso pure che ciò sia accaduto e che accada, potremo noi a questa sotterranea azione delle acque solventi attribuire con qualche sicurezza una efficacia nel produrre dei cedimenti di masse e dei conseguenti scotimenti sismici, quando noi vediamo delle vastissime regioni, come l'Istria ed il Giura, dove la circolazione sotterranea è meravigliosa, come tutti sanno, e che tuttavia figurano tra le regioni meno esposte ai terremoti? Nè il fatto di essere stati gli ultimi terremoti spoletini e parecchi degli avvenuti per lo passato nell' Umbria assai circoscritti, ci abilita per se stesso a dare la preferenza a questa spiegazione dei terremoti per erosione sotterranea delle acque: poichè abbiamo nelle Alpi delle regioni del pari esposte a terremoti molto limitati, quali le valli del Pellice e del Chisone in Piemonte, i dintorni di Briga nella valle del Rodano, le adiacenze di Tolmezzo in provincia di Udine, dove non si hanno argomenti per ammettere eccezionale lavorio delle acque sotterranee; mentre talora, come per Tolmezzo, le condizioni stratigrafiche suggeriscono piuttosto la preferenza della ipotesi di adattamento progressivo di masse secondo un sistema di spesse ed incrociantesi fratture.

In questo argomento dei terremoti non vulcanici, siamo ancora in una fase analitica, nella quale sembrami permesso un certo grado di ecletticismo, che non comporti lo escludere a priori un ordine di ipotesi; quindi mi guarderò dal voler negare assolutamente che anche pei terremoti di Spoleto l' erosione intestina dalle acque, esercitata nelle infrante masse calcari, possa essere una delle cagioni dei movimenti di suolo lamentati. Soltanto faccio considerare al lettore che se abbiamo nei dintorni di Norcia una regione sismica in località dove anche il rinascimento delle acque si presenta in mirabile copia, a poca distanza da Spoleto le famose fonti del Clitunno non segnano, a quanto parmi, un' area della valle Umbra dove i terremoti sieno più che altrove violenti nè frequenti. Che se volessimo preferire questa spiegazione per erosione sotterranea dei terremoti umbri, non potremmo poi darci ragione del perchè questi sieno stati assai più violenti, in taluni periodi, nel piano e su rocce plioceniche come a Scafali ed a Bevagna, anzichè su roccia calcare, la quale doveva più direttamente risentire l' effetto della causa supposta. Certamente è da augurare alla popolazione umbra che non tanto frequenti e non disastrosi accadano di cotali fasi sismiche, fosse anco a patto che le idee sulla causa da preferirsi per essi terremoti rimangano oscure. Ma argomento che non sia ad ogni modo da lamentare se l'attuale incertezza ci lasci nel timore che la violenza dei futuri terremoti umbri possa dovunque manifestarsi con pari pericolo, sia nel piano, sia sui colli terziari, sia sulla roccia soda dei dossi calcarei; se ad onta di tutte le ipotesi dei sismologhi, chiunque possegga un palazzo od una casa o si accinga a costruirne, abbia ognora presente questa eventualità, pur troppo molto frequente in pressochè tutta la nostra penisola ed in Sicilia.

Ho segnato nell' unito schizzo geologico quel poco che si conosce sulla distribuzione delle masse rocciose sulla regione Umbra considerata nel presente scritto, facendo voti perchè presto sieno resi di pubblica ragione i rilievi estesi a tutta la provincia di Perugia del signor colonnello Verri, i quali saranno eccellente preparazione al definitivo rilievo tectonico, da farsi sistematicamente, con sufficiente personale e con ampio e ben accertato controllo dei criterî paleontologici.

Ora vediamo della fase sismica dello scorso anno, cominciando da uno sguardo sulle condizioni generali sismiche della penisola, secondo i dati che mi furono gentilmente comunicati dall' egregio signor dott. Mario Baratta, del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica di Roma.

Aprile. Le manifestazioni di attività dei centri sismici dell' Italia peninsulare furono leggere: qualche scossa appena sensibile nel Ferrarese, in val di Susa e nel Beneventano; seguitano leggeri movimenti nella regione Calabro-Messinese, non ancora tranquilla dopo il grande parosismo del novembre 1894. Il massimo d' attività degno di nota è il terremoto, che il giorno 13, a 16^h circa colpì la parte meridionale della provincia di Catania e quella di Siracusa, causando specialmente a Licodia Eubea ed a Pizzini varie lesioni negli edifici e panico generale. A Zaffarana etnea a S^{ta} Venerina ecc. nel giorno 15 si sentirono altre scosse ed il 16 parecchie assai sensibili posero in allarme la popolazione di Cammarata e di S. Giovanni Gemini in quel di Bivona (Girgenti).

Nella notte del 14 al 15 aprile (23^h $^1/_4$ circa) un terremoto fortissimo, che fu disastroso a Lubiana nella Carniola, si propagò per gran parte dell' Italia settentrionale e centrale, producendo varî danni, fortunatamente leggeri e screpolature negli edifici, caduta di comignoli o di qualche porzione di muri vecchi, in parecchie località della provincia di Udine, Venezia e Treviso. Nella stessa notte e nei dì seguenti, si sentirono altre repliche, le quali però andarono semprepiù perdendo di intensità e scemando di numero.

Maggio. In questo mese si può dire che l' attività sismica siasi concentrata nella Toscana. Prescindendo da una sensibile scossa a Reggio Emilia il 12, nel 9 due scosse colpirono la Romagna e la Toscana ed il 10 il Senese. Il 18 abbiamo il terremoto rovinoso che colpì la parte sud-ovest, sud e sud-est del suburbio Fiorentino, con gravi danni a Grassina, al Galluzzo, all' Impruneta, e minori a Firenze, S. Casciano ecc. Per tutto il mese si intesero repliche più o meno frequenti. Oltre a ciò scosse sporadiche, localizzate e lievi, colpirono il Mugello, Prato, il Senese ecc. Nella terza decade, una serie di scotimenti ancora molto localizzati si resero sensibili in una parte della provincia di Rovigo, il maggiore dei quali, del 25, si estese anche al Ferrarese. Colla scossa del 21 aprile o meglio con quella dell' 8 aprile, che si sentì sussultoria a Spoleto, si può ritenere incominciato il periodo sismico in questa porzione di Umbria, il quale periodo vedremo come appunto in maggio abbia attinto uno dei suoi massimi.

Giugno. Le manifestazioni sismiche accennano ad un sensibile decremento; l'Italia settentrionale rimane la più interessata nei moviventi, che continuano a farsi sentire nelle provincie di Rovigo e Ferrara. Alle 2^h $^3/_4$ circa del giorno 10 un esteso terremoto colpisce la parte orientale della Valle Padana; prosegne l' agitazione del suolo

nella Toscana, presentando un lieve massimo il giorno 6. Nell'Umbria si hanno varie scosse a Spoleto ed a Perugia ed una se ne risente nell'Aquilano, il 30. Nell'Italia meridionale e insulare, calma quasi assoluta, tranne qualche lieve commossione a Palmi, all'Etna e ad Ustica.

Luglio. Anche in questo mese l'attività sismica fu abbastanza debole; però avvenne un leggero incremento rispetto al giugno e più che in questo mese essa si mostra distribuita in varî focolari, tranne che in Lombardia, Veneto, Marche, Penisola Seleutina e Sicilia occidentale. Si ebbero infatti scosse più o meno sensibili: in Piemonte il 7; a Firenze il 30, con una scossa assai sensibile nei luoghi stati danneggiati nel maggio; nell'Umbria il 13, il 24 e 29; nel sistema vulcanico Laziale il 18; nell'Aquilano il 3, in Capitanata il 14-15; il 19 in Terra di Lavoro e Basilicata; in Calabria il 4 e 6, il 20, il 23, il 25-27; a Catania il 20 ecc. Il massimo mensile si ebbe a Comacchio, con una scossa avvenuta il giorno 30, che produsse lesioni e qualche altro danno.

Il Vesuvio, che nel mese precedente si trovava in fase stromboliana, fece una eruzione laterale, con mediocre emissione di lava, il 3 luglio.

Agosto. Il risveglio manifestatosi alla fine di luglio andò accentuandosi nella prima decade d'agosto con due forti terremoti: il primo, del 7, colpì la Toscana e si estese sensibilissimo nell'Emilia, nella Romagna, nel Veneto ed in parte della Lombardia; l'altro del 10 spiegò la sua massima intensità fra la costa adriatica prospiciente le Tremiti e queste isole e si irradiò in buona parte dell'Italia centrale e settentrionale, specialmente nel versante adriatico. Si iniziò inoltre un periodo sismico sulla sponda veronese del lago di Garda; altre scosse succedettero qua e colà nella Toscana, ma tutte lievi ed assai localizzate. Per l'Umbria si avvertì un massimo alla mattina del 25.

Settembre. In questo mese il massimo sismico toccò all'Umbria, come vedremo; nei dì 4 e 5 alcuni terremoti abbastanza forti recarono qualche danno a Civitella, a Portico di Romagna ed adiacenze, ove si ripeterono il 13 ed il 17. Si risvegliò altresì l'attività sismica nella Liguria occidentale e qualche scossa si ebbe sul Bresciano e sulla riviera veronese del Garda. Il radiante calabro fu urtato dapprima a Monteleone (15 e 16) poi a Palmi (23 e 26). Al 29 lieve scossa a Ustica.

Ottobre. In questo mese l'attività fu assai sensibile, specialmente nell'Italia centrale, non tanto per l'intensità quanto per la frequenza delle scosse. I dintorni di Firenze furono fortemente scossi il 6, sensibilmente il 10 e lievemente il 15; nel Senese, in specie a Poggibonzi, si ebbero moltissime scosse nei giorni 19-21; dopo una tregua di 48 ore, nella notte 24-25 si ebbero due scotimenti abbastanza estesi in confronto ai precedenti; il 25 il suolo fu quasi in continuo tremito, decrebbero le scosse nel 26, 28 e 30. Nei dintorni di Fermo, si ebbero due mediocri scosse il 25 ed altre lievi il 26 e 29. In tutta la prima decade fu agitata l'Umbria e specialmente Spoleto.

Nell'Italia meridionale si avvertirono lievi scosse a Reggio, due allo Stromboli il 9 ed una a Licata il 27.

Nell'Italia settentrionale il 12 e 13 scosse a Malcesine e dintorni, sul Garda, con qualche danno negli edifici; un piccolo terremoto in Piemonte il 16 ed uno in Friuli il 26 seguito da altro il 30.

Novembre. Il massimo sismico di questo mese offre un fortissimo terremoto, sentito in Roma il 1° novembre; in città e nei luoghi vicini produsse qualche danno e pare con probabilità che abbia avuto il suo centro in mare. Nella regione centrale si sentirono parecchie scosse, leggere o mediocri nel suburbio fiorentino, nell' Umbria, nell' Aquilano, nella Romagna. Qualche leggera commozione fu pure avvertita in Piemonte e Valdieri, in Lombardia a Sondrio, nel Veronese e nel Trevigiano. Nel mezzoggiorno calma assoluta, tranne due scosse in Calabria al 18 e 26; il 30 lieve scossa a Ustica.

Dicembre. Calma sismica quasi ovunque; solo qualche leggera scossa nell' Ossola 4, a Tolline 9, a Firenze 21, a Perugia 7-8, nel Vallo di Diana 18. Un lieve massimo commosse il 25 la Liguria occidentale, incutendo un poco di panico a Portomaurizio.

Venendo ora al periodo sismico di cui ci occupiamo, che tenne agitati gli abitanti di Spoleto e dintorni per oltre sei mesi, è dubbio se debba esso considerarsi aperto colla scossa del 1 aprile, oppure da quella del 21 aprile, di cui fu informato l'Ufficio Centrale; la prima però fu più sensibile, sussultoria, breve, del 2° grado di intensità (della Scala Forel-De Rossi). Entrambe ad ogni modo sono a ritenersi preludî del fenomeno, che incominciò con veemenza al 20 maggio. Ecco le notizie che mi furone fornite dal signor prof. Arpago Ricci.

20. Maggio. Ore 16,32', forte scossa sussultoria, che in breve si fece ondulatoria e più forte, in direzione da sud sud-ovest a nord nord-est dapprima, poi da est est-sud a nord-ovest ovest; durata complessiva di 6" a 7"; intensità nel locale dell'Osservatorio all' ex convento di S. Benedetto, di 8° e 9° della detta Scala.

Il tromometro mostrò un' ampia oscillazione nella direzione prima, poi nella seconda e dopo due ore si fermò; l' asta in billico del sismoscopio Cecchi cadde da est a ovest. In città e nelle campagne della Valle Umbra, specie verso nord, caddero comignoli, qualche volta, qualche pezzo di muro, un parafulmine dal Duomo, piegandosi a sud; riapriromsi molte fenditure antiche aprendosene qualcuna di nuova, s' accrebbe lo strapiombo di alcuni fabbricati, che si dovettere puntellare o restaurare; si ruppero due chiavi dirette da nord a sud nel porticato della Madonna di Loreto fuori della porta S. Matteo, ed altra chiave al Crocifisso. Il terremoto aprì nel viale provinciale interno alcune fenditure trasversali, due avanti alla casa Bachilli ed altre di fianco al Teatro Nuovo. Se si eccettuano due feriti fortuitamente, ad onta del grande panico incusso, non furonvi disgrazie.

Sulla estensione della scossa, dalle notizie avute dal R. Ufficio Centrale risulta che fu registrata dal sismometrografo di Roma, Collegio Romano (principio 16°, 33' e 5"; massimo 16°, 33' 30"; fine 16° 35); quindi, ritenuto che la scossa partisse dalle adiacenze di Spoleto, dove fu più intensa che altrove, essa avrebbe percorso la distanza che intercede colla velocità di circa 1600 al secondo. Fu risentita del pari da un sismoscopio Cecchi a Rocca di Papa a 16°, 32' e 2" (momento che non coincide col massimo di Roma).

All' osservatorio Ximeniano di Firenze fu avvertita a 16°, 33' e 30" ed a 16°, 32' 57" a Siena col microsismografo Vicentini. È dubbio che sia stata realmente risentita a Velletri.

A Narni, fu intesa da moltissime persone e produsse suono di campanelli; un poco meno forte a Terni ed a Cesi.

A Sellano, nei monti di val di Nera, ad oriente di Trevi, ondulatoria, con direzione nord-sud, di 2″, abbastanza forte con rombo.

A Foligno, ondulatoria, direzione nord-sud durata 2″, con rombo, intesa da molti, con scricchiolio di mobili.

A Todi, ondulatoria, direzione nord-est sud-ovest, durò 3″.

A Giano Umbria, ondulatoria direzione nord-est sud-ovest durò 12″ con panico, tremolio di mobili e d' infissi; il paese è posto a 547^m, presso al contatto della scaglia cretacea colle marne scistose eoceniche.

A Scheggino, sulla Nera a levante di Spoleto, presso al contatto della scaglia cretacea col calcare giurese, la scossa ondulatoria, con direzione sud-ovest nord-est, della durata di 5″, fu intesa generalmente e produsse forte tremolio di mobili.

A Valle della Nera, più a oriente di Scheggiano, fu pure ondulatoria con direzione sud-nord, e con tremolio di oggetti; durata 2″.

A Castel Ritardi, a ponente di Campello ed a nord nord-ovest di Spoleto, la scossa fu del pari ondulatoria e durò 3″; fu intesa da molti.

A S. Gemini, ondulatoria, durò 2″ e fu intesa da molti.

Ad Arrone, sulla Nera a levante di Terni, fu avvertita una leggera scossa ondulatoria, con direzione sud-est nord-ovest.

A Leonessa, ad ovest di Terni ed alle falde nord del Terminillo, una scossa ondulatoria che fece tremare i fabbricati, fu avvertita da molti e durò 3″.

A Norcia fu intesa una scossa ondulatoria con direzione di nord-est sud-ovest con tremolio di infissi e scricchiolio di mobili.

A Monteleone di Spoleto fu avvertita da poche persone in quiete con tremolio di piccoli oggetti.

A Caldarola e Montefalco fu appena avvertita.

A Campello sul Clitunno fu molto lieve ed avvertita da pochi.

A Gualdo Cattaneo, a sud-ovest di Bevagna, fu avvertita da pochi una scossa leggerissima di 2″.

A Trevi una scossa ondulatoria durò pochi secondi e fu intesa da molti, con scricchiolio di impalcature e tremolio di piccoli oggetti.

A Perugia si avvertì da alcuno una scossa ondulatoria con direzione sud-est nord-ovest e fu indicata da un sismoscopio Cecchi e da un pendolo.

Fu dunque un terremoto ragguardevole, sentito sopra un' estensione non piccola che approssimativamente si può segnare tra Firenze, Rocca di Papa, Siena e Norcia, con un massimo di intensità molto localizzato intorno a Spoleto e con intensità relativamente maggiore nella massa montuosa appennina, nella quale, rispetto al centro la estensione della scossa fu meno larga.

Nel mese di maggio si risentirono in Spoleto altre tre scosse: il 21, 5°, 24′ con rombo e tremito leggero, grado 1°, altra sussultoria di grado 2° e 3° al 23, 2°, 48′ ed altra il 27, 18° 22′ con forte rombo, di grado 2°, con provenienza da sud. Manco di dati per escludere del tutto che queste due scosse sieno state risentite anche

in altre località, ma lo ritengo probabile, perchè anche le scosse di giugno furono localizzate; avvennero come segue:

Giugno, 1, ore 7,3′ scossa ondulatoria di 2° a 2°, da est a nord; il 7 alle ore 9, una piccola scossa sussultoria; al 23, ore 14 piccola scossa sussultoria, ed al 29, ore 13,10 altra leggera scossa del pari sussultoria. Il carattere del sussulto accennerebbe dal pari ad un origine locale.

Pel mese di luglio avvenne una scossa sussultoria il giorno 13 alle ore 13,45′ leggerissima ed altra al 24 alle ore 14,36′,30″ con lieve rombo, prima sussultoria poi ondulatoria di sud-ovest nord-est, durò 7″ a 8″ e fu del grado 4° della detta scala. Nel giorno 29 poi si risentì una scossa a Giano d' Umbria, ondulaloria, di 2″ dove anche la scossa del 20 maggio era stata, come si vide, abbastanza intensa.

Assai meno tranquillo fu il mese di agosto; nè solo per Spoleto, ma per tutta l' Umbria, in particolare in valle della Nera. Infatti avvennero le seguenti scosse:

Agosto 9, a Spoleto, ore 18,39′, scossa ondulatoria di sud-ovest nord-est di 4° grado, durò 7″ a 8″; giorno 11, ancora a Spoleto, alle ore 22,37′, breve, sussultoria di 2°; giorno 19, a Cerreto di Spoleto, in val di Nera, una sensibile scossa ondulatoria da sud-est a nord-ovest durata 4″; il 21 a ore 18 una breve e leggera scossa sussultoria ed altra il 22 alle ore 21,15′ del pari sussultoria, entrambe a Spoleto. Il giorno 25, alle ore 1,21′ una scossa sussultoria a due riprese, di 2° a 3° e di 2° si risentiva a Spoleto e presso a poco alla medesima ora a Trevi, Foligno, Cerreto di Spoleto, Montefalco, Norcia, Vallo di Nera, Scheggino e Sellano; in quest' ultima località fu forte di 3″, sensibile o leggera nelle altre, in tutte ondulatoria, con direzione nord-est sud-ovest per Cerreto e Scheggino, e nord-ovest sud-est per Norcia, dove forse avvenne qualche secondo prima. A Sellano poi la scossa si ripetè lieve, ondulatoria con rombo alle ore 1,49′ ed alle 2° 56, ancora ondulatoria con direzione est-ovest.

Il giorno 29 agosto alle 15°,12′ avveniva in Ascoli Piceno una sensibile scossa sussultoria di 2″, preceduta da rombo.

Il mese di settembre fu ancora più agitato, così per Spoleto, come per altre delle accennate località umbre, comprese alcune abbastanza lontane. Infatti abbiamo segnato le scosse seguenti:

Il giorno 11, ore 16,51′, lieve scossa a Spoleto.

Il giorno 12, ore 1,29′, ondulatoria da sud sud-est a nord nord-ovest di 2° o 3°, a Spoleto;

Il giorno 18, ore 0,29′ sussultoria di 1° a 2°, seguita al pomeriggio alle ore 18,36 da altre più piccole di 1° a 2°, a Spoleto.

Il giorno 19, ore 7,3′ altra lieve con repliche ancora più leggere, ondulatorie da sud-ovest a nord-est, a Spoleto.

Il giorno 20, ore 0,30′ leggera scossa a Giano d' Umbria che si ripetè presso ad ore 21; quando anche a Spoleto avveniva altra scossa a ore 21,9′, ondulatoria e sussultoria, con direzione da ovest e est di 2° a 4°; questa scossa fu quivi segnata dal sismoscopio Brassart. Altra scossa si ebbe alle ore 23,31′, sussultoria-ondulatoria da sud-ovest nord-est sino a 5°, del pari avvertita dal sismoscopio, e dagli abitanti, col suono di qualche raro campanello. Siccome la popolazione stava in allarme, così

il panico fu grandissimo, ma non si avvertì alcun danno nè alle persone nè agli edifici.

Il giorno 21, ore 0,30′ altre due o tre scossette si seguirono in Spoleto a brevi intervalli ed alle ore 0,47′ altre simili; alle ore 2,10′ a Giano d'Umbria si avvertiva una mediocre scossa ondulatoria di 6″ con direzione est-ovest; a Sellano alle ore 2,20′ una lieve scossa ondulatoria di un secondo, ed ancora a Spoleto alle ore 2,31′ una forte scossa sussultoria ed ondulatoria est-ovest, di 3″ e più di 6°, notata dagli strumenti, con tremolio di infissi, suono di qualche campanello e di nuovo un grande spavento della popolazione. Altra piccola scossa, con numerose e lievi repliche, si avvertì verso le ore 10 e nel rimanente della giornata; una verso le 11,11′ fu mediocre, con rombi, di 2″ e con direzione est-ovest.

Il giorno 22, a Spoleto nella notte 5 o 6 scossette, a lungo intervallo, e quindi più sensibili alle 5,17′ e alle 11,11′, ondulatorie di 2°-3°, da est a ovest; altra maggiore alle 18,13′30″ sussultoria-ondulatoria da nord-ovest a sud-est, di 3″ di 3° o 4°, con tremolio di oggetti e indicazione del sismoscopio Brassert; altri minori movimenti sussultori ed ondulatori, con o senza rombi, specie alle 18,22′, alle 19,56′ ed alle 20,6′.

Il giorno 23, ancora a Spoleto una piccola scossa ondulatoria alle 5,35′, altra alle 15,15′, poi alle 15,30′ ed alle 15,45′ tutte leggere.

Il giorno 24, ancora a Spoleto piccola scossa di 2° e di 2″ alle 2,27′, altra alle 15,3′ ondulatoria, poi alle 15,40′ ed alle 16,23″, di 2° ondulatoria.

Il giorno 25, a Spoleto alle ore 6,40′ scossa ondulatoria da nord-ovest a sud-est, di 2″, di 2° o 3°, sentita con tremolio di oggetti e seguita da repliche. A Norcia alle ore 10,55′ si avvertì una mediocre scossa ondulatoria, con direzione nord-est sud-ovest, di 2″.

Il giorno 27, a Spoleto, ore 6,57′ due piccole scosse ondulatorie di 1°.

Il giorno 28, a Spoleto, ore 2,25′ piccola scossa ondulatoria di 1°.

Il giorno 29, a Spoleto, ore 3 piccola scossa ondulatoria seguita da altra al mattino, leggerissima. Si avvertì una forte scossa a Morro sentita anche dai contadini che stavano vendemmiando.

Nel mese di ottobre le scosse andarono attenuandosi, ma furono abbastanza frequenti ed io ne avvertii parecchie quando fui a Spoleto; quivi si avvertirono le seguenti:

Il giorno 1-2, ne accaddero parecchie brevi la notte.

Il giorno 2 alle 6,16″ una mediocre ondulatoria di 2″ con forte rombo; ed alle 18,20′ altra leggiera e brevissima.

Il giorno 6, alle 8,50′,45″ una mediocre scossa sussultoria-ondulatoria nord-ovest sud-sud di 2′,3″, seguita dopo 15′ da altra ondulatoria; alle 9,3′ altra scossa leggera.

Il giorno 7, qualche rombo alle 20,18′.

Il giorno 9, alle 18,30′ una lieve ondulazione di 2″.

Il giorno 16, alle 3,40′ a Giano d'Umbria si risentì uno scotimento mediocre, con ondulazione in senso di nord-ovest sud est, durata circa 10″; e si ripetè con lieve sussulto di 5″ a 6″ alle 4,50′. La località fu segnalata anche in precedenti scosse.

Condizioni meteorologiche.

Per chi voglia indagare i rapporti tra i terremoti e le condizioni meteorologiche saranno probabilmente preferite le fasi sismiche non disastrose e lunghe, come quelle di cui noi ci occupiamo. Non sarà quindi fuori di luogo il ricordare i caratteri generali dell'anno 1895 pel clima di Spoleto ed anche i fatti meteorologici dell'anno precedente; potendo essere importante anche la differenza assai marcata tra due anni consecutivi a determinare, se non a causare, la localizzazione delle scosse. Anche per queste indicazioni faccio tesoro dei dati mandatimi dal signor prof. Arpago Ricci, il quale con molta diligenza dirige da molti anni quell'Osservatorio meteorologico.

Se il 1894 fu eccezionalmente asciutto, nel seguente si ebbe uno degli anni più piovosi; essendochè al 20 maggio era già caduta tant'acqua quanta nell'anno precedente. Nel 1894 dominarono le alte pressioni o quelle superiori al variabile; nel primo semestre del 1895 si ebbero a preferenza pressioni sotto il variabile e nel 2° semestre tornarono a prevalere le superiori, quantunque verso l'autunno si avessero le pioggie più torrenziali di tutto l'anno, anzi di tutto il decennio delle osservazioni del signor Ricci. E sarà utile anche il notare che le osservazioni stabilite dai signori ingegneri Dal Bene e Favi sulle miniere di Morgnano e di s. Angelo risulta che l'abbondanza delle pioggie dal dicembre 1894 in poi non si risentì a 60 e 70^{m} dal suolo che verso la metà di febbraio.

L'anno 1895 per Spoleto fu altresì assai freddo nell'inverno, chè il 18 febbraio si ebbe un minimo di — 7°,5C, rimanendo sotto zero anche qualche giorno di marzo. La neve fu abbondante. La primavera fu umida e piovosa e solo l'estate, in luglio, agosto e il settembre si presentò buona, però con un massimo di 29°,5 inferiore al consueto. Le pioggie autunnali furono torrenziali in ottobre, in cui il giorno 10 caddero 141 millimitri di acqua di cui 60 mm. in un'ora e mezza.

L'anno 1894 era stato per converso anormale per la siccità. Per conseguenza le sorgenti del Cartaccione, riallacciate e condotte regolarmente a Spoleto nel 1893-94, ebbero in quell'anno una portata minima di litri 8,5 al secondo; mentre ora si hanno 54 litri al secondo.

Segue una tabella delle pioggie e nevi cadute a Spoleto negli anni 1894 e 1895.

E ne faccio seguire un'altra sulla pressione barometrica a Spoleto nei giorni in cui avvennero terremoti, colla temperatura e indicazione del tempo corrispondente. Quasi la metà del numero delle scosse corrisponde a tempo sereno con pressione alta, compresa la scossa del 20 settembre; la scossa del 20 maggio corrisponde invece ad una delle pressioni minime con tempo nuvoloso. In quasi tutti i giorni delle scosse poi abbiamo una pressione più alta della media del sito; perchè essendo Spoleto a 350 sul livello marino, la media normale dovrebbe essere di mm. 728. Quindi non possiamo affermare che le scosse corrispondessero nè a straordinari abbassamenti di pressione nè a particolare condizione di tempo. Non credo dimostrato che la piovosità eccezionale del 1895 possa avere avuto una influenza sulla localizzazione del fenomeno, quella essendo stata comune ad altre regioni appenniniche non lontane del pari esposte a frequenti terremoti.

Tabella A

ELENCO *delle pioggie e nevi cadute a Spoleto negli anni 1894 e 1895.*

Mese e Giorno		Millimetri diurni	Millimetri mensili
Anno 1894			
Gennaio	3	1,5	
»	6	12 (di cui 3 per neve)	
»	7	4,5	
»	8	1,5	
»	9	1	
»	23	3,5	
»	24	3	
»	25	4	
»	31	1	*32*
Febbraio	14	6	*6*
Marzo	6	13,5	
»	7	2	
»	8	2	
»	14	19	
»	15	12,8	
»	16	13	
»	17	2	
»	18	1,5	*65,8*
Aprile	13	0,5	
»	17	3,5	
»	19	4,5	
»	20	3,8	
»	21	9,7	
»	22	32	
»	23	5,1	
»	28	2	
»	29	25	
»	30	14	*100,1*
Maggio	1	1	
»	2	13,7	
»	3	3,4	
»	4	1	
»	13	0,5	
»	14	7	
»	16	3	
»	18	0,5	
»	19	16	
»	20	6	

Mese e Giorno		Millimetri diurni	Millimetri mensili
Maggio	21	5,5	
»	22	57,5	
»	26	1	
»	27	4	
»	28	1	
»	30	5	*126,1*
Giugno	2	4,5	
»	9	3,5	
»	13	0,5	
»	14	1	
»	15	14	
»	28	27,5	
»	29	7,2	
»	30	8,7	*66,9*
Luglio		0	*0*
Agosto	4	12,7	
»	5	7,5	*20,2*
Settembre	7	18,7	
»	17	23	
»	18	20	
»	29	20	*81,7*
Ottobre	1	12,6	
»	2	6,5	
»	4	3	
»	5	7	
»	16	8,4	
»	19	3	
»	21	2	*42,5*
Novembre	9	11,2	
»	29	4,5	*15,7*
Dicembre	3	3	
»	5	5,2	
»	7	7,7	
»	20	3	
»	21	3,5	
»	29	11,5	
»	30	10,5 (tutta neve)	*4,44*

Totale della pioggia caduta durante l'anno 1894 millim. 691,4, di cui 13,5 corrispondenti a centim. 13,5 di neve.

Mese e Giorno		Millimetri diurni	Millimetri mensili
Anno 1895			
Gennaio	5	15 (tutta neve)	
»	6	11,5 (di cui 3,5 neve)	
»	7	1 (tutta neve)	
»	8	14	
»	9	51	
»	10	1	
»	14	11,5	
»	15	1,5	
»	17	6	
»	18	6	
»	22	15,2	
»	23	19,8	
»	24	8,5 (di cui 0,5 neve)	
»	26	4	
»	29	2,5 (di cui 0,5 neve)	
»	31	1 (tutta neve)	*169,5*
Febbraio	1	0,5 (tutta neve)	
»	2	5 (tutta neve)	
»	3	6 (di cui 3 da neve)	
»	4	19 (di cui 1 neve)	
»	6	22,5 (di cui 8 neve)	
»	7	14	
»	8	16,2	
»	9	14	
»	10	2,5	
»	12	16,5	
»	13	13,2	
»	14	5	
»	15	1 (tutta neve)	
»	16	4 (tutta neve)	

Segue Tabella A.

Mese e Giorno	Millimetri diurni	Millimetri mensili
Febbraio 18	0,5 (tutta neve)	
» 19	0,5 (tutta neve)	
» 23	2	
» 26	1	
» 27	12	*155,4*
Marzo 3	42,5	
» 4	16,5	
» 5	2	
» 6	10 (di cui 9 neve	
» 13	19	
» 14	2	
» 24	4	
» 31	1,5	*9,75*
Aprile 1	3	
» 2	12	
» 3	22	
» 4	36,5	
» 9	4	
» 15	8	
» 18	7	
» 19	9,5	
» 20	27,3	
» 21	1,5	
» 24	4,5	
» 26	6,5	
» 28	34	
» 29	4	*179,8*
Maggio 5	2	
» 7	2	
» 10	1,5	
» 11	2	
» 17	24	

Mese e Giorno	Millimetri diurni	Millimetri mensili
Maggio 18	8,5	
» 24	21,7	
» 27	4	*65,7*
Giugno 2	6	
» 4	5	
» 10	7	
» 12	5	
» 13	2	
» 14	2	
» 15	25,5	
» 16	15,5	
» 21	11,2	
» 23	9,5	
» 24	58,5	
» 28	6,5	*153,7*
Luglio 6	35	
» 7	20	*55*
Agosto 2	0,5	
» 5	54	
» 8	1	
» 9	16	*71,5*
Settembre 14	0,5	
» 28	2	
» 29	56	
» 30	8,5	*67*
Ottobre 2	10,5	
» 3	54,3	
» 4	1	
» 9	41	
» 10	141	
» 12	7	
» 18	5	
» 19	5	
» 24	1	

Mese e Giorno	Millimetri diurni	Millimetri mensili
Ottobre 25	7,5	
» 26	0,5	
» 27	5	
» 28	28	
» 30	8	
» 31	50	*364,8*
Novembre 1	5	
» 3	8	
» 5	4,2	
» 24	11	
» 25	25,5	
» 26	15	*68,7*
Dicembre 8	6 (di cui 1 neve)	
» 11	3,5	
» 12	4	
» 13	1,5	
» 14	39	
» 15	1	
» 16	13	
» 17	7,5	
» 18	21	
» 19	1	
» 20	6,2	
» 21	13	
» 22	1	
» 25	18,5	
» 26	45	
» 27	4	
» 28	3,2	*188,4*

Totale della pioggia caduta durante l'anno 1895 millim. 1637, di cui 55 corrispondenti a centim. 55 di neve.

TABELLA B.

ELENCO *delle pressioni barometriche e temperature osservate a mezzodì d'ognuno dei giorni seguenti in cui avvennero terremoti a Spoleto.* (Altezza sul mare 350 m., barometro a mercurio).

1895 — Aprile	8 —	Pressione mm.	726,	temperatura	12,5,	tempo nuvoloso
» — Maggio	20 —	»	727,5,	»	16,	» id.
» — »	21 —	»	729,	»	16,	» misto
» — »	27 —	»	732,7,	»	17,	» piovoso
» — Giugno	1 —	»	734,6,	»	17,	» nuvoloso
» — »	7 —	»	731,7,	»	19,	» misto
» — »	23 —	»	737,5,	»	20,5,	» nuvoloso
» — »	29 —	»	736,5,	»	20,	» sereno
» — Luglio	13 —	»	728,	»	21,	» misto
» — »	24 —	»	735,5,	»	23,	» sereno
» — Agosto	9 —	»	733,8,	»	21,5,	» id.
» — »	11 —	»	733,3,	»	21,	» id.
» — »	21 —	»	736,6,	»	21,	» id.
» — »	22 —	»	738,2,	»	21,	» id.
» — »	25 —	»	735,	»	21,5	» id.
» — Settembre	9 —	»	735,4,	»	21,5,	» id.
» — »	12 —	»	735,0,	»	23,5,	» id.
» — »	18 —	»	736,8,	»	19,	» misto
» — »	19 —	»	736,	»	22,	» sereno
» — »	20 —	»	737,	»	20,	» id.
» — »	21 —	»	738,5,	»	20,	» id.
» — »	22 —	»	741,	»	22,5,	» id.
» — »	23 —	»	743,	»	22,	» id.
» — »	24 —	»	741,2.	»	30,	» id.
» — »	25 —	»	741,	»	19,5,	» id.
» — »	26 —	»	739,	»	20,	» id.
» — »	27 —	»	736,5,	»	21,	» id.
» — »	28 —	»	737,5,	»	20,	» id.
» — »	29 —	»	737,	»	19,5,	» id.
» — Ottobre	1 —	»	736,	»	19,	» nuvoloso
» — »	2 —	»	735,	»	19,	» piovoso
» — »	6 —	»	736,	»	18,	» sereno
» — »	7 —	»	732,	»	18,	» misto
» — »	9 —	»	727,	»	18,5,	» coperto
» — Novembre	1 —	»	742,	»	16,	» piovoso
» — »	3 —	»	738,	»	16,5,	» nuvoloso
» — »	4 —	»	738,	»	16,5,	» misto

Direzione delle scosse.

Siccome mancano dati esatti sulla direzione delle scosse, converrà limitarci alle indicazioni suesposte, dalle quali, almeno per Spoleto risulta prevalente la direzione da sud-est. A Norcia si sentirono le scosse da nord-ovest ed a Scheggino da nord. Il signor Argago Ricci ritiene che le scosse sieno state più forti lungo la linea del Maroggia, dalla quale attesta di aver udito nel settembre altresì provenire parecchi rombi assai distinti. Ma ogni argomentazione in base ad osservazioni poco sicure manca di appoggio e soltanto si può dimostrare la necessità che in caso di simili fasi sismiche siano a tempo spediti sulla località dove esse si stabiliscono alcuni apparecchi automatici, che dovrebbero essere attentamente osservati da apposito personale.

I sismoscopi ordinarî non servono assolutamente per uno studio attendibile. Nelle scosse del 20 maggio abbiamo bensì l' osservazione del signor prof. Ricci, attendibilissima, che la scossa provenne da sud sud-ovest e che fu seguita subito da altra da sud est-est; ma questo dato non combina del tutto colla direzione in cui furono lanciate le campane di due lampade nella Biblioteca comunale, cioè in senso di sud-est a nord-ovest. Si dovrebbe poter concludere che almeno prossimativamente a Spoleto le scosse vennero da sud; ma questa conclusione sarebbe discorde dalle altre indicazioni per le località circostanti. Non sarebbe essa nemmeno in accordo colle poche nozioni che abbiamo sulla stratigrafia della massa mesozoica sullo Spoletino, le quali piuttosto indurrebbero ad ammettere che il radiante fosse poco a nord e piuttosto a nord-ovest della città. Epperò credo che il lettore troverà ragionevole il mio riserbo, non nell' accettare i dati suesposti ma nel volerne trarre una conclusione, fosse anche in apparenza conforme alla ipotesi, che al momento mi pare da preferirsi, della causa orogenica-stratigrafica.

Danni materiali apportati dalle scosse più forti.

Le scosse veramente dannose furono quelle del 20 maggio e del 20 settembre; tutte insieme poi contribuirono a diminuire la stabilità di taluni edifici e perciò se ne deve tener calcolo dai proprietari di case e dagli amministratori delle proprietà pubbliche e di beneficenza in vista della possibilità che tra un certo numero d' anni, che auguro sieno moltissimi, intervenga altra fase consimile e forse ancora più forte, senza attingere quel grado di intensità che sarebbe affatto insolito per quest' area sismica e che distingue i terremoti veramente disastrosi.

Siccome chi legge può immaginare lo spavento della popolazione e gli altri danni, che ho da principio accennati, io mi limiterò a compendiare la Relazione, che l'egregio ingegnere Municipale di Spoleto, signor Pompeo Bresadola, ha presentato all'illustre signor Sindaco sulla entità dei danni stessi entro l' ambito della città.

La Caserma Stella e la Caserma Umberto furono danneggiate per oltre 4000 lire, come risulta da un preventivo di spesa fatta dal Comando del Genio militare di Perugia.

Le Carceri di S. Agata ebbero danni rilevanti, per caduta di volte ed inclinazioni di muri perimetrali. L' ingegnere del Genio Civile fece un preventivo di oltre lire mille.

Il fabbricato dell' Ufficio Bollo e Registro ebbe danni considerevoli, per lesioni nei muri e per restauri si preventivò la somma di lire 800. Ai lavori di restauro si pose tosto mano, con saggio provvedimento, e la spesa risultò per tutti gli accennati fabbricati maggiore del preventivo.

Il fabbricato del Convitto Nazionale per gli Orfani degli Impiegati civili dello Stato, come da perizia tecnica, fu danneggiato di lire 1300, sebbene esso si trovi nella parte più alta della città, presso alla Rocca, dove si affermava che i danni dei fabbricati sieno stati relativamente minori.

I fabbricati di proprietà Comunale ebbero del pari danni considerevoli.

Tutte le scuole elementari e secondarie dovettero rimanere sospese per una diecina di giorni, per esportare dalle aule le macerie delle soffitte cadute, degli intonaci e delle murature screpolate. Incominciati i restauri, si constatò che molti ambienti erano mal sicuri. Così alcune infermerie del Convitto Nazionale dovettero essere sgombrate in causa di spostamento dei muri di perimetro.

Al Palazzo di Giustizia dovettero rifarsi interi muri di tramezzo e gli uffici della Procura del Re dovettero essere sgombrati.

Al fabbricato del Civico Cimitero si ruppe una chiave in ferro, diretta a nord. La volta della medioevale Porta Loreto si dovette demolire perchè divenuta pericolosa ai passanti. Altri danni furono cagionati ai due teatri, al fabbricato di S. Nicolò ed al Palazzo Comunale. Secondo una perizia dell' Ufficio tecnico Municipale, limitandosi al puro necessario, fu preventivata per riparo ai danni constatati la somma di lire 4,000, ma fu anche questa di molto sorpassata.

Altri danni rilevanti ebbero a soffrire i fabbricati appartenenti alla Congregazione di Carità, quali il Nosocomio, il Brefotrofio, l' Orfanotrofio, gli Uffizi, il Conservatorio dello Spirito Santo, quello delle Pericolanti e varie case d' affitto dei detti stabilimenti. In tutto un preventivo di lire 9000.

Al Duomo non accaddero grandi danni, ma la riapertura delle antiche screpolature e l' aprirsi di nuove, talune negli archi della navata principale, resero d' urgenza dei restauri costosi, di cui non conosco l' importo. Però so che l' annesso fabbricato delle Canoniche ebbe spostato l' intero muro verso settentrione e richiese la spesa di oltre 800 lire.

Fra le case private più danneggiate, ricorderemo quella dell' avvocato Moricelli esigente restauri per l' importo di oltre lire mille; quella della vedova Giovannini, di cui si dovè demolire un altro muro perimetrale, colla spesa di circa 4 mila lire; quella dei Fratelli Lionelli, che si dovette rafforzare con chiavi colla spesa di oltre 500 lire; e le altre del Conte Pila, dell' Arcivescovo, di Avanzi Francesco, dei fratelli Toni, dei Beozi, dei Chiodi, ecc. ecc. La detta relazione afferma che delle 813 case entro le mura di Spoleto 750 furono danneggiate e che la spesa complessiva, che richiederanno i

restauri, si può calcolare di almeno 225,000 lire. La quale spesa è da augurarsi che in fatto si compia per completare la stabilità dei fabbricati, provati da questa fase sismica; nella quale fase un ottimista a tutta prova, potrebbe vedere qualcosa di provvidenziale, trattandosi di una città la quale, come il seguente catalogo dimostra, è bensì tra le preferite dal terremoto, ma che sorge sopra un' area dove questo raramente raggiunse quella spaventosa intensità, che lasciò altrove mucchi di rovine sopra centinaja e migliaja di vittime. Questo *memento homo* dei terremoti non disastrosi, per un paese come il nostro, non va trascurato dai sopraintendenti all' edilizia pubblica e privata; e la sorveglianza sarà certamente efficace in un paese dove i materiali di costruzione abbondano e sono ottimi, e dove l' arte dell' edificare è tanto splendida ed antica; potendosi, come appunto accade in Spoleto, osservare la sopraposizione di mura pelagische, romane e medievali perfettamente conservate. È certamente questo un consiglio assai semplice e che si direbbe fanciullesco; ma tuttavia è il risultato della dolorosa esperienza fatta anche da me, per aver visto in Italia e fuori le rovine di parecchi terremoti. Tali disastri determinarono sempre la selezione dei fabbricati, spesso rimanendo in piedi i più antichi, perchè senza confronto i meglio costrutti.

Epperò nelle scuole d' Applicazione pei nostri ingegneri non sarà abbastanza ripetuto questo semplice consiglio e sarà bene ripeterlo anche ai privati; perchè al risparmio dell' oggi preferiscano una spesa ragionevole, che varrà a salvaguardare la vita loro, delle famiglie e degli inquilini.

Notizie storiche sui terremoti della Valle Umbra

(del prof. Pier Francesco Corradi).

Vediamo ora di mettere insieme qualche dato storico, che ne faccia conoscere quali sono nella Valle Umbra le località più esposte al terremoto e che faciliti a colui, che potesse dedicare a questo scopo più pazienti indagini, la compilazione di un buon catalogo sismico, quale occorrerebbe per ognuna delle aree riconosciute come esposte ai terremoti. Che se negli archivi comunali delle varie città dell'Umbria sarà da diligenti ricercatori estesa l' indagine, sulle tracce che ora presento, potrà raccogliersi un buon cumulo di dati positivi, in particolare per gli ultimi secoli e per la parte del secolo presente che precedette alla fondazione degli Istituti, i quali raccolgono ed ordinano le notizie sismiche delle varie regioni italiane.

217 a. Cr. È probabile che il terremoto avvenuto durante la celebre battaglia al Trasimeno, di cui parlano Plinio il Vecchio nella sua *Storia Naturale* ed altri antichi, abbia scosso la Valle Umbra.

365 d. Cr. Il conte Bernardino di Campello nelle *Historie di Spoleti* [1] dice a proposito di questo famoso terremoto essere cosa certa che la detta città « non andò esente dall' horrore, e dalle ruine, che cagionò lo scuotimento del suolo, siccome quella

[1] Campello, *Historie di Spoleti*, T. I, lib. VII, pag. 207. Spoleti, Ricci, 1672.

che per l' ordinario, come pur troppo proviamo, suol essere esposta alla frequenza di simili accidenti ». E Natalucci Tiberio ([1]) parlando di Trevi scrive: « 365, luglio 21, terremoto inaudito. A quest' epoca si riporta la prima devastazione della *Lucana Trevensis* ed in genere al tempo di Giuliano Apostata e Valente (361-368). Non sembrando che la persecuzione di Giuliano possa aver devastato la città, può supporsi che la rovina avvenisse appunto pel terribile disastro del 365 sopra accennato ». E qui giova osservare, che Trevi, secondo alcuni scrittori, chiamavasi ne' tempi antichi *Lucania Trivi*, o *Lucana Trevensis* o *Treviensis*, ed era situata nel piano della Valle Umbra vicino al fiume Clitunno.

446. Il grande terremoto di Costantinopoli sarebbe stato risentito, secondo il Baglivi, anche in Italia e particolarmente in Umbria, e sarebbe durato sei mesi. Il Mercalli cita uno squarcio dello scritto dell' ab. Ridolfino Venuti ([2]), in cui si ammette la probabilità di una grande diminuzione nelle acque del fiume Clitunno in occasione di questo terremoto.

Il precitato conte di Campello ([3]) parlando di questo terremoto, che egli riferisce all' anno 444, dice: « la forza dello stesso sconvolgimento, che tolse le acque al Clitunno, è ben probabil cosa, che seccasse anco quelle, che in abbondante copia scaturivano anticamente appresso alla Città nel poggio, ove fu dato alla sepoltura il corpo di S. Concordio, mentre a' nostri giorni niun vestigio affatto ve n' è restato ».

801. Lo stesso Campello narra ([4]) che Carlo Magno, celebrata in Roma la Pasqua, ne partì per tornare in Francia ai 25 aprile dell' anno 801. « Giunto in Spoleti, vi si trattenne alcuni giorni con dimora ben segnalata. Perciochè l' ultimo giorno del già detto mese nella seconda hora della notte, stando tuttavia l'Imperatore Carlo nella nostra città, seguì un terremoto sì grande, che ne restò tutta Italia gravemente commossa. In Roma cadde in gran parte con le sue travi il tetto della Basilica di S. Paolo, et in diversi luoghi ruinarono non pur le città, ma (cosa maravigliosa a dirsi) gli stessi Monti ».

1246. Il barone Achille Sansi nella *Storia del comune di Spoleto* ([5]) dice che, « dentro quello stesso anno protratti e spaventosi terremoti scossero la città (di Spoleto) così fieramente che molte case e torri ne crollarono, e i pensieri di parte diedero luogo per qualche tempo a quelli dello spavento e delle sciagure domestiche da riparare » ([6]).

1277. Lo stesso Sansi ([7]) narra che in quest' anno fieri terremoti scossero Spoleto, e « furono cagione che molti edifici rovinassero con grandissimi danni, e morte di uomini » ([8]).

([1]) *Indicazioni storiche sulla città di Trevi, disposte in ordine cronologico.*
([2]) *Osservazioni sul Clitunno.* Roma, 1753, tipi Bernabò e Lazzarini, p. 26-29.
([3]) Op. cit., p. 224.
([4]) Op. cit., p. 476, L. XV.
([5]) Foligno, Sgariglia, 1879, parte I, cap. V, p. 78.
([6]) S. Antonino, *Hist.*, parte III, cap. 6. — Bzovio nel detto anno — Campello, L. 30.
([7]) Op. cit., parte I, cap. VII, p. 115.
([8]) Leoncilli, in *Rolando Taberna.*

1279. Muratori (1) tra le città fortemente danneggiate dal terremoto del primo maggio (o ultimo di aprile) rammenta Camerino, Fabriano, Matelica, Cagli, s. Severino, Cingoli, Nocera, Foligno e Spello.

Il Sansi (2) dice, che sul cadere di quest'anno gli abitanti di Cerreto (3) « afflitti da spaventosi terremoti, tennero un consiglio nella costa del monte presso le mura del castello, perchè dentro non si poteva stare che a gran rischio ».

1300. Lo stesso autore racconta (4) che « la terribile possanza del terremoto che, come scrive Giovanni Villani (5), sino dall'anno 1298 aveva fatti grandissimi danni, specialmente in Rieti e in Spoleto, dove torri e case e chiese erano crollate, scotendo ora i gioghi appennini, fece della povera Vetranola una sola rovina. Il comune di Spoleto non lasciò derelitta quella infelice popolazione; ma, poichè per più casi era fatto omai palese che il terremoto infuriava in quel luogo con una irrisistibile veemenza, nel 1302 riedificò il castello in altra parte, da cui Vetranola prese anche il nome di Collefaggio ».

1328. Lo stesso Sansi (6) scrive: « Dopo che questo barbarico flagello (Lodovico di Baviera) ebbe dato il guasto alla valle col ferro e col fuoco, spaventevoli terremoti scuotevano le montagne del ducato (di Spoleto), dove Norcia, le Preci, Cerreto, Montesanto e il castello del Monte s. Martino caddero in rovina; il che, per essere avvenuto di notte, fu con la morte di molte migliaia d'uomini ».

1348 o 49. Il Mercalli cita il Rossi-Scotti (7) quando, a proposito della famosa fontana, che adorna la piazza della Cattedrale in Perugia, dice in una nota che sì i versi come le scritte « in gran parte vi sono male allogate, della qual cosa può rendersi ragione, ponendo mente a ciò che rammenta il Tranquilli (Tratt. della parte, p. 13): *nel 1348 il tremuoto buttò a terra la metà di una contrada di Perugia, cioè della piazza, e guastò il meraviglioso edificio della fontana* ». Il sig. Corradi osserva che sembra essere il Tranquilli caduto in errore circa all'anno, e che il grande terremoto, di cui si parla, sia piuttosto accaduto, nel 1349, e precisamente il 9 di settembre. Tanto si rileva nella *Cronaca del Graziani*, pubblicata nell'Archivio Storico Italiano, vol. XVI, pag. 151, ove si legge: « A dì 9 di settembre nel dicto millesimo, fu in Peroscia el magiore terremoto che mai se recordasse, et per dicta cagione fuoro guaste molte torre; et per la Marca fu molto generale, et per tutta la provinzia: fece molto danno de case a l'Aquila, a Spolete et al Borgo di s. Sepolcro ». La data è confermata anche da M. Villani (8). Questo terremoto è accennato anche dal Sansi nell'opra precitata, sulla fede del Graziani anzidetto e del Minervio (9).

1352. Nella suddetta *Cronaca del Graziani*, p. 167, si ha la seguente notizia

(1) *Antiquitates Italiae*. Diss. 46 e *Annali d'Italia*.
(2) Op. cit., parte I, cap. VII, p. 119.
(3) Paese sui monti, tra Spoleto e Norcia.
(4) Op. cit., parte I, cap. VII, p. 130.
(5) Giovanni Villani, *Cronaca*, lib. VIII, cap. 25.
(6) Op. cit., parte I, cap. X, p. 203.
(7) *Guida di Perugia*, 2ª ediz., Perugia, Santucci, 1867, p. 15.
(8) *Cronica*, I, 45.
(9) Op. cit., parte I, cap. XI, p. 226.

di un fortissimo terremoto, che devastò Borgo s. Sepolcro e Città di Castello, e che probabilmente si sarà esteso anche ad altre città e paesi dell' Umbria, come quello del 1349: « A di 2 de dicembre nel dicto millesimo (1352) nella terra del Borgo de s. Sepolcro e nella Città de Castello fuoro gli magiore terremotogli che già mai fussero, per li quali cadde la maggior parte de la terra, et caddero doi cassere che ce stavano in essa terra: ce morirono per essa cagione più de tre miglia persone ».

1448. Natalucci Tiberio, nelle precitate *Indicazioni*, non so sulla fede di quali documenti, dice che in quest' anno « le città Umbre vengono afflitte dalla peste e dai terremoti ».

1496. Durastante Natalucci nella *Storia Universale dello Stato temporale ed ecclesiastico di Trevi* riporta dagli *annali del Mugnonio* (autore sincrono) la notizia di terribili terremoti sentiti dal giugno alla fine del 1496, e che misero molto spavento a Spoleto, a Trevi ed in altri luoghi vicini, ma che però a Trevi non recarono alcun danno.

1571. La seguente notizia di terremoti fortissimi avvenuti in Spoleto in quest' anno è tratta dal citato libro del Sansi [1]. « Correndo quest' anno, Spoleto, come tante altre regioni d'Italia, fu afflitto da frequenti e paurosi terremoti con imminente pericolo degli edifici e delle vite dei cittadini. Lo sgomento in cui questi vivevano e l' impossibilità di altri soccorsi volgevano, come sempre avviene fra credenti, la loro confidenza a quella sovranaturale pietà che tutto può, e che abbraccia, con la espressione di Dante, tutto ciò che si rivolge a Lei. Sino dal 1538 Giacomo Spinelli spoletino, avendo per sua gran devozione alla Madonna di Loreto, fatto edificare in un campo fuori della porta s. Matteo una cappellina in forma della Santa Casa, commise a Jacopo Siciliano che vi dipingesse dentro la Vergine col Bambino. Era fama che l' opera, essendo lontano il pittore e la cappella chiusa, fosse stata compiuta prodigiosamente da mano invisibile, e quindi fu tenuta dai vicini, cui il caso era meglio noto, in grande venerazione. Avevano dunque cominciato da più giorni in questo bisogno alcune donne e specialmente donzelle ad andare a pregare in quella cappella, quando la notte precedente il 21 d' aprile, la città veniva scossa da terremoti così disordinati e violenti che pareva dovesse tra poco tutta subbissare. Il popolo, preso da gravissimo spavento, levossi e, sospinto da un sentimento unanime, corse alla detta cappella a gridare misericordia, facendo proponimenti e voti per essere liberato da così tremenda e prolungata calamità. Dopo quella notte i terremoti cessarono ».

1592. Il sig. Corradi mi avverte che alle notizie riferite dal Mercalli a pag. 291, all' anno 1590, devesi sostituire quanto segue:

Nell' Archivio antico di questo Municipio (di Trevi) si conserva al n. 518 dell' inventario, contenuta in mezzo foglio di carta comune, la seguente notizia autentica di alcune scosse di terremoto avvenute l' anno 1592: « A di 24 di novembre 1592 il marte sera à tre hore di notte et vicino alle quatre la vigilia di s. Catherina. — Essendo il Padre Don Gio. Batt. da Verona Proposto del monastero di s. Maria delle lacrime, et il p. Don Celso da Verona et io D. Raffaello da Savignano insieme a tavola nel refettorio venne un terremoto tanto grande, che fece creppare le moraglie di detto

[1] Op. cit., cap. XXIV, p. 246, parte II, 1884.

monasterio. Crepporono tutti i volti della Chiesa del convento, e cascorono tanti calzenazzi, che in tutto passariano duoi somme, et anco crepporono le pietre di Marmo sopra le porte della Chiesa, e sopra l'occhio grande della Chiesa sopra la porta grande caderono molte pietre cotte di più segui la notte detto terremoto tirrando da 50 volte et più, ma non con tanto empito perche havrebbe gittato à terra ogni fabrica: di più detto terremoto gittò à terra in Trevio una casa intera, dove fu trovato un' giovene sotto cinqui solari, et fu trovato vivo senza male alcuno: item nota come la comunità di Trevio fece comandare la festa di s. Catherina. item seguì detto terremoto per molti giorni, dove fu necess.° dormire fuori di casa per molti notte non essendo sicura la casa. fu anco necess.° dormire nella stalla in terra, perchè non si trovava luogo più sicuro. fu in questa terra per questa causa fatta l' oratione delle quaranta hora, et bisognò andare Don Celso, et io alle processioni insieme con frate Vincenzo da Vicenzia, che portava la croce. a san Pietro in bovaia fu fatto gran' danno. et essi Padri vi furono alle processioni ».

Durastante Natalucci parla pur egli di questi terremoti, ma li dice avvenuti nel 1590. Che si tratti degli stessi terremoti, si conosce facilmente dalla circostanza del giorno, in cui ebbero principio, e della caduta di una casa, fra le cui rovine fu trovato illeso un giovane. Ma in questo caso il sig. Corradi attribuisce maggior fede al documento trovato nell' Archivio comunale, perchè scritto da persona trovatasi presente al fatto, mentre il Natalucci viveva nel secolo scorso. Non trovando poi notizie di terremoti per quest' anno per altre regioni, lo stesso sig. Corradi ritiene che quelli menzionati dalla suesposta descrizione fossero circoscritti a Trevi o alla Valle Umbra.

1689-1690. Durastante Natalucci (1) narra che di questi anni a Trevi forti scosse di terremoto incussero gran timore, ma non recarono alcun danno. Di questi terremoti si parla pure in un breve di Papa Innocenzo XI del 13 maggio 1689, con cui si concedettero ai Trevani alcune indulgenze, e dove si leggono fra le altre le parole seguenti: « Exponi nobis nuper fecerunt dilecti filii Universitas et homines Terrae Trevi Spoletan: dioces: illiusque Territorii Incolae quod ipsi novissime a frequentibus Terrae motibus ita afflicti fuerunt, ut maxima inde Universitati, et hominibus praefatis, ac Territorii Incolis damna, et angustiae provenerint, et adhuc proveniant ». Come si vede, in questo documento si dice che avvennero danni, mentre il Natalucci li esclude. A spiegar ciò il prof. Corradi suppone, che lo storico trevano intenda parlare solo della città, mentre i danni ricordati nel breve siano accaduti, come in altri terremoti anche recenti, nella parte bassa del territorio. Questi terremoti non furono circoscritti soltanto alla Valle Umbra, ma riuscirono fortissimi e disastrosi in Romagna e nelle Marche (vedi Mercalli, pag. 294).

1695. L' autore anonimo della *Lettera Storico-filosof. intorno alle cause dei terremoti* (Pavia 1783) riferisce la seguente notizia: « Nel terremoto che l'anno 1695 al 20 novembre si fè sentire in Bologna, sappiamo che tutte le acque si intorbidarono fino dal giorno antecedente, e che l' antico fiume Clitunno, il quale nel 446 avea per altro tremuoto perduto molte delle sue onde, allora in gran copia le ricuperò di nuovo ». Ma,

(1) Opera sucitata. — Questa, come pure l'altra di Tiberio Natalucci, è inedita, e viene conservata dalla nobile famiglia Natalucci di Trevi.

soggiunge il sig. Corradi, di questa notizia non può tenersi gran calcolo, non parlando affatto del fenomeno le cronache locali.

1703. Il Mercalli (pag. 297) raccoglie le notizie di questo forte terremoto dell' Italia centrale, avvenuto il 14 gennaio alle due ore di notte e ripetutosi il 16 a Roma, il 18 negli Abruzzi e nell'Alta Italia, ed il 20 a Guastalla e Verona, con franamenti presso il Lago di Garda. Il 2 febbraio con violenza ancora maggiore due scosse in Roma aprirono la volta della Basilica Vaticana, causando però pochi danni in Città; fu disastroso nell' Appennino centrale; ne patirono molto Spoleto, Camerino, Narni, Terni, Forfiamma, Loreto, Chieti, ecc., e specialmente i dintorni di Leonessa, Civitaducale, Aquila, Cascia e sopratutto Norcia, che venne quasi interamente distrutta e pare fosse presso al centro di tutti questi disastrosi terremoti. Il Papa esonerò per 5 anni dalle pubbliche imposte le città più danneggiate. Mellio Marco Ant. dice che vi furono 15,000 vittime.

Il giorno 3 febbraio alle ore 20 e $^3/_4$ si replicò una scossa ancora fortissima a Roma, per la quale rovinarono tre archi del secondo recinto del Colosseo, verso la chiesa di s. Gregorio. Le scosse si ripeterono frequenti sino al giorno 25, specialmente all' Aquila, dove se ne notarono 160, e furono risentite nei dintorni di Gubbio, Spoleto, Perugia e s. Marino.

Continuarono le scosse frequenti nel marzo, e nell' Abruzzo ancora disastrose, e non quietarono prima del 1705. Per le scosse di marzo perirono ancora 5000 persone; 2400 nella sola città d' Aquila. In queste scosse prevalse la direzione da nord a sud, ma la scossa del 2 febbraio, in Roma, ebbe direzione da est ad ovest. Le condizioni meteorologiche furono assai irregolari e le scosse avevano un periodo di maggiore frequenza verso le 9 it. Si apersero voragini nel suolo presso a Norcia.

Il sig. Corradi aggiunge le seguenti notizie:

In un memoriale diretto al Governatore, Priori e Consiglieri del popolo e università di Trevi, che trovasi allegato al verbale del Consiglio Generale del 9 dicembre 1703, si dice essere state le scosse *orribilissime* e *ruinose*, in particolare la prima del 14 gennaio, e si chiede che siano stabilite alcune devozioni da rinnovarsi negli anniversarî *di quell' ora, che forsi doveva essere l' ultima di nostra vita et irreparabile precipizio di tutta la Terra e territorio come seguì in tanti altri luoghi.* Nell' atto consigliare si dice di poi che la predetta scossa del 14 gennaio avvenne alle ore 1 ½ di notte.

Durastante Natalucci racconta nella precitata storia, che, sebbene anche a Trevi i terremoti di quest' anno fossero stati terribilissimi, pure non le recarono danno considerevole, e che le acque del fiume Clitunno diminuirono maggiormente, arguendo ciò dal numero più grande delle macine da molino, che potevano prima essere messe in moto in un medesimo tempo.

Nell' articolo sulla città di Trevi inserito nel *Dizionario di erudizione storico-ecclesiastica* del Moroni si legge, che la facciata principale della chiesa della Madonna delle Lagrime, posta poco sotto alla città, si dovette alquanto abbassare dopo i terremoti, di cui parliamo.

L' illustre ingegnere Antonio Rutili-Gentili nell' opuscolo dal titolo: *Nuove ri-*

flessioni sulle cause naturali dei terremoti di Fuligno [1] dice che il terremoto del 1703 « che percosse, come è noto, le città quasi tutte dell' Umbria, fu il famoso terremoto di Norcia, che distrusse interamente quella città ».

Nella sopracitata storia di Spoleto del Sansi [2] si legge: « Sul far del mattino del 14 gennaio 1703 un terribile terremoto, che si rinnovò per più giorni, subbissò Norcia, e si propagò a tutto il territorio di Spoleto, e con maggior danno, a Rieti, Chieti, Monteleone, ed altre terre e borghi dell' Abruzzo, a Civitaducale e in altri luoghi, e sino a Roma, che ne fu presa da indicibile spavento. Il 20 gennaio si adunava in Spoleto il Consiglio sulla piazza di s. Simone; il Governatore era assente, fu presieduto dal Vescovo Gaddi. Riconoscevano dalla protezione del patrono s. Ponziano martire se, a differenza degli altri luoghi percossi da tanta calamità con morti di uomini a migliaia, e rovine di chiese, e di centinaia di case, in Spoleto e nel suo territorio nessuno fosse perito, e gli stessi edifici, comechè danneggiati, non avessero sofferto la rovina che naturalmente la tremenda violenza di quelle scosse avrebbe dovuto cagionare. Facevano allora il voto del digiuno nella vigilia della festa del patrono e della astensione da spettacoli teatrali, e da altri sollazzi per tutta l' ottava; il quale voto si è sino ai nostri giorni osservato. E i pericoli e i timori dello spaventevole fenomeno durarono tanto che nel mese di novembre ancora si radunava il Consiglio nella piazza di s. Simone. Cominciarono poi a radunarlo nella sala del teatro, e fu per parecchi anni, tanto guasto e mal sicuro era il palazzo pubblico, di cui solo nel 1706 si cominciò la restaurazione, la quale di necessità riuscì alla ricostruzione di un novello edificio, che è quello che ora si vede ».

Altra notizia, riportata già dal *Giornale di Foligno* (4 febbraio 1887) devesi a Virginio Turchi, priore della cattedrale di quella città; è la seguente: « Li 14 Gennaro del detto anno, giorno di domenica, memorabile a tutta l' Italia per tutti i secoli venturi, si fe' sentire verso le due ore uno spaventosissimo terremoto per lo spazio di tre Ave Marie; voglio dire in tre volte, sempre con maggiore veemenza, con tanto terrore e spavento di questa città, che ogn' uno credè quella sera per l' ultima di sua vita e chi non l' ha sentito, è impossibile a poterlo concepire, tanto fu orribile.

« Il cielo era oscurissimo, ed il tempo piovoso, ma dopo il terremoto si levò un vento sì impetuoso, sì veemente, che pareva dover sradicare da fondamenta anche le case. Ciò non ostante tutto il popolo corse alle chiese domandando misericordia ad alta voce, e i confessori stiedero al confessionale sino alla sera seguente. Nella medesima notte mons. Giulio Troili vescovo, esposto che fu il Santissimo in duomo orò al popolo con gran fervore: e la mattina furono veduti a terra molti camini e trasanne dei tetti, e fu miracolo del nostro gran protettore, che la città tutta non pericolasse, mentre rovinò affatto Norcia, Cascia, Leonessa ed altri luoghi considerabili, correndo la fama che nello stato ecclesiastico perissero 5000 persone; si sentì per tutta l' Italia e...... d' esso particolarmente nel regno di Napoli, con danno di molti castelli rovinati. Seguitò anco per tutto Gennaro, ma insensibilmente e per lo più la notte, quando li due Febbraro, giorno di venerdì, festa della santissima Purifica-

[1] Fuligno, tip. Tomassini, 1832, p. 34, 35.
[2] Op. cit., parte II, p. 297.

zione, verso le ore 18 in circa, a cielo sereno e allegro tornò il terremoto quasi simile al primo, a segno che tutto il popolo fuggì dal Duomo dove si dispensavano le candele, con il Vescovo, Capitolo e Magistrato nella porta maggiore, tantopiù che il Duomo indebolito dal primo, si aprì in nove parti, e nella Navata verso il Santissimo, caddero diversi mattoni e calcinaccio, onde per la polvere non distinguevansi le persone, caddero anche alcune cornici, e le fabbriche restarono in gran parte della città puntellate, nè vi fu alcuno che forse non fortificasse la sua casa con chiavi, a segno che non si trovava più ferro, rimediandosi a ciò coll' ordine che non uscisse ferro dalla città, ad effetto che non mancasse.

« Questo secondo terremoto rovinò nel regno di Napoli la famosissima città dell' Aquila capo di provincia, assieme con 80 castelli suoi adiacenti, e fu fama che vi perissero quasi 30000 anime, caso veramente deplorabile; e in Roma patirono molti palazzi e chiese con gran spavento.

« Spoleto grandemente indebolito dal primo, si rese affatto inabitabile al secondo terremoto, onde tutti andarono ad abitare in campagna sotto alle tende. Il Pontefice Innocenzo XI ordinò che si suonassero le campane per lo spazio di 15 giorni alle due della notte, e chi in quel tempo orasse, con la santa Comunione, acquistava indulgenza plenaria. Come anche che si recitassero le litanie della Vergine in tutte le chiese, dopo la messa cantata.

« Questa città in ringraziamento ordinò una processione di penitenza; onde in essa si portarno tutti i corpi santi distribuiti alle confraternite, accomodati nei Carri pomposamente, ogni religione portava la sua reliquia. Il clero portava l' urna ove era la reliquia insigne di s. Felitiano et il vescovo le SS. Spine sotto il baldacchino.

« La maggior parte andorno scalzi; particolarmente il Vescovo, Governatore e Magistrato, fu terminata alla piazza di s. Domenico ove perorò un cappuccino, benchè fusse cominciata al Duomo a causa che essendo le fabbriche più basse, si rendeva quella piazza meno soggetta a terremoto: benchè fosse copiosissima fu terminata di giorno, a causa dell' orologio che ad arte fu sollecito più del solito.

« Fermò anche il Consiglio di ricevere i gesuiti, e di non far carnevale per cinque anni, e assegnò 250 scudi al Duomo pel restauramento del medesimo.

« Lo spavento che ne ricevè Roma poco prima inondata dal Tevere, fu senza pari, mentre i vecchi di quella città non si ricordavano aver mai sentito tal terrore, e siccome in quella si levò voce dovere il sabbato seguente sprofondarsi Roma da nuovo terremoto, sparsa dal Demonio che a cavallo vestito della livrea del Papa andava per ogni casa avvisando il popolo a uscire di casa e fuggire per le rovine del terremoto che doveva seguire in quella notte, il che fu rimediato dal Governo con avvisare il Popolo nelle Piazze che la voce era falsa e sparsa ad arte dai ladri, ma in effetto fu opera del Demonio per non essere stata rubata neppure una spilla, come anche per essersi sparsa l' istessa voce nel medesimo giorno anche in Foligno e in molti altri luoghi ove recò qualche spavento, ma per la Dio grazia fu il tutto falso. Seguirono i terremoti per quasi tutto l' anno 1703, particolarmente nell' Inverno, Primavera et Autunno quantunque leggiermente si facessero sentire: entrò l' anno 1704 e il 27 Febbrajo verso le tre ore e un quarto replicò il terremoto con qualche spavento ».

1730. Durastante e Tiberio Natalucci nei citati scritti ricordano il grande terremoto riportato a quest'anno nel Catalogo del Mercalli e nelle aggiunte al capo XIII dell'opera del medesimo (pag. 366-67), e il di cui centro sembra che al pari dei precedenti fosse Norcia, che venne di nuovo quasi distrutta. Anche in questa circostanza le fabbriche della città di Trevi poco ebbero a soffrire. Il Venuti ([1]) dice che questo terremoto fece cadere una parte del cornicione del famoso tempio del Clitunno.

1741-47. I terremoti di questi anni, che afflissero le città delle Marche, furono sentiti anche in Trevi, secondo Durastante Natalucci, sebbene senza danni, e, secondo il Moroni, anche l'Umbria fu compresa nelle provincie, ai danneggiati delle quali il Papa Benedetto XIV elargì centomila scudi.

1752-53. Il catalogo del Mercalli registra in questi due anni diverse scosse avvenute in varî luoghi dell'Umbria; e Natalucci Durastante ci fa sapere, che a Trevi si risentirono *grandissime e continue*, dimodochè furono fatte molte divozioni e proibite per tre anni le maschere ed altri divertimenti carnevaleschi.

1767. Il Mercalli ebbe dal prof. Corradi copia dell'inscrizione, che si legge sopra la porta della chiesa parrocchiale di Castel s. Giovanni in comune di Castel Ritaldi, e che ricorda un forte terremoto di quest'anno; la riporto:

TEMPLVM · HOC ·
S · IOANNI · BAPTISTAE · SACRVM ·
INGENTI · TERRAE · MOTV ·
NON · IVN · CIↃIↃCCLXVII ·
RVINA · CORRVPTVM ·
CLEMENS · XIII · PONT · MAX ·
PROCVRANTE · VINC · AB · AQ_ÆP
RESTITVIT ·
SANCTIVS . MARICIVS RECTOR
M · P ·

Il Sansi poi così descrive questo terremoto, anche per Spoleto assai forte: ([2]) « . . . . . . l'anno 1767, due ore dopo la mezzanotte del 4 al 5 Giugno, un terribile terremoto scosse la città e le campagne in assai largo giro. Gravi furono i danni nella città dove anche la Rocca ricevette gravi lesioni; ma gravissime furono nelle ville e nei castelli, nei quali molte case caddero, altre rimasero sconnesse e cadenti. Furono dai periti valutati i danni più di cento dieci mila scudi. Clemente XIII fu largo di soccorsi in questa sciagura, diede diecimila scudi d'oro del proprio e il doppio di quello dell'erario, assegnando per due anni ai restauri delle chiese e delle case dei poveri, con poche eccezioni per le necessarie spese ordinarie, tutte le tasse che si solevano pagare dalla città e dai castelli ad essa soggetti. Una lapide posta nella facciata settentrionale del palazzo pubblico serba memorie di questa beneficenza. Nè ciò potè bastare al bisogno, e nel 1772 ancora si cercavano e chiedevano sussidi

([1]) *Osservazioni sopra il fiume Clitunno* ecc., p. 59 in nota.

([2]) Op. cit., parte II, p. 299.

per riparare a tanto male. La fabbrica del palazzo pubblico, non ancora compiuta, n' era stata assai offesa e questa fu nuova ragione di ritardo ».

1781. Il Mercalli raccoglie interessanti notizie sui terremoti di questo anno in Romagna, Marca e Toscana (p. 303); e il signor Corradi nel suo manoscritto ricorda come Tiberio Natalucci nelle *Indicazioni storiche* rammenti di quest' anno, senza però stabilirne il giorno ed il mese, un terremoto, e del pari il Sansi [1] quando racconta, che questo terremoto recò danni al palazzo comunale di Spoleto, il quale era ancora in costruzione, e cagionò anche altri guasti. Il prof. Corradi poi soggiunge: « il terremoto, di cui parlano il Natalucci e il Sansi, è quello, che il Mercalli nel suo catalogo (p. 236) indica avvenuto in Foligno verso il 14 agosto; ovvero uno dei molti, che dall' aprile al luglio afflissero la Romagna e le Marche? »

1785. Il Moroni (*Diz. di erudiz.* ecc., t. LXXIV, pag. 237), parlando dei terremoti romani del 1785 (senza darne la data mensile), dice, che scossero Frascati ed Albano, e che Pio VI elargì considerevoli soccorsi a Gubbio, Terni, Narni, Spoleto ed alla Sabina pei danni sofferti.

1791. Il Rutili-Gentili [2] ricorda in questo anno un forte terremoto avvenuto alle Casenuove (villaggio posto sull'Appennino in territorio di Foligno), ove fece guasti nei fabbricati e nelle rupi della montagna. Il prof. Corradi potè rilevare dagli atti consigliari di Trevi, che questo terremoto produsse alcuni danni ai molini detti della Faustina, posti sul fiume Clitunno poco sotto alla città ed allora spettanti al Municipio. Lo stesso professore, nel manoscritto inviatomi ora, riporta dal giornale di Foligno *L' Amministratore*, del 27 novembre 1892 (anno III, n. 48): « Il terremoto avvenuto il giorno 11 di ottobre produsse in Foligno gravi danni nei fabbricati, fra i quali è da accennare il palazzo dei Priori. Lo scrittore dell' articolo dall' esame di alcune lesioni prodotte da quel terremoto in due finestroni del campanile di questo palazzo arguisce, che la direzione della scossa sia stata da levante a ponente ».

1831-32. Tolgo dal Mercalli (p. 315): « Una prima scossa terribile colpì l' Umbria (specie nel distretto di Foligno) all' aurora del 27 ottobre, e ad essa ne tennero dietro altre, ma brevi e leggiere. Precedette un estate piovissimo, poi un autunno molto secco con violenti venti boreali; cessati i quali (verso la metà d'ottobre), l'aria si fece pregna di vapori, i quali più che mai si addensarono e si convertirono in nebbia la notte 26-27. Dopo la forte scossa, per varî giorni l'atmosfera fu agitata ora dallo scirocco ora dalla tramontana, ed il cielo ora coperto da nubi ora sereno. La notte 6-7 novembre l'aria tornò ad essere tranquillissima ed i vapori si addensarono sul piano. Un' ora circa prima dello spuntare del giorno avvennero tre altre gagliardissime scosse nello spazio di pochi minuti. Il cielo rimase in seguito ingombro di nubi, e le parti basse di nebbia, e le scosse continuavano più forti e più frequenti quanto più i vapori si accostavano alla superficie della terra. In questi giorni le nubi erano senza moto e il vento dominante, quello di ponente, assai debole. Si fece poi per diversi giorni il cielo sereno ed allora non furono sentite scosse, se non quando la nebbia si livellava nel piano. Venne os-

[1] Op. cit., parte II, p. 311.

[2] *Nuove riflessioni* ecc., pag. 35.

servato per varie notti un continuo lampeggiare e furono vedute in numero prodigioso le stelle cadenti. Dopo qualche tempo il cielo tornò all' ordinario suo stato.

« Le scosse non cessarono di replicare fino al principio del 1832; ed il 13 gennaio verso le 2 pom. un' altra scossa di 20′ di durata e più terribile di tutte le precedenti mise la desolazione nuovamente nell' Umbria. Il centro dello scotimento (tanto ora che nel 1831) parve presso Bevagna, che crollò per due terzi. Soffrirono pure molto Bastìa, Cannara, Assisi, Spello, Montefalco, Cantalupo. Il terremoto fu accompagnato da pioggia e grandine. Prima di esso un cumulo di nubi si mantenne per qualche tempo sulle cime dei monti Martani. Verso le ore 21 un vento sciroccale trascinò in basso quelle nubi ed allora avvenne lo spaventevole fenomeno. Un fremito e sotterraneo muggito si propagò in tutte le valli e monti dell' Umbria. La scossa, benchè incredibilmente energica e di molta durata, pure fu quasi uniforme; e le vibrazioni sembrarono quasi perfettamente regolari ed isocrone. Appena trascorsa un' ora, venne un' altra scossa più forte della prima, ma di brevissima durata. La notte e il giorno seguente il suolo fu agitato molte volte, ma con minore intensità. Nella notte 13-14 in Foligno si contarono 38 scosse. Al sopravenire dei venti boreali, le scosse cominciarono a calmarsi, ma per alcun tempo continuarono a ripetersi leggierissime, specialmente quando i vapori occupavano la parte più bassa della valle.

« Per le scosse del 13 gennaio presso Cantagalli, nella parte più depressa della Valle Umbra, si formarono nel suolo molte screpolature, e si aprirono in alcuni luoghi fori rotondi. E dalle une e dagli altri uscirono acque miste ad arena, fango e melma. Presso Cannara si alzò improvvisamente il livello dell' acqua in due pozzi. Qualche giorno prima del 13 si erano sentiti rumori sotterranei.

« Questo terremoto si estese per circa 30 miglia verso gli Appennini, e 100 miglia verso le inferiori Maremme. Si sentì debolmente l' ondulazione a Roma ed a Parma. I paesi posti nella pianura soffrirono maggiori danni di quelli che si trovano sulle colline, benchè distanti poche miglia da quella. Si paragoni per es. Trevi con Bevagna. Confrontando *gli incassi e spese fatti in soccorso degli abitanti della provincia di Spoleto percossi dal terremoto del 13 gennaio 1832* risulta che da quell' epoca a tutto agosto 1832 per Bevagna erano stati spesi scudi 8347 per restaurare 125 case ed occorrevano ancora 6000 scudi per restaurarne altre 120; e che per Trevi erano stati spesi 2707 scudi per restaurare 90 case ed occorrevano ancora scudi 500 per altre 41 case. Il danno dunque (della gente povera soltanto beninteso) per Bevagna superò di scudi 11140 ed il numero delle case danneggiate di 114 quello di Trevi, sebbene Bevagna abbia un territorio meno esteso ed un minor numero di case. Secondo i calcoli fatti dall' ingegnere Sabbatino Stocchi di Trevi, il numero totale delle case in questo territorio era allora di 1172, e di esse dopo i terremoti 48 minacciavano rovina, 72 erano inabitabili affatto, 172 inabitabili in parte, 579 avevano leggere lesioni e 301 erano abitabili e tutto il danno ascendeva a scudi 52143.96. Questa somma considerata da sola non è piccola; ma sembrerebbe assai più tenue, se fosse posta a confronto coi danni toccati ad altri paesi.

« Le scosse replicarono più o meno fortemente fino al 15 marzo e furono rovinose, specialmente due, avvenute alle 2 ed alle 5 pom. del 13. Tutti questi ripetuti scuotimenti fecero cadere gran parte della Basilica di S. Maria degli Angioli ad Assisi e

del contiguo convento (già molto danneggiati dalle scosse precedenti), e cagionò molte altre rovine ad Assisi, Cannara e Bastìa » [1].

1854. Dal Moroni [2] il Mercalli riporta, che nel mese di febbraio, specie nell' 11 e 12, replicate scosse di terremoto spaventarono gli abitanti di una parte dell' Umbria, massimamente fra Perugia e Foligno. Dalla parte d' onde venivano le scosse il cielo si fece d' un colore quasi plumbeo e si videro molti lampi. Molte case furono ivi assai danneggiate. Il Convento e la Chiesa di s. Francesco, posti sulla via che conduce da Foligno a Perugia, crollarono in gran parte; e subirono molti danni anche il Santuario ed il Convento degli Angioli presso Assisi. Bastìa venne rovinata orribilmente. Altre scosse posero di nuovo in affanno gli abitanti di quei paesi verso la metà di maggio. In Trevi le scosse si sentirono con discreta intensità; ma non vi recarono alcun danno, secondo informazioni assunte dal prof. Corradi.

1859. Il giorno 22 agosto, tra 1.15′ e 1.30′ [3], secondo le notizie raccolte dal Mercalli, a Norcia si sentì una detonazione sotterranea, simile ad una scarica di artiglieria, e subito dopo un violento terremoto, che in 7″ riprese tre volte con forza sempre maggiore, e con movimento prima sussultorio poi ondulatorio, in senso nord-est-sud-ovest. In Norcia le case male costruite rovinarono interamente ed anche tutte le altre patirono gravi danni. Vi furorono 106 morti ed 80 feriti. Quasi egualmente soffrirono Campi, Casali, Capo del Colle e la Villa di Sant' Angelo; assai meno invece Abeto, Todiano, la Villa di Ancarano e Fuscaro. Il terremoto si sentì con poca intensità a Cascia ed a Trevi. Ebbe forza mediocre verso nord, sino a Pesaro e verso sud fino a Roma. Si notò che i maggiori danni accaddero nei paesi situati sui terreni mobili, come per es. le alluvioni. A Norcia le ondulazioni, essendo dirette da nord-est a sud-ovest, parevano venire dalla parte di Monte Pattino, ove si ritiene fosse il centro dello scotimento anche perchè ivi le detonazioni sotterranee erano più numerose e più forti.

Al principio delle scosse le acque della città mancarono per alcun tempo; ma presto riapparvero torbide e terrose.

Nei giorni precedenti la prima scossa se ne erano sentite altre leggiere. Dopo di essa, le scosse replicarono quasi tutti i giorni per circa un anno; e molte ancora *forti* o *fortissime*. In generale erano precedute immediatamente da detonazioni sotterranee. I rumori sotterranei nei primi giorni erano quasi continui, anche nelle ore in cui la terra non tremava. In una notte sola se ne contarono quaranta. Il padre Secchi, che si trovava in Norcia dal 29 settembre al 6 ottobre, attesta che le scosse sensibili non cessarono mai. Dopo la metà di ottobre le scosse parve tornassero quasi periodicamente presso la levata del sole.

[1] Il Mercalli ha desunto queste notizie dalle seguenti opere e giornali: Rutili-Gentili, *Notizie sui terremoti di Foligno*, Foligno 1832, e *Nuove riflessioni sulle cause naturali dei terremoti di Foligno*, già citate. — Moroni, *Diz. di erudiz:* all'articolo *Porziuncola.* — Perrey, *Memoire* ecc., pag. 96-97. — Gazzetta di Milano 26, 28 gennaio e 29 marzo 1832. — Giornale Arcadico, t. LI e LII. In parte gli furono comunicate dal prof. Corradi.

[2] *Dizionario d'erudizione,* tomo LXIX, p. 106.

[3] Secchi, *Escursione scientifica fatta a Norcia* ecc., p. 44, in 4°. — Perrey, p. 63-66. — Serpieri, *Supplem. alla metereologia ital.*, 1872, p. 8.

1873. Del terremoto avvenuto nell' Italia centrale nel marzo di quest' anno pubblicò un bellissimo lavoro il Serpieri [1] il quale riuscì a procurarsi notizie precise di circa 100 località. Scosse fortissime colpirono contemporaneamente alle ore 9.1',9" pom. del 12 marzo tutto l' Appennino da Firenze a Norcia, e qualche istante prima le coste della Dalmazia. Entro quest' area centrale del terremoto, detta dal Serpieri *radiante*, si avvertirono in generale due scosse ondulatorie tra di loro sensibilmente perpendicolari, cioè nord-ovest a sud-est (la prima e dominante) e sud-ovest a nord-est. In generale furono precedute da rombo, ed anche da forti muggiti sotterranei, specialmente in provincia di Macerata. Nel radiante le scosse furono rovinose a Fabriano, Sanginesio, Camerino e Spoleto; negli altri luoghi soltanto forti e fortissime. Le scosse di irradiamento furono in media meno violenti, ma pur rovinose ad Orvieto e Figline. Le scosse del 12 avvennero durante un generale abbassamento barometrico.

1878-81. Un' accurata e dettagliata descrizione dei terremoti umbri del 1878 redatto dal signor prof. A. Ricci trovasi nel *Bullettino del Vulcanismo Italiano* di quell' anno. Il signor Corradi (in Mercalli, pag. 331) vi aggiunge le seguenti indicazioni. Nei giorni 15 e 16 settembre 1878 vi furono in Umbria violenti scosse di terremoto, alle quali ne tennero dietro altre frequenti ma leggere, che durarono fin verso la metà di novembre dell' anno stesso. Dopo quell' epoca si è sentito di tempo in tempo qualche piccolo terremoto, e si può dire che la terra non è stata lungamente in riposo fino al marzo 1881, in cui le scosse incominciarono ad essere più frequenti. Nel giorno 11 di questo mese e nella notte fra 11 e 12 furono quasi continue e quattro di esse fortissime. Quindi tornarono a decrescere; ma ancora di quando in quando andarono ripetendosi, però con debole intensità sino ai primi di agosto 1881. Nei giorni 2, 3, 4 novembre si sentirono in Spoleto varie scosse di terremoto, alcune delle quali abbastanza spaventevoli; a Trevi non si avvertirono.

Esaminando i danni cagionati dalle scosse del 1878, il prof. Corradi rilevò come sia stata molto diversa la loro efficacia nelle varie sorta dei terreni. Infatti a Trevi, che riposa sopra compattissima roccia calcare, si riaprì soltanto qualche antica spaccatura nei muri degli edifici, ed alcune case quasi crollanti poco o nulla furono danneggiate; mentre nella pianura sottostante a Trevi, formata da terreni di trasporto di fortissimo spessore, le fabbriche anche migliori furono assai sconquassate. Ciò avvenne anche nel terremoto 1831-32 ed in altri terremoti umbri.

I terremoti del marzo 1881, quantunque forti quasi come quelli del 1878, tuttavia causarono leggerissimi guasti, tanto in città quanto in campagna. Nel tempo che le scosse si succedevano più frequenti, i cani ed altri animali si mostrarono continuamente agitati. Si videro persino saltare e correre come impazziti cavalli, asini e muli. La temperatura era molto elevata e l' aria soffocante. L' ago del galvanometro dell' Uffizio telegrafico di Trevi si agitava. Anche il giorno 8 agosto, in cui fu sentita una scossa leggiera, si notò che l' aria fino dal giorno innanzi era soffocante e caliginosa. Il prof. Corradi fa osservare che le scosse del 1878 e 81 ebbero il loro centro nella Valle Umbra fra Trevi e Montefalco, e che mostrarono una certa coincidenza colla

[1] *Supplem. alla metereologia ital.*, del 1872.

attività del Vesuvio. La quale coincidenza si verificò anche pei terremoti umbri del 1689 e 1730.

Seguono le notizie di altri terremoti, raccolte a Trevi dal prof. Corradi.

1882. Verso le 5 pomeridiane del 12 aprile furono sentite due leggere scosse di terremoto; la temperatura era molto bassa.

Il 3 maggio vi furono tre altre leggere scosse, accompagnate da cielo caliginoso e da aria soffocante. — La mattina del 26 del mese stesso fra le ore 4 e le 6 fu scossa per tre volte la terra; uno degli scuotimenti fu piuttosto forte. A Spoleto le scosse furono moltissime ed intense e durarono sin verso mezzodì, senza però arrecare alcun danno. Dicesi che il centro di questi terremoti sia stato a Visso e che là sieno caduti alcuni camini e avvenuti altri piccoli guasti.

Qualche scossa è stata sentita pure a Terni, Foligno e Assisi.

La sera del 18 dicembre, poco dopo le dieci e mezza, vennero due scosse di terremoto di intensità discreta, con brevissimo intervallo l' una dall' altra. L' aria era quieta e la temperatura assai mite.

1883. Agosto 27. Alle 7 $\frac{1}{2}$ circa di sera leggera scossa di terremoto con forte rombo. Il giorno l' aria era stata quieta e piuttosio soffocante; ma poco prima del terremoto avea cominciato a spirare un fresco venticello.

Ottobre 7. Dicesi che a Spoleto siasi avvertita una forte scossa di terremoto alle ore 11 e $\frac{1}{2}$ di sera; a Trevi non si è sentito nulla.

Ottobre 8. Dicesi che sia stata sentita qui in Trevi una leggerissima scossa di terremoto alle ore 7 pom. circa.

Ottobre 10. Anche questa sera si è sentita una leggera scossa di terremoto alle ore 6 e minuti 10.

1884. Maggio 9. Leggera scossa di terremoto con forte rombo alle ore 7 e minuti 50 circa di sera.

Agosto 15. Due leggere scosse di terremoto ondulatorio, una circa alle 8 $\frac{1}{2}$ di sera e l'altra circa alle ore 8 $\frac{3}{4}$ pure di sera.

1885. Febbraio 28. Scossa di terremoto di discreta intensità ad ore 10 e m. 13 di sera. Cielo calliginoso e temperatura piuttosto bassa. Dicesi che altre scosse siansi risentite nella notte seguente. Il terremoto fu ondulatorio, con direzione, secondo alcuni, da est a ovest.

Marzo 3. Altra scossa di terremoto di poco minore intensità della precedente a ore 4 e min. 50 antim.

Marzo 22. Una scossa leggera, a quanto si dice, vi fu poco prima dell' alba.

Giugno 10. Secondo quanto mi vien riferito, fu avvertita una leggera scossa alle ore 9 $\frac{1}{2}$.

Settembre 15. Ad ore 12 e 10′ pomerid. circa vi fu una scossa leggerissima con rombo piuttosto forte.

Ottobre 14. Alle ore 5 e 30′ ed alle ore 10 e 15′ circa del mattino furono avvertite due leggere scosse di terremoto.

Ottobre 16. Alle ore 10 e min. 42 di sera, scossa ondulatoria di mediocre intensità con direzione est-ovest. La temperatura era molto mite. Nei giorni precedenti erano cadute abbondanti piogge.

1886. Ottobre. Vi furono scosse nell' Umbria (vedi Denza, *Alcune notizie sul terremoto del 23 febbraio 1887*. Torino, 1887, pag. 16).

1887. Fine gennaio e primi di febbraio. Terremoti ad Aquila estesi anche a parte dell' Umbria (vedi opuscolo precitato, pag. 18).

Maggio 25. Alle ore 6 ½ antimeridiane circa, leggera scossa di terremoto ondulatorio, in direzione est-ovest.

Luglio 10. Alle ore 4 antimeridiane circa, due leggere scosse di terremoto ondulatorio.

Luglio 19. Alle ore 1 circa antimeridiana si è avvertita una discreta scossa di terremoto e 45 minuti circa più tardi una seconda di minore intensità. Il sig. prof. Corradi nota che nella notte aveva avvertito in sè una insolita agitazione nervosa. In questi giorni si sono avute scosse ai piedi dell' Etna e in varie città del continente. La temperatura è molto elevata.

Dicembre 26. Alle ore 5 e min. 40 circa di sera è stata avvertita, a quanto si dice, una scossa di terremeto. La temperatura è freddissima ed alterna pioggia e neve, con vento impetuoso.

1888. Marzo 16. Alle ore 7 e min. 50 antimeridiane si è avvertita una leggerissima scossa di terremoto ondulatorio con forte rombo.

Luglio 25. Alle ore 12 ½ antimeridiane leggerissima scossa ondulatoria.

Agosto 15. Alle ore 3 e 40 min. pomeridiane discreta scossa ondulatoria.

1889. Gennaio 6. Alle ore 3 circa antimeridiane dicesi sia stata avvertita una leggerissima scossa di terremoto. Cielo sereno, temperatura assai bassa.

[1] 1889. Gennaio 22. Si dice che sieno state avvertite a Trevi due leggere scosse di terremoti, una alle ore 4 pomeridiane circa ed un' altra alle 9 ¼ pomeridiane.

La scossa delle 4 o più precisamente delle 15,50′ si risentì a Spoleto ondulatoria di nord nord-est sud sud-ovest, di 3°, brevissima e a tre riprese. A Spoleto se ne avvertì un' altra all' 1,30′ di 1°.

Febbraio 3. Questa mattina alla 7 e 15 min. si è sentita a Trevi una scossa di terremoto di discreta intensità, preceduta da altre due piccole scosse e seguita da altra pure leggerissima. Alle 4 pomeridiane se ne è sentita una quinta, anch' essa debolissima.

A Spoleto ancora in febbraio si ebbe un tremito di 1° il giorno 1, alle 0,35′, e il 21 altri tremiti simili alle 10,10′.

Nel marzo a Spoleto tremiti di 1°, giorni: 3, ore 10,30′; 5, ore 8,50′; 11, ore 8; 23, ore 11.

Nell' aprile ancora a Spoleto altri tre terremoti di 1°, nei giorni: 2, ore 6; 18, ore 21; 19, ore 5.

Nel maggio a Spoleto una scossa sussultoria forte di 7° alle 17,16′ del giorno 5, durata circa 4″.

Giugno 8. Si dice sieno state avvertite a Trevi alcune leggere scosse di terremoto, una delle quali alle ore 9 ½ antimeridiane.

[1] Le notizie degli ultimi anni furono per Spoleto gentilmente comunicate dal sig. prof. Arpago Ricci, per le altre località dell' Umbria, desunte dal Supplemento al Bollett. Meter.

Nel giugno. A Spoleto si ebbero invece scosse al giorno 23, ore 1,20′ e alle 10,35, con direzione di est-ovest, con rombi provenienti da est. Altra scossa forte di grado 7° il giorno 27, alle ore 14,10′, ondulatoria di sud-ovest, nord-est, durata 4″ o 5″.

Nel settembre a Spoleto, il 18 tremito di 1° alle ore 10,48′; il 20 idem, alle 7, quindi scossa più ondulatoria che sussultoria alle 23 con direzione sud-ovest nord-est di 7°, con durata di 2″.

Nell' ottobre. A Spoleto brevissima scossa di 4° ondulatoria sud-ovest nord-est alle 20,30′ del 13.

Novembre 28. A Spoleto tremito sussultorio ondulatorio di nord-sud alle 20,15′ di 2°, brevissimo.

Dicembre 2 alle 22 e 17′ scossa ondulatoria a Trevi di discreta intensità, avvertita da molte persone, e accompagnata da rombo sotterraneo. Quasi alla stessa ora la scossa fu sentita anche a Foligno.

Nel dicembre. Ancora a Spoleto il 13 tremito alle 7,8′, ed altra alle 0,30 del giorno 25, di 1°. Nello stesso giorno leggere scosse furono segnalate quasi alla stessa ora anche a Giano, Narni, Foligno e Trevi.

1890. A Spoleto si osservarono le seguenti scosse:

Febbraio 1. Temito di 1° alle 6,10; giorno 7 idem alle 3,12′.

Maggio 10. Scosse sussultorie alle 6 di 3° brevissime ed altri tremiti di 1°, l' una alle 2 l' altra alle 9.

Maggio 7, 9, 10, 12, 13, 15, 19 e 24 e giugno 16. Vi furono leggere scosse a Trevi, Foligno ed altri luoghi dell' Umbria.

Giugno 14. Tremito di 1° sussultorio alle 7.

1891. Ancora a Spoleto, giugno 7, tremiti sussultori alle 3,35 di 1°.

Luglio 14. Scosse ondulatorie alle 6,47′ di 6° in direzione nord-ovest sud-est della durata di 2″. Dal 13 al 16 si ebbero leggere scosse a Trevi e in altri luoghi dell' Umbria.

Agosto 14 e 15. A Trevi furono avvertite tre leggere scosse.

Ottobre 6. Scossa ondulatoria alla 1,25′ di 5° in direzione nord-ovest sud-est della durata di 3″ a 4″, preceduta da lievi tremiti a piccolo intervallo, e avvertita anche in varî altri luoghi dell' Umbria e delle Marche.

1892. A Spoleto il 22 gennaio tremiti ondulatori e sussultori a varie riprese verso le 23,26′. Il 23 quivi altri tremiti alle 2,30′ di 2°, e scosse a Cerreto di Spoleto alle 0,5.

Febbraio 12. Alle 21,3′ scossa ondulatoria di 7° a Spoleto con direzione di nord-est sud-ovest della durata di 3″ a 4″ sussultoria, seguita da qualche tremito da nord nord-ovest verso le 24. Questa scossa fu sentita altresì a Massa Martana, Gualdo Caltaneo, Todi, Giano, Foligno e Trevi con discreta intensità. Nello stesso mese si ebbero in parecchie località dell'Umbria scosse i giorni 13, 14, 15, 16, 17, 19 e 20 sempre sulle ore antimeridiane.

Marzo. Repliche varie, di cui una un po' maggiore il 7 alle 7,20′ ed altra leggera il giorno 8 a Perugia.

Aprile 4. Ore 2,10 a Sellano, Norcia, mediocre; 8, ore 0,15′-0,30′, e 8,45′ a Trevi.

Agosto. Una breve scossa a Norcia il giorno 1, a 2,45′.

Nel settembre e novembre, leggera scossa in Toscana e nell' alta valle del Tevere.

1893. Gennaio 1. Un leggerissimo terremoto a Norcia alle ore 5,30'.

Febbraio 28, 21. Altra mediocre scossa a Norcia e Trevi.

Marzo 15, 9,15' mediana scossa a Giano: il 27 rari tremiti a Spoleto dalle 2 alle 15 ed alle 21 una mediocre scossa a Trevi. Il 28 a Spoleto ed in molti siti dell' Umbria, alle 7,5', una scossa mediocre, in quella città giudicata di 3°, della durata di 3″, con direzione sud sud-est nord nord-ovest.

Aprile 8. A Spoleto tremito alle 16 in direzione nord nord-est sud sud-ovest, di 1°; il giorno 20 alle 8,35' altra scossa a Montefalco e Trevi.

Giugno 6, ore 14 $\frac{1}{2}$. Leggera scossa a Norcia ed a Preci.

Agosto 1. Alle ore 23,45' due leggere scosse a Monteleone; il 2 a Spoleto alle 2,5' una scossa ondulatoria di 6°, in direzione di est-ovest, della durata di 5-6″, preceduta da tremito alle ore 1,15'. Questa scossa fu quasi contemporanea e forte a Cittaducale, Leonessa, Antrodoco, Montereale, e negli Abruzzi e fu leggermente avvertita anche in altri paesi dell' Umbria e delle Marche.

Ottobre 21, 19 e 20,15' mediocre e leggera a Spoleto, dove altra scossa si risente l' 8 novembre alle 18,57' ondulatoria di 3°, diretta est-ovest, seguita di altre scosse alle 20,17' breve di 2°. Tremiti sussultori di intensità sempre minore si risentirono poi ancora a Spoleto nei giorni 13, 16 e 26 alle ore 11,46', 6,45' e 17,27'.

Decembre 10. Alle 11,22' scossa sussultoria a Spoleto durata 2″ di 2°.

1894. Gennaio 1. Ore 4,10', scossa sussultoria-ondulatoria di 3° durata 2-3″; il giorno 8 alle 2 una scossa mediocre a Rieti.

Febbraio 6. 10,45' debole scossa a Preci, Norcia e Cascia; il 10 a 22,45 debole scossa a Narni e Otricoli; il 16 ore 11,45' e 21,40' tremiti ondulatori di 1° a Spoleto; il 19 ancora a Spoleto alle 3,10' scossa sussultoria di 1° e di 1-2″.

Marzo 18. A ore 0,11' debole scossa a Cerreto di Spoleto e Sellano; il 29 debolissima a Valle di Nera; il 30 scossa mediocre di 3° ondulatoria a Spoleto, alle ore 0,6' in direzione est-ovest, breve; ed il 31 alle ore 6 altra mediocre scossa a Scheggino, Trevi e Sellano.

Aprile, alle 3,15 del giorno 2 una debole scossa a Narni, ed alle 14,17' dello stesso giorno una scossa assai debole a Spoleto.

Maggio 14. Alle 6,30' mediocre scossa a Trevi e Montefalco.

Giugno 30. Alle 2,45' mediocre scossa a Cerreto di Spoleto.

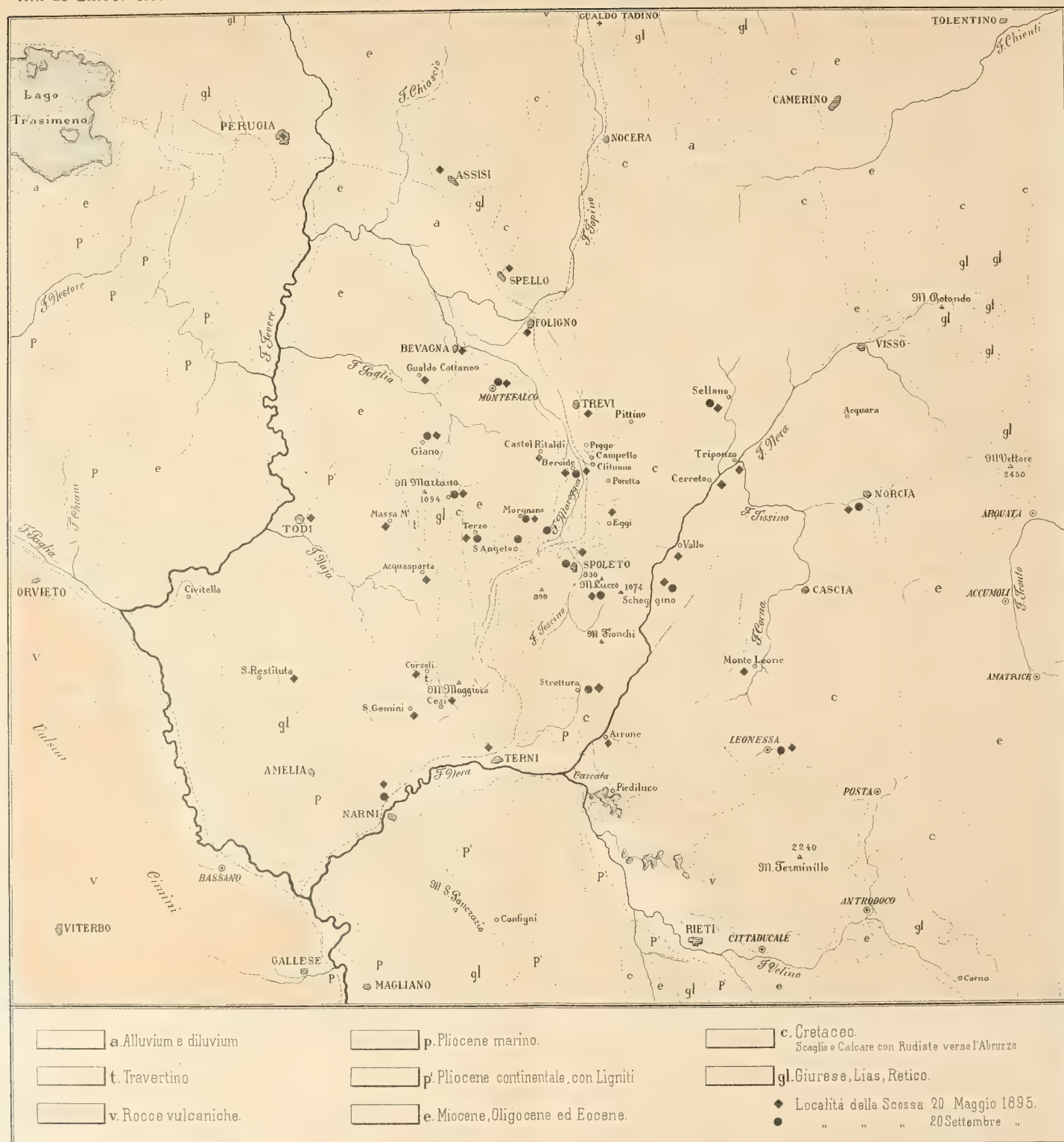
Ottobre 29. Alle 5 debole scossa a Rieti, in occasione del terremoto laziale.

1895. Marzo 27. Alle 20,45' leggera scossa a Visso; alle 21,20', a Preci lievissima scossa; e 21,37' simile a Norcia.

Aprile. A Spoleto colle scosse del giorno 7 si può considerare aperto il periodo sismico che è argomento della presente Memoria.

Può essere non senza importanza il fatto che nella montagna a levante di Spoleto, colle scosse di Visso sieno comparsi alcuni leggeri movimenti che sembrano accennare ad un certo grado di solidarietà tra le aree sismiche dell' alta valle Nerina coll' area della Valle Umbra.

Quali poi sieno le cagioni per le quali le adiacenze di Spoleto presentino quella innegabile predisposizione al terremoto che risulta dalle notizie sopraesposte, sarà a

definire, come si disse, con più attento esame delle condizioni stratigrafiche. Io ho chiamato l' attenzione del lettore sulla probabile esistenza di fratture convergenti presso a poco in corrispondenza della città di Spoleto, tra le quali sarebbe importante quella che porta la dolomica retica a ridosso della scaglia rossa, a levante della città stessa. Ho notato altresì il fatto, già rilevato dal sig. ing. Toso, dello sprone di rocce calcari tra il pliocene e sotto le alluvioni sino a s. Venanzio e la notevole disposizione discordante dei frammenti della formazione pliocenica rispetto alle più antiche formazioni secondarie ed eoceniche; quelle essendo in generale avvallate verso levante in corrispondenza appunto alla Valle Umbra, regione di abbassamento, rispetto alla regione più a ponente, che sta dal lato della zona vulcanica quaternaria del Tirreno. Per chi accetta o per lo meno sentesi propenso a preferire pei terremoti non vulcanici la ipotesi dell' adattamento per la prosecuzione di quelle stesse cagioni che hanno prodotto la orografia attuale, in concorso colle cause esogene, queste condizioni ponno di già assumere almeno l' importanza di indizî. Nè poteva io presumere di giungere a più sicuro risultato, colle poche osservazioni fatte in sito e colle mie scarse conoscenze sulla geologia dell' Italia Centrale. È tutto merito dei gentili signori, che mi hanno fornito le esposte notizie, se queste hanno qualche valore; a loro rendo nuove pubbliche grazie. Sarebbe poi una ommissione per me lamentevole, se non manifestassi altresì il mio grato animo al signor cav. Carlo Abetti, Sottoprefetto di Spoleto, il quale, nei giorni che io ho passati in quella città, mi fu largo di molte cortesie, mi accompagnò in alcune gite e mi procurò non poche notizie. Serberò altresì buon ricordo della gentilezza usatami dal sig. Sindaco cav. avv. Sinibaldi Tito, perchè mi ha concesso di poter tenere nel Civico Teatro una conferenza pubblica, nella quale senza calmare del tutto le preoccupazioni della cittadinanza esposi la speranza, fortunatamente realizzata, che il periodo sismico fosse al suo termine, esortando tuttavia i proprietarî di case a trar partito dalla costosa esperienza.

---

a. Alluvium e diluvium	p. Pliocene marino.	c. Cretaceo. Scaglia e Calcare con Rudiste verso l'Abruzzo
t. Travertino	p'. Pliocene continentale, con Ligniti	gl. Giurese, Lias, Retico.
v. Rocce vulcaniche.	e. Miocene, Oligocene ed Eocene.	◆ Località della Scossa 20 Maggio 1895. ● " " " 20 Settembre "

T. Taramelli — Lit. E. Bruni Pavia

Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del Pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Milano coll'equatoriale di Merz (8 pollici).

Memoria quarta del Socio G. V. SCHIAPARELLI

letta nella seduta del 6 giugno 1896.

NOTA PRELIMINARE

578. Nella opposizione 1883-1884 le osservazioni del pianeta Marte furono da me continuate col medesimo strumento, cogli stessi metodi, e nel medesimo intento che nelle tre opposizioni precedenti, di cui i risultati già da più anni videro la luce in questi *Atti* ([1]). Le circostanze atmosferiche tuttavia furono assai meno felici di quelle che dominarono nelle opposizioni 1879-80 e 1881-82. Durante un intervallo di sei mesi, dal 5 novembre 1883 al 9 maggio 1884 si è fatto tutto il possibile per non lasciar sfuggire alcuna buona occasione. Ciò malgrado, il numero delle giornate sufficientemente buone per tali osservazioni non fu che di sedici, alcune altre se n' ebbero di mediocri. Tutte poi furono così distribuite, da non abbracciare uniformemente l' intero perimetro del pianeta. Così è avvenuto, che mentre si poterono descrivere ripetutamente e con qualche successo alcune regioni, specialmente quella compresa fra i meridiani 10° e 60°, di altre non si riuscì mai ad ottenere una vista intieramente soddisfacente. Queste sfavorevoli circostanze furono aggravate dalla piccolezza del diametro apparente, il quale mai non raggiunse i 14″, e pel quale un istrumento di 8 pollici d' apertura, quantunque eccellente, più volte apparve insufficiente a far intendere il vero significato delle cose vedute.

579. Le condizioni di positura del pianeta, quanto a distanza ed inclinazione dell' asse, si possono rilevare dal seguente breve estratto della *Ephemeris for Physical*

([1]) La presente Memoria è stata preceduta da altre tre, portanti il medesimo titolo. La prima, destinata all'opposizione del 1877, fu pubblicata l'anno 1878 in questi *Atti*, Volume III, Serie III. La seconda comprende l'opposizione 1879-80 e sta nel Volume X, Serie III. La terza tratta dell'opposizione 1881-1882, e si trova nel Volume III della Serie IV. Per comodità di riferimento in tutte e quattro le Memorie è stata adottata una sola numerazione progressiva dei paragrafi.

Observations of Mars, pubblicata dal signor A. Marth nelle Notizie mensili della Società Reale Astronomica di Londra, Vol. XLIII, pp. 490-492.

Data	Inclinazione dell' asse	Diametro apparente	Data	Inclinazione dell' asse	Diametro apparente
1883 Nov. 1	+16°,40	7″,65	1884 Feb. 9	+13°,73	13″,73
Nov. 11	17,46	8,18	Feb. 19	12,81	13,12
Nov. 21	18,23	8,81	Feb. 29	12,32	12,24
Dic. 1	18,68	9,54	Mar. 10	12,33	11,28
Dic. 11	18,83	10,36	Mar. 20	12,79	10,33
Dic. 21	18,65	11,26	Mar. 30	13,62	9,46
Dic. 31	18,14	12,19	Apr. 9	14,72	8,69
1884 Gen. 10	17,31	13,05	Apr. 19	16,01	8,02
Gen. 20	16,20	13,69	Apr. 29	17,41	7,45
Gen. 30	14,93	13,94	Mag. 9	18,85	6,95

	Emisfero boreale	Emisfero australe
1883 Ottobre 26	Equin. di primavera	Equinozio d' autunno
1884 Maggio 13	Solstizio d' estate	Solstizio d' inverno

Durante tutto questo tempo fu in vista il polo boreale del pianeta. Le migliori osservazioni si trovano quasi tutte raggruppate entro l' intervallo di 23 giorni, dal 30 gennaio al 21 febbraio. Anche in marzo si ebbero alcune buone serate, ma il diametro apparente era allora già molto ridotto.

CAPITOLO I.

Osservazioni sulla direzione dell'asse rotatorio di Marte.

580. Durante i mesi di novembre, dicembre e gennaio la macchia polare boreale (la sola visibile delle due) si trovò sempre più o meno impegnata col suo lato precedente nel corno boreale della fase oscura; il che, per ragioni esposte nella Memoria I, §. 5, ha impedito di fare in quell'intervallo osservazioni intieramente attendibili sull'angolo di posizione della medesima. Il 28 gennaio però essa divenne intieramente libera, e tale rimase fino all'aprile, nel qual mese la fase oscura, dopo aver girato il contorno del disco dalla parte australe, venne ad accostarsele di nuovo dall'altro lato. Nell'intervallo trascorso entro le date 29 gennaio e 1° aprile la distanza del perimetro della neve dal corno più vicino non fu mai minore di 10° del lembo [1]; in questo intervallo furono prese (col metodo esposto al §. 5) 61 misure di posizione della macchia bianca, facendo per lo più due puntate, spesso una sola, qualche volta tre, quando l'accordo fra le prime due non era soddisfacente. Tutte queste, senza esclusione di alcuna, furono prese per fondamento al calcolo della posizione dell'asse, e del luogo areografico della macchia suddetta.

581. Tale calcolo è intieramente identico a quello che per l'opposizione 1881-82 è stato esposto nella Memoria terza, §§. 439-442, alla quale ci riportiamo per la spiegazione. Essendo P la posizione osservata della macchia bianca; p la posizione dell'asse quale risulta nell'Effemeride del Signor Marth [2] da calcolo fondato sopra elementi già molto approssimati; dp la correzione (supposta costante per tutto il tempo delle osservazioni) della quantità p; θ la longitudine areografica del punto di mezzo della macchia polare, contata al solito modo; λ la distanza di detto punto centrale dal polo boreale di Marte in gradi di circolo massimo; ω finalmente la longitudine areografica del punto della superficie di Marte che occupa il centro del disco al momento della misura; si ha la relazione

$$\text{(a)} \qquad P - p = dp - \lambda \cos\theta . \sin\omega + \lambda \sin\theta . \cos\omega$$

fra le incognite dp, $\lambda \cos\theta$, $\lambda \sin\theta$, e le quantità note P, p, ω. Ogni osservazione di P

[1] Ciò risulta senz'altro dalla piccola Tabella qui appresso, la quale in corrispondenza alle date della prima colonna presenta la distanza $\varkappa$ del perimetro della macchia del corno più vicino, che fino al 2 febbraio precedeva la neve nel moto diurno, dopo il 2 febbraio la seguiva. Questi numeri sono stati ottenuti combinando i dati dell'Effemeride di Marth sulla posizione del polo boreale e dei corni della fase coll'ampiezza apparente della macchia bianca quale risulta dalle osservazioni che si riferiranno più sotto nel Capitolo III della presente Memoria.

1884	Gennaio	28	$\varkappa =$ 4°		1884	Marzo	2	$\varkappa =$ 12°
	—	30	25			—	12	11
	Febbraio	1	59			—	22	11
	—	11	22			Aprile	1	10
	—	21	14			Maggio	1	9

[2] *Monthly Notices of the Royal Astron. Society*, vol. XLIII, pp. 491-492.

fornirà un' equazione per determinare tali incognite. Il quadro seguente, analogo a quello del §. 440, dà nella quarta colonna il valore di ω interpolato per l' istante di ciascuna osservazione nell' Effemeride di Marth, nella quinta il valore osservato di P, nella sesta quello di $P - p$, cioè del primo membro delle equazioni di cui (a) è il tipo. L' ultima colonna segnata ε dà gli errori che restano nelle equazioni stesse, quando vi si surroghino i valori più probabili (da riferirsi qui appresso) delle incognite dp, $\lambda \cos\theta$, $\lambda \sin\theta$.

QUADRO *contenente le osservazioni di posizione della macchia polare boreale fatte nel 1884, e gli elementi del calcolo di ciascuna.*

Num.	Data 1884	Tempo siderale	ω	P	P-p	ε
		h m	°	°	°	°
1	Gennaio 29	5.12	99,18	353,29	— 6,12	— 3,41
2	—	5.55	109,63	355,74	— 3,67	— 1,22
3	Gennaio 30	3.25	63,50	352,31	— 6,86	— 3,38
4	—	4.45	82,94	354,56	— 4,61	— 1,45
5	—	5.44	98,28	354,56	— 4,61	— 1,86
6	Febbraio 3	4.20	38,06	351,78	— 6,38	— 2,95
7	Febbraio 4	3.10	11,36	354,16	— 3,76	— 0,95
8	—	5.36	46,83	352,56	— 5,36	— 1,86
9	Febbraio 5	2.59	359,00	356,66	— 1,02	+ 1,37
10	Febbraio 6	3. 7	351,28	356,28	— 1,16	+ 0,99
11	—	5.34	27,01	354,28	— 3,16	+ 0,06
12	—	7.11	50,58	351,18	— 6,26	— 2,73
13	—	8.34	70,75	352,08	— 5,36	— 1,94
14	Febbraio 7	3.14	343,31	356,33	— 0,86	+ 0,88
15	—	4.17	358,62	355,23	— 1,96	+ 0,43
16	Febbraio 13	7. 1	340,31	356,33	+ 0,54	+ 2,14
17	—	8.41	4,61	355,58	— 0,21	+ 2,41
18	Febbraio 18	7. 1	291,52	354,08	— 0,68	— 1,27
19	Febbraio 19	3.41	233,11	358,33	+ 3,70	— 1,84
20	—	4.45	248,66	356,68	+ 2,05	+ 0,29
21	—	8.25	298,96	353,98	— 0,65	— 0,93
22	Febbraio 20	3.31	221,50	356,25	+ 1,81	+ 0,01
23	—	5.28	249,93	355,90	+ 1,46	— 0,26
24	—	8.57	300,72	352,10	— 2,34	— 2,54
25	Febbraio 21	3.31	211,11	357,55	+ 3,27	+ 1,60
26	—	4.56	231,76	356,70	+ 2,42	+ 0,55
27	—	8.55	289,84	351,10	— 3,18	— 3,84
28	Febbraio 22	3.40	203,23	355,10	+ 0,98	— 0,50

Num.	Data 1884	Tempo siderale	ω	P	P-p	ε
		h m	°	°	°	°
29	Febbraio 22	5. 9	224,86	355,20	+ 1,08	— 0,77
30	—	8.46	277,59	352,10	— 2,02	— 3,11
31	Febbraio 25	4.10	181.04	356,05	+ 2,37	+ 1,56
32	Febbraio 27	4.14	162,30	356,30	+ 2,88	+ 2,86
33	—	7.39	212,11	354,10	+ 0,68	— 1,00
34	Marzo 2	4.12	122,18	354,45	+ 1,43	+ 3,21
35	Marzo 3	4.19	113,95	353,95	+ 1,01	+ 3,15
36	Marzo 4	4.27	105,93	351,93	— 0,93	+ 1,53
37	Marzo 5	4.20	109,83	351,00	— 1,80	+ 0,52
38	Marzo 7	5.48	95,48	352,45	— 0,26	+ 2,59
39	Marzo 8	5.13	76,95	349,75	— 2,91	+ 0,37
40	Marzo 9	4.45	60,15	347,65	— 4,98	— 1,47
41	—	6.17	82,51	348,90	— 3,73	— 0,57
42	—	9.18	126,49	351,10	— 1,53	+ 0,13
43	Marzo 13	5.13	26,74	349,55	— 3,03	+ 0,19
44	—	6.20	43,02	347,60	— 4,98	— 1,51
45	Marzo 14	5.17	17,16	348,75	— 3,83	— 0,83
46	—	7.31	50,93	349,30	— 3,28	+ 0,24
47	Marzo 15	5.11	6,10	352,40	— 0,20	+ 2,43
48	Marzo 16	4.50	350,89	353,25	+ 0,63	+ 2,69
49	Marzo 17	5.23	348,79	353,75	+ 1,11	+ 0,88
50	Marzo 18	5.23	338,66	351,70	— 0,98	+ 0,56
51	Marzo 19	5.53	335,84	355,17	+ 2,45	+ 3,85
52	Marzo 20	5.45	323,76	355,70	+ 2,94	+ 3,79
53	Marzo 21	5.33	310,68	354,15	+ 1,33	+ 1,60
54	Marzo 23	5.48	294,01	354,87	+ 1,91	+ 1,43
55	Marzo 24	6. 9	287,60	350,57	— 2,46	— 3,18
56	Marzo 25	5.58	276,08	352,13	— 0,98	— 2,13
57	Marzo 26	7.22	290,30	352,25	— 0,94	— 1,60
58	Marzo 28	6.26	252,13	353,90	+ 0,51	— 1,21
59	Aprile 1	6.36	213,58	355,73	+ 1,89	+ 0,18
60	—	8.41	244,44	355,80	+ 1,96	+ 0,14
61	—	10.16	267,04	355,00	+ 1,16	— 0,25

582. Le 61 equazioni del tipo (a), trattate col solito metodo nella supposizione che tutte siano di egual peso, danno le equazioni normali

$$
\begin{aligned}
-65^\circ 38 &= +61.00 \cdot dp + 1.78 \cdot \lambda \cos\theta + 11.67 \cdot \lambda \sin\theta \\
+74.93 &= +1.78 \cdot dp + 33.65 \cdot \lambda \cos\theta - 2.20 \cdot \lambda \sin\theta \\
-58.03 &= +11.67 \cdot dp - 2.20 \cdot \lambda \cos\theta + 27.25 \cdot \lambda \sin\theta
\end{aligned}
$$

e da esse si traggono per le incognite i seguenti valori:

$$dp = -0°.829 \pm 0°.173 \ldots\ldots \text{peso } 55.78:$$
$$\lambda \cos\theta = +2.163 \pm 0.224 \ldots\ldots \;\text{»}\; 33.34:$$
$$\lambda \sin\theta = -1.600 \pm 0.259 \ldots\ldots \;\text{»}\; 24.82:$$

alle due ultime possiamo surrogare anche queste altre

$$\lambda = 2°.690 \pm 0°.235: \qquad \theta = 323°.52 \pm 5°.30.$$

L'errore probabile di una delle osservazioni impiegate è di ± 1°29 che poco differisce da ± 1°38 trovato nel 1882 e da ± 1°24 trovato nel 1879. Rimangono però sempre molto più esatte le osservazioni del 1877, dalle quali risultava ± 0°.77. La differenza si spiega non solo col maggior diametro apparente del pianeta (che fu allora di circa 25″), ma anche perchè in quell'anno la macchia, piccola com'era e ben limitata, fu anche sempre di facilissima osservazione. Nel 1879 la grande obliquità della prospettiva la rendeva spesso poco visibile: nel 1882 e nel 1884 il suo diametro era troppo grande, e le irregolarità della sua forma potevano dar luogo ad esseri molto considerabili.

583. In una macchia d'area così estesa, il cui diametro durante le osservazioni variò da 40° a 20°, sono da aspettarsi irregolarità variabili di forma e di successiva sfaldatura, incompatibili colla supposizione che essa abbia avuto un centro geometrico di posizione fissa. Ciò è abbastanza indicato dalle permanenze di segni che si vedono nell'ultima colonna del quadro qui sopra. Nondimeno comparando i valori qui sopra trovati per λ e per θ coi loro errori probabili, si può concludere con sufficiente sicurezza, che la macchia polare boreale nei mesi di febbraio e marzo 1884 non fu centrata esattamente sul polo, ma deviò da questo di 2°.62 ([1]) nella direzione del Corno d'Ammone a un dipresso. Notabile è, che qualche cosa di simile sembra aver avuto luogo nel 1882 dalla metà di febbraio alla fine di aprile. Se, infatti, riportandoci alla Tabella del §. 441, ne separiamo le ultime 19 osservazioni, le quali appartengono al detto intervallo, troviamo i seguenti valori della quantità P-p, cioè le seguenti deviazioni della posizione osservata della macchia polare dalla posizione del polo boreale quale risulta dall'Effemeride di Marth.

Data 1882		ω	P-p	Data 1882		ω	P-p
Febbraio	13	130°,37	— 1°,69	Marzo	14	223°,89	+ 0°,20
—	14	115,54	— 0,34	—	15	214,94	+ 2,92
—	16	100,31	— 4,40	—	16	203,79	+ 0,28
—	17	83,40	— 2,48	—	17	199,98	+ 1,75
—	18	76,50	— 3,06	—	18	185,96	+ 5,00
—	22	45,31	— 2,94	—	19	178,23	+ 1,07
—	24	32,52	— 0,86	Aprile	6	4,03	+ 3,60
—	27	8,42	+ 1,78	—	6	358,28	+ 3,11
—	28	343,95	+ 1,35	—	19	243,54	+ 2,36
Marzo	14	223,89	+ 0,20	—	21	222,11	+ 1,59

([1]) Durante queste osservazioni il polo boreale essendosi trovato ad una distanza di circa 13° (in media) dal terminatore all'emisfero visibile di Marte, il valore trovato di λ, che è 2°69, deve essere ridotto nella proporzione di 1 : cos 13° affinchè ne risulti la distanza effettiva del centro della macchia dal polo. Vedi su ciò quanto è esposto § 204. Tale distanza è pertanto 2°62 come si disse qui sopra.

Senza entrare in una discussione regolare di questi risultati, si vedrà da una semplice ispezione, che per i valori di ω da 10° a 170° tutte le deviazioni P-p sono negative, e positive tutte quelle che corrispondono ai valori di ω compresi da 170° a 10°. Questo indica, che alla metà di febbraio 1882 incominciò a pronunziarsi una deviazione del centro della macchia bianca del polo nella direzione press'a poco del 360° meridiano (meridiano di Aryn): la distanza di esso centro dal polo ha potuto essere in aprile di due o tre gradi. Dall'aprile 1882 al febbraio 1884 son corsi 22 mesi, cioè un'intera rivoluzione delle stagioni di Marte. La differenza delle direzioni della macchia bianca rispetto al polo non sarebbe stata che di 37°. Questi caratteri di periodicità meritano una attenzione ulteriore: e senza attribuire per ora ai medesimi troppa importanza, sarà utile investigazione più tardi, se abbia luogo anche per la macchia boreale una deviazione dal polo, se non permanente, almeno periodica in dipendenza dalle stagioni.

584. La correzione dp dell'angolo di posizione dell'asse di Marte quale è dato dall'Effemeride di Marth è questa volta piuttosto considerevole, e cinque volte maggiore del suo errore probabile; cioè — 0°,83 ± 0°,17. Se prendiamo per epoca media delle osservazioni il giorno 2 marzo a mezzodì medio di Greenwich, l'angolo di posizione dato dalla succitata Effemeride sarà 353°04; applicandovi la correzione trovata, avremo come risultato definitivo che l'angolo di posizione della metà boreale dell'asse di Marte veduto dalla Terra fu

$$P = 352°21 \pm 0°17$$

nel momento, in cui le coordinate apparenti geocentriche di Marte erano

$$AR = 126°.25',7 \qquad D = + 23°.18',7\,;$$

e così si hanno gli elementi di un circolo massimo, su cui si deve trovare la proiezione del polo di Marte sulla sfera celeste. È il *quarto* dei circoli massimi in questo modo da noi determinati, e potrà più tardi servire a definire con maggiore esattezza il luogo di quella proiezione. Tale luogo, da me determinato provvisoriamente colle sole osservazioni del 1877 e del 1879 (§. 290) dà per l'epoca 1884,2

$$\text{(m)} \qquad AR = 318°.9',8 \qquad D = + 53°.38',1:$$

combinandolo colle coordinate di Marte sopra riferite, otteniamo pel 2 marzo a mezzodì di Greenwich la posizione dell'asse 352°.91 che supera di 0°70 l'angolo 352°21 dato dalle precedenti osservazioni. Tale differenza accenna alla necessità di apportare alle coordinate (m) una sensibile correzione.

585. Nella stessa opposizione del 1884 il Dr. Lohse ha fatto a Potsdam una serie di misure analoghe alle precedenti, usando però d'un micrometro a doppia immagine. Egli disponeva le due immagini di Marte l'una presso l'altra in modo, che i centri dei due dischi e i centri delle due macchie polari stessero fra loro in linea retta [1]. Da 30 osservazioni comprese nell'intervallo 21 gennaio-25 febbraio e fondate ciascuna sul medio di *dieci* puntate, egli ricava per la correzione dell'Effemeride di Marth

$$dp = -\, 0°.216 \pm 0°.185$$

[1] *Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam*, vol. VIII, pp. 107-116.

dove noi trovammo $dp = -0^{\circ}.829 \pm 0^{\circ}.173$. La differenza è $0^{\circ}613$ e non esce dai limiti dei possibili errori. Adottando questo risultato di Lohse, la correzione all'angolo di posizione dell'asse quale risulta dagli elementi (m) è ridotta a $-0^{\circ}.09$, dove dalle nostre osservazioni si aveva $-0^{\circ}.70$.

586. Quanto al luogo della macchia polare il Dr. Lohse trova, che entro ai limiti del probabile errore coincide col polo stesso. Tali risultati sembrano contraddire a quelli dedotti dalle osservazioni di Milano (§. 583): ma la contraddizione è solo apparente, dovendo tenersi conto del fatto, che le due serie di osservazioni non sono intieramente contemporanee, non avendo di comune che il solo intervallo dal 29 gennaio al 25 febbraio. Il Dr. Lohse non sembra avere una grande idea della convenienza d'impiegare il micrometro filare in simili osservazioni, e scrive: « È noto, che cotali misure non si possono fare troppo bene coll'aiuto dei micrometri filari, e che i micrometri a doppia immagine sono per questo effetto più appropriati ». Se mi fosse permesso di esprimere un'opinione a questo riguardo, direi che il metodo delle doppie immagini sembra produrre errori accidentali minori che il micrometro filare da me usato; ma nel caso presente il suo uso è sempre in qualche misura soggetto ad un errore sistematico dipendente dalla fase, essendo inevitabile un influsso di questa (e diciamo anche, della diversa intensità dell'illuminazione solare sulle varie parti dell'emisfero visibile) sopra la stima del luogo che si deve assumere come centro del disco. Di questo errore sistematico il Dr. Lohse non ha tenuto conto nel calcolare le sue osservazioni del 1884, sebbene se ne sia fatto carico nella discussione delle opposizioni 1886 e 1888. — Da questo influsso della fase sono al contrario sempre libere le osservazioni ottenute col micrometro filare, quando si facciano col metodo spiegato nella Memoria I, §. 5; e quando si abbia cura di limitarle al tempo in cui la macchia polare è intieramente libera dalla fase, e fra le sue estremità e il corno più vicino rimane libero pure un certo intervallo di alcuni gradi. A questa condizione io mi sono sempre ingegnato di soddisfare rigorosamente (v. qui sopra §. 580).

CAPITOLO II.

Osservazioni sull'aspetto presentato dalle varie regioni del pianeta durante l'opposizione 1883-84.

Sezione I.

Generalità.

587. Nell' antecedente opposizione l' inclinazione dell' asse durante i mesi delle più utili osservazioni fu di circa 90° rispetto alla linea visuale, per modo che al centro del disco passavano sempre punti assai poco distanti dall' Equatore di Marte. Nella presente opposizione, durante i due mesi più utili per le osservazioni (gennaio e febbraio 1884), passavano al centro del disco punti, la cui latitudine boreale era compresa fra 13° e 17°. Per tal motivo si poterono spingere le indagini circa 15° più verso Nord di quanto si era fatto nell' opposizione precedente, arrivando così fin quasi a 30° dal polo boreale. Però, a cagione di più circostanze sfavorevoli, le osservazioni di questa zona addizionale compresa fra + 45° e + 60° non sono state soddisfacenti che nell' intervallo di circa 120° compreso fra i meridiani della Gran Sirte e del Mare Acidalio. A questa zona del resto appartengono quasi esclusivamente le cose nuove, che non si trovano nelle carte precedenti. In compenso quasi niente si è potuto osservare delle regioni australi al di là del 40° parallelo; non soltanto a cagione dell' obliquità, ma ancora per la tinta quasi uniforme di cui costantemente furono coperte quelle regioni, interrotta soltanto dall' occasionale comparsa di qualche macchia brillante nelle località di Thyle I e II, Argyre I, Noachide ecc. — Nella zona più favorevolmente collocata fra + 45° e — 15° di latitudine si fecero, a dir vero, molte osservazioni interessanti, specialmente di cambiamenti avvenuti; nulla però o ben poco si trovò, che prima sotto quella, o sotto poco diversa forma già non fosse stato veduto. Parecchi oggetti osservati in essa zona durante l' opposizione 1881-82 non furono più visibili in questa, per esempio i canali Erinni, Cocito, Galaxias, Anubi, Athyr, Arasse, l' isola Faro, e l' isola di Japeto; a compensare l' assenza dei quali non bastano la comparsa di due macchiette oscure (o laghi?) lungo il corso dell' Oxo, e il complemento dell' Issedone, di cui solo una metà era stata visibile nel 1882. Anche tenendo conto delle condizioni atmosferiche meno felici, che ebbero luogo durante l' opposizione qui descritta, e delle variazioni effettive che hanno realmente luogo nella visibilità di questo o quell' oggetto, sembra possiamo inferire, esser oramai esauste tutte o quasi tutte le scoperte, che si possono fare col nostro telescopio di 8 pollici nell' area accennata; e che nuova copia di cose nuove si potrà ottenere soltanto usando di telescopi maggiori e collocati in miglior clima. Pertanto, più che descrizione di cose non prima vedute, il lettore dovrà aspettare in questa e nelle seguenti Memorie uno studio minuto e particolare dei fenomeni estremamente varî e complicati, i quali già in copia sovrab-

bondante (per non dire molesta ed opprimente) si presentano, quando si fa studio diligente delle mutazioni avvenute in oggetti già prima d'oggi conosciuti.

588. Il quadro che segue indica la distribuzione delle osservazioni di questa opposizione secondo i giorni dal 5 novembre 1883 al 9 maggio 1884; e per ciascun giorno dà il valore di ω (cioè della longitudine areografica di quel punto della superficie, che è al centro del disco apparente) per il principio e per la fine delle osservazioni di quel giorno, più lo stato dell'immagine, o i diversi stati, che ebbero luogo successivamente. Il quale stato per lo più dal principio alla fine andava sempre peggiorando; tale essendo la costituzione di questo nostro clima, che le ore migliori seguano immediatamente il tramonto del Sole, e offrano immagini sempre meno buone col progredir della notte. Per questa ragione anche è avvenuto in questo e in tutti gli altri anni, di aver sempre maggior copia di buone osservazioni dopo il giorno dell'opposizione, che prima di esso. Infatti prima dell'opposizione Marte non è sufficientemente alto sull'orizzonte che ad ore tarde della notte, quando l'immagine per lo più è già corrotta. Dopo l'opposizione (e specialmente 4-5-6 settimane dopo) Marte essendo già alto al tramontar del Sole, si può cominciar ad osservare quando ricorrono le ore migliori. — In alcuni giorni le osservazioni sono distribuite in due serie separate da parecchie ore d'intervallo; per questi è stata indicata ciascuna serie separatamente. Lo stato dell'immagine è indicato coi numeri I II III IV; il segno I corrisponde alla massima tranquillità e alla perfezione quasi ideale; con IV è indicato quello stato tanto cattivo, che le osservazioni in esso fatte riescono di poco o nessun profitto. Tale stato segnava per lo più la fine delle osservazioni in ciascun giorno.

Data	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell'immagine	Data	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell'immagine
	° °	″			° °	″	
Nov. 5	214-218	7,8	III	Genn. 4	2-19	12,6	III
— 12	154-158	8,2	IV	— 9	314-330	12,9	III-IV
— 18	146-150	8,6	IV	— 10	304-343	13,0	III-II, talvolta I
— 20	155-162	8,8	III	— 12	288-303	13,2	III
— 21	128-140	8,8	III	— 13	271-286	13,3	II-III
Dic. 4	338-352	9,8	III-IV	— 14	254-265	13,3	III
— 5	338-351	9,9	III-IV	— 15	235-273	13,4	IV
— 7	333-360	10,0	III-II-III-IV	— 17	220-230	13,5	IV
— 11	287-324	10,4	IV	— 18	210-273	13,6	II
— 13	291-303	10,5	III	— 19	201-218	13,6	III-IV
— 14	282-297	10,6	III-IV	— 20	185-219	13,7	III, talvolta II
— 18	165-200	11,0	III	— 21	173-216	13,7	III
— 20	152-160	11,2	III-IV	— 22	169-190	13,8	I-II, poi IV
— 22	137-192	11,4	II-III, nuvole	— 23	163-170	13,8	III-IV
— 31	52-72	12,1	III	— 25	111-138	13,9	II-III
Genn. 2	18-51	12,4	II	— 27	131-165	13,9	II-III
— 3	11-28	12,5	III	— 28	90-98	13,9	IV

Data	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell'immagine	Data	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell'immagine
	° °	″			° °	″	
Genn. 29	95-119	13,9	II-III	Mar. 7	93-100	11,6	III
— 30	62-104	13,9	II, talvolta I	— 8	76-92	11,5	IV, talvolta III
Febb. 3	32-40	13,9	III, talvolta II	— 9	60-90	11,4	II
— 4	6-63	13,9	III-II-IV	— 13	26-44	11,0	II
— 5	357-20	13,9	II	— 14	15-58	10,9	II, talvolta I
— 5	73-86	13,9	III	— 15	5-40	10,8	II
— 6	351-358	13,8	II, nebbia	— 15	79-84	10,8	III
— 6	26-71	13,8	II	— 16	350-24	10,7	II-III
— 7	342-9	13,8	II, nebbia	— 17	349-4	10,6	II-III
— 13	339 5	13,5	II, nebbia	— 18	338-350	10,5	III, talvolta II
— 18	290-319	13,1	III	— 19	335-353	10,4	III, talvolta II
— 19	233-258	13,0	II-III	— 20	323-342	10,3	II, fosco
— 19	296-311	13,0	II-III	— 21	310-321	10,2	III
— 20	221-260	13,0	II, talvolta I	— 23	294-313	10,0	III
— 20	300-327	13,0	III, talvolta II	— 24	287-291	10,0	III, nuvole
— 21	206-241	12,9	II-III	— 25	276-294	9,9	IV
— 21	288-305	12,9	III-II-III	— 26	270-290	9,8	IV
— 22	203-225	12,8	II	— 28	252-255	9,6	III-II, nuvole
— 22	278-283	12,8	IV-III, nuvole	Apr. 1	213-217	9,3	III
— 25	180-187	12,5	IV	— 1	293-299	9,3	II
— 27	159-185	12,4	II	— 2	208-212	9,2	III
— 27	212-225	12,4	III, talvolta II	— 8	154-158	8,7	III
Mar. 2	121-126	12,0	III-IV	— 12	121-125	8,4	IV
— 3	113-118	11,9	III-IV	— 15	86-100	8,3	I-II
— 4	105-115	11,9	III	— 25	1-5	7,7	III
— 5	99-110	11,7	III, nebbia	Mag. 9	229-233	6,9	II
— 6	95-105	11,7	II, nuvole				

Le giornate di più utili e più copiose osservazioni furono dicembre 22, gennaio 10, 18, 30, febbraio 4, 5, 6, 19, 20, 21, 27, marzo 9, 13, 14, 15, 16. I momenti migliori per qualità d'immagine si ebbero nei giorni 10, 22, 30 gennaio, 13 e 20 febbraio, 14 marzo, 15 aprile; ma per lo più furono di breve durata, e le più soddisfacenti osservazioni ebbero luogo per la massima parte nello stato d'atmosfera buono, ma non ottimo, segnato col numero II. La maggior permanenza di questo stato dava all'osservatore maggior comodo di ritornar più volte sul medesimo oggetto, e anche di far quietare l'occhio per sufficienti intervalli.

589. Riguardo alla Carta annessa a questa Memoria dobbiamo espressamente far notare, che essa non ha la pretesa (come neppur l'ebbero le precedenti) di dare una rappresentazione esatta dello stato di Marte nè in generale per qualunque tempo (cosa impossibile per le continue variazioni che avvengono alla superficie del pianeta) e

neppure per un dato momento o per un dato periodo. La Carta serve soltanto come spiegazione e come illustrazione delle descrizioni verbali, nelle quali ad essa si fa continuo riferimento; il che però non esclude, che si sia tentato di rappresentare in essa ciascuna regione nella forma che più si potè approssimata al vero aspetto, e per quanto lo concesse la poca perizia del disegnatore e la impossibilità di usare la grande varietà di colori, che rende così bello a vedersi questo pianeta. — Pochi nomi furono aggiunti nella zona più boreale nuovamente esplorata; nel far che si è usato di una certa parsimonia, l' esperienza avendo dimostrato esser utile non dare il nome ad un oggetto qualsiasi prima d' averne riconosciuta con qualche precisione la natura e la forma. — Ho aggiunto poi nelle due Tavole II e III la riproduzione dei più importanti disegni da me presi durante l' attuale opposizione, ai quali si fa riferimento in più luoghi della presente Memoria. La corrispondente data e posizione del meridiano centrale, l' amplificazione impiegata e la qualità dell' atmosfera nel tempo in cui ciascun disegno è stato fatto, son dati dalla seguente Tabella.

Num.	Data	ω	Amplif.	Qualità dell' immagine	Annotazioni
I	1884 14 Marzo	22°	417	I	
II	1884 4 Febbraio	24	417	II	
III	1884 9 Marzo	71	417	II	
IV	1884 25 Gennaio	130	322	II-III	
V	1883 22 Dicembre	139	322	II	
VI	1884 27 Febbraio	160	322	II	
VII	1884 18 Gennaio	220	322	II	incompleto
VIII	1884 19 Febbraio	295	322	II-III	

Sezione II.

Dalla Gran Sirte all' Indo.

590. Durante l' opposizione 1883-84 il Corno d'Ammone non mostrò quella forma ottusa o quasi smussata, che si osserva nelle carte del 1877 e del 1879: si presentò anzi qual vertice di un angolo schietto e ben deciso come sta delineato nella carta del 1881-82. Ma neppur questa volta mi fu dato di veder il Corno d'Ammone sotto la forma di punta acuta e sottile, quale si vede nei disegni di altri osservatori (§. 54). Nel vertice non si osservò alcuna troncatura, nè linea trasversale, nè altro che accennasse all' isoletta Faro, veduta nel 1882. (§. 450). Il confine orientale di Aeria verso la Gran Sirte si mostrò come una linea continua senza alcuna sensibile interruzione di golfi. Il confine verso il Golfo Sabeo parve identico a quello dell' anno precedente, colla stessa piccola incavatura rispondente alle foci congiunte dell' Eufrate e del Phison. Furon sempre benissimo pronunziati i due corni in cui termina, e l' interposto vertice

d'Aryn. Il Golfo Sabeo fu sempre visibile come striscia oscura e ben marcata, di colore azzurro-grigio. Il 20 febbraio fu veduto anche il *serpentino*, cioè il prolungamento di tale striscia intorno all' estremità orientale della Terra di Deucalione, quale si osserva in alcuni disegni di Kaiser (§§. 172, 322, 450, 487).

591. I due oggetti prominenti in questa parte del pianeta entro terra sono l' Eufrate ed il Phison; i quali mostrarono nelle loro mutazioni d' aspetto un notevole parallelismo. L' uno e l' altro furon sempre visibili e nell' aria buona e anche nella mediocre, dal principio di Dicembre alla fine di Marzo. Trascrivo qui direttamente dal Diario le osservazioni fatte in sufficienti condizioni d' atmosfera.

Gennaio 9, 6^h 42^m siderali: Phison benissimo veduto, Oronte indubitabile, come pure l'Eufrate. — *Gennaio* 10, 6^h 38^m: Phison certo, benchè non si possa dire se sia semplice o doppio: Eufrate pure ben visibile: le foci di esso e del Phison nel Golfo Sabeo paiono distinte, e se ne dovrebbe concludere che le duplicazioni loro non sono visibili, almeno nella forma del 1882. 7^h 30^m: Tanto l'uno che l'altro sono striscie leggere, che paiono anche un po' larghe; ma della duplicità non è lecito affermar niente. 8^h 50^m: Il confronto dell'aspetto dell'Indo e del Gehon con quello dell'Eufrate e del Phison mi fa pensare alla possibilità che questi ultimi formino due duplicazioni strettissime, ma non si può affermar niente. 9^h 2^m: Magnifico momento, durante il quale credo di aver ravvisato in Eufrate se non la duplicità, almeno l'aspetto di una linea risolubile e non risoluta. È largo, e il confluente col Phison nel Golfo Sabeo si fa congiunto e non diviso.

Febbraio 13, 7^h 29^m: Veduto benissimo l'Eufrate ed il Phison; sì l'uno che l'altro mi paiono affatto semplici: hanno la forma di linee molto delicate, convergenti verso l'alto in una foce comune nel Golfo Sabeo. — *Febbraio* 18, 8^h 15^m: Eufrate e Phison veduti, ma in confuso: immagine non buona. — *Febbraio* 19, 8^h 24^m: Veduto il Phison, Eufrate meno bene; aria non molto buona. — *Febbraio* 20, 10^h 6^m: Ho un gran sospetto che il Phison sia di nuovo doppio; eppur pochi giorni fa ho creduto di vederlo distintamente semplice. Dell'Eufrate son quasi certo che è doppio; ier l'altro era semplice certamente. La duplicità sarebbe appunto come due anni fa, e l'Eufrate sarebbe una geminazione un poco più larga e più facile che il Phison. Questo sospetto per l'Eufrate confina colla certezza . . . . Ho guardato l'Astusape, e mi pare una linea sottile e semplice: così pure il Protonilo. Niente pare doppio nel resto del disco. Solo Phison ed Eufrate mostrano l'aspetto ciascuno di due linee che stan per confondersi in una ... La figura del Lago Ismenio con due lobi fa capire la corrispondenza di essi lobi coi due Eufrati; ciascun lobo o nucleo corrisponde ad un Eufrate. Io non ho più alcun dubbio. Questi due lobi si vedono benissimo anche adesso . . . . . 10^h 35^m: altro momento buono in cui la duplicità di Eufrate è confermata senz'altro. Stimo che l'intervallo dei 2 Eufrati sia $1/8$, al più $1/6$ dell'Eufrate stesso; press'a poco uguale all'intervallo dei due corni del Golfo Sabeo. — *Febbraio* 21, 9^h 8^m: Il Phison, che si vede benissimo tutto intiero, par doppio: se lo è, l'intervallo è molto minore (forse la metà) di quello indicato sulla carta del 1882. L'Eufrate poi già si vede tutto doppio, e il Lago Ismenio pare una chitarra come ieri . . . . . 10^h 1^m: sarei di parere, che i due Eufrati continuano sotto il Lago Ismenio verso il polo boreale. Cosa da verificare con immagine migliore; adesso vi è molta diffusione . . . . Nel luogo dove il Tifonio traversa Phison ed Eufrate doppi, questi sono già disimpegnati l'uno dall'altro: credo anche, che in alto le 2 bocche di Phison orientale e di Eufrate occidentale nel Golfo Sabeo sono separate da intervallo maggiore che l'anno 1882. Ma pur troppo lo stato dell'immagine non permette più così delicate inquisizioni.

Marzo 14, 5^h 45^m: aria ottima. Visto l'Eufrate, ma troppo vicino al lembo sinistro: si prolunga al di sotto del Lago Ismenio. — *Marzo* 15, 5^h 8^m: Medesima osservazione. — *Marzo* 16, 5^h 16^m: Medesima osservazione. — *Marzo* 17, 6^h 5^m: Visto Phison e Eufrate. Credo che quest'ultimo è sempre doppio, e così pure il suo prolungamento inferiore al Lago Ismenio. — *Marzo* 18, 5^h 30^m: Vedo bene il Phison, di cui la duplicità è dubbia. Quella di Eufrate non si vede direttamente, ma si conclude da ciò che si vede. — *Marzo* 19, 6^h 42^m: Vedo distintamente l'Eufrate doppio, e più distintamente ancora la parte sotto il Lago Ismenio, doppia ancor essa . . . . . 6^h 44^m: Di nuovo vedo doppio tutto l'Eufrate sotto e sopra il Lago Ismenio (cioè l'Eufrate e l'Arnon: vedi qui appresso

§ 595); nessun dubbio possibile. Circa il Phison è un'altra cosa il pronunziarsi; credo probabile che sia doppio anche lui. In ogni caso però ambedue le coppie sono molto più strette che sulla carta del 1882. — *Marzo* 20, 6^h 20^m: Eufrate come le sere scorse: doppio sotto e sopra il Lago Ismenio, difficilissimo sopra, facile sotto. 6^h 40^m: Molto probabile è anche la duplicità del Phison. — *Marzo* 23, 6^h 6^m: Visto il Phison come striscia larga e confusa. 6^h 58^m: Visto l'Eufrate come striscia larga e confusa. Aria agitata, con qualche momento di buona definizione.

592. Nell' opposizione precedente la geminazione dell' Eufrate e del Phison si produsse il 20 o il 21 gennaio. Se il fenomeno fosse strettamente regolato sul periodo delle stagioni di Marte, avrebbe dovuto prodursi questa volta l' 8 o il 9 dicembre 1883. È dunque possibile che la geminazione intraveduta il 10 gennaio consecutivo realmente già avesse luogo. Certamente poi essa aveva luogo ancora il 20 marzo, non senza qualche sospetto d' interruzione nell' intervallo. Tale interruzione, che costituirebbe un fatto nuovo ed importante, è attestata in modo categorico dall' osservazione fatta il 13 febbraio. In quel giorno l' immagine, quantunque spesso offuscata da nuvole, era ottima; nel diario si legge, che « si vedeva magnificamente la duplicazione del Golfo Sabeo » e che « il pianeta aveva tutto l' aspetto di una carta geografica ». Tuttavia prima di passare alle induzioni converrà aspettare indizi analoghi da altre osservazioni altrettanto sicure. Perchè l' osservazione positiva dell' esistenza di una geminazione può, in buone circostanze atmosferiche, raggiungere la completa certezza: non così quella della sua disparizione, la quale può sempre supporsi derivata da cause perturbatrici della visione telescopica.

593. I disegni da me fatti questa volta mostrano, che le due geminate dell' Eufrate erano dappertutto equidistanti, così il 21-22 febbraio, come il 19-20 marzo. Nel 1882 le due linee erano certamente più strette in basso verso il Lago Ismenio e meno strette dalla parte del Golfo Sabeo, siccome si può verificare sulle carte annesse alla Memoria III, ed espressamente è notato nel §. 456. Abbiam qui la prova evidente ed incontestabile, che nelle geminazioni almeno una delle due linee può esser soggetta a cambiar di luogo e di direzione. Al medesimo risultato conduce il fatto, che l' intervallo dei due Eufrati era adesso assai minore che nel 1882. Ulteriore conferma ne dà quanto si è sopra riferito della geminazione del Phison, la quale quest' anno era anche più stretta di quella dell' Eufrate. Circa la possibilità, che tutte e due le linee di una geminazione siano alquanto variabili di luogo, osserveremo che confrontando le carte del 1882 e del 1884 si vedono in ambe le epoche il lato orientale del Phison e il lato occidentale dell' Eufrate convergere nella stessa piccola baia del Golfo Sabeo. Se dunque una sola delle due linee di ciascuna geminazione si volesse riguardare come invariabile, dovrebbe questa per il Phison essere la linea orientale, e per l' Eufrate la linea occidentale. Ma trovandosi notato durante le osservazioni (1884 gennaio 10 e febbraio 21) che l' intervallo fra le due bocche di Phison orientale e di Eufrate occidentale nel Golfo Sabeo sembrava maggiore nel 1884 che nel 1882, io non oserei sostenere, che anche nelle due accennate linee non abbia avuto luogo qualche piccolo spostamento. — Soltanto misure esatte potrebbero decidere tali questioni; ma esse sono di una enorme difficoltà.

594. La parte inferiore del Phison occidentale, dal punto ove lascia la Nilosirte, fin a quello dove si divide dall'Astusape, era quest' anno grossa molto, e formava un

ramo cospicuo della Nilosirte, terminato con una macchia nera rotonda, che fu veduta bene nei giorni 19-20-21 febbraio, e segnata col nome di Lago Pseboas. Come dimostra la carta, il Phison orientale non sembrava aver con questa macchia alcuna relazione, e si distaccava direttamente dal canale maestro della Nilosirte, conservando dappertutto un aspetto uniforme. Alquanto più in alto il Phison era traversato dall'Astabora, che fu veduto la prima volta il 7 febbraio, poi di nuovo con qualche difficoltà il 20 e meglio il 21. L'Astabora si dipartiva, come nel 1882, dalla Gran Sirte poco sopra la bocca australe dell'Astusape, e andava dritto al Lago Ismenio, e precisamente al più lontano e più occidentale dei due lobi di questo lago (cioè a quello che sta a destra di chi guarda la carta). Questa disposizione curiosa fu espressamente notata nel diario delle osservazioni, e può suggerire l'ipotesi, che l'Astabora consti di due linee parallele, di cui l'una sia stata veduta nel 1882, e l'altra nel 1884. L'intersezione dell'Astabora col Phison nel 1884 non presentò nulla di notevole, e pertanto anche questa volta si è dovuto rinunziare a riveder la gran macchia scura del 1879 chiamata Coloe (§§. 398 e 537). Dell'Anubi niente di certo: solo il 22 febbraio mi pareva averne veduto tracce, ma l'osservazione fu troncata dalle nuvole. Sull'Astusape vedi più sotto (§. 669).

595. Già sopra si è accennato (§. 591) ad un prolungamento dell'Eufrate al di là del Lago Ismenio nella direzione del polo boreale: al quale, per maggior precisione di discorso si è imposto il nome speciale di *Arnon.* Il 13 febbraio certamente non si vedeva, quantunque l'immagine fosse discretamente buona; infatti in quel giorno dopo osservato il Lago Aretusa (v. qui appresso §. 596), notai espressamente che fra esso e il Lago Ismenio « vi era un intervallo chiaro, e largo ». Manca pure l'Arnon in disegni fatti il 4 gennaio, 4 e 5 febbraio, di quella regione, dove pure distintamente furon notati i laghi Aretusa ed Ismenio. Il 21 febbraio a $10^h\ 0^m$ siderali, scrissi: « Sarei di parere che i due Eufrati continuano sotto il Lago Ismenio verso il polo boreale: cosa da verificare con immagine migliore ». La verificazione si dovette attendere fino al 14 marzo; nel qual giorno, essendo $\omega = 22^\circ$ e quindi l'Eufrate molto lontano dal meridiano centrale verso il lembo sinistro, pure fu veduto tutto intiero l'Eufrate-Arnon come un solo tratto continuo dal Golfo Sabeo fino alla zona oscura che contornava la neve boreale. La parte sotto il Lago Ismenio (cioè l'Arnon) era più appariscente che la parte sopra (o l'Eufrate). Lo stesso, anche più distintamente, fu veduto il 15 e il 16 marzo. Il 17 marzo parve di riconoscerli ambidue geminati, Eufrate ed Arnon; ciò fu riconosciuto meglio il 19 ed il 20, nei quali giorni trovo notato, che l'Arnon era molto più appariscente dell'Eufrate, e che l'estremità inferiore del suo canale destro a $6^h\ 42^m$ siderali ($\omega = 348^\circ$) andava proprio diritto al centro della macchia bianca polare. L'intervallo delle due linee dell'Arnon geminato era esattamente il medesimo che quello delle due linee dell'Eufrate, di cui esse formavano il prolungamento, e passavano ambedue attraverso i lobi del Lago Ismenio.

596. Già in disegni del 4 gennaio e del 4-5 febbraio il Lago Aretusa si era mostrato come una macchia abbastanza notabile, connessa colla zona oscura perimetrale che circondava la neve polare, e formante sopra di essa zona una prominenza nereggiante molto visibile. La stessa cosa fu notata il 13 febbraio. Soltanto il 20 feb-

braio posi mente a questa nuova formazione, a ciò condotto dalla scoperta fatta poc' anzi dell'Arnon. Il 14-15 marzo il Lago Aretusa era veramente bello, spiccava fortemente sul fondo giallo, e non pareva molto minore del Lago Ismenio. Però non aveva ancora del tutto perduto contatto colla zona oscura formante orlo alla macchia polare; la quale zona si era manifestamente ritirata più in basso dopo le osservazioni del gennaio e del febbraio. Quella del 15 marzo ne fu l' ultima osservazione.

597. Parecchi rami o canali furon visti divergere dal Lago Aretusa, uno dei quali è l'Arnon già descritto. Ma prima dell'Arnon già era stato veduto fin dal 4 febbraio il Callirhoe, che va al Mare Acidalio nella direzione di sud-ovest. Apparve dapprima sotto forma di striscia obliqua alquanto confusa, che nei giorni seguenti 5 e 6 prese un aspetto meglio definito. Del Callirhoe già si aveva avuto indizio nel 1882 (§. 466); e già allora era stato notato, che la sua direzione obliqua si prolunga al di là del Mare Acidalio, formando a un dipresso un circolo massimo colla linea Chrysorrhoas-Nilokeras; ciò che fu confermato anche questa volta da osservazione del 6 febbraio. Ritornata in vista questa parte, fu veduto Callirhoe anche meglio nei giorni 13-14-15-16 marzo in forma di linea oscura forte e ben definita d' ambe le parti. Dopo il 16 marzo non si ebbe più il comodo di studiar bene questa regione.

598. Nei giorni 14-15-16 marzo fu per la prima, e finora unica volta constatata la presenza dello Xenio, il quale *come un tratto preciso fatto colla penna* correva dal Lago Aretusa al punto del Deuteronilo, dove mette capo anche l' Oxo, all' incirca sotto la longitudine 352°. In questo punto trovai una forte macchia nera rotonda, anch' essa veduta la prima volta, alla quale posi il nome di Fonte Dirceo. Ne uscivano il Deuteronilo verso oriente, il Giordano verso occidente, lo Xenio verso nord-est e l' Oxo verso sud-ovest.

599. Di due altri canali uscenti dal Lago Aretusa ho creduto di aver riconosciuto tracce abbastanza probabili. L' uno di essi andrebbe al Mare Acidalio come il Callirhoe, seguendo però press' a poco la direzione del parallelo. L' osservazione ne fu fatta il 16 marzo, essendo il diametro del pianeta ridotto a 10″,7. La distanza fra di esso e l' orlatura nera della macchia polare era allora tanto piccola, e si vedeva tanto obliquamente, da non permettere una separazione molto distinta, e perciò lo studio di quel canale deve essere riservato ad osservazioni avvenire. L' altro canale non fu veduto che come ombra straordinariamente pallida e diffusa; esso si dirigerebbe dal Lago Aretusa verso l' estremità orientale (sinistra) della Boreosirte, alla cui curva farebbe in qualche modo tangente. Forse è da considerare come un ramo di questa, e perciò ne terremo discorso più tardi.

600. Veramente curiose e degne di meditazione furono le vicende osservate questa volta nel Lago Ismenio. Durante l' intervallo 4 gennaio-13 febbraio si mostrò come macchia ovale molto visibile ed oscura, allungata nel senso del parallelo e ben contornata. Il 13 febbraio quest' ovale, esaminata in ottime condizioni, presentava una forma alquanto irregolare, appuntata alle due estremità, più stretta nel mezzo, e lunga quasi il triplo della sua larghezza maggiore, come è delineato nella carta. L' allungamento però era ben lontano dal raggiungere la misura che appare dalla carta del 1882. Il 20 e 21 febbraio era anche più stretto nel mezzo, che il 13; la sua figura era decisamente a due lobi, a ciascuno dei quali corrispondeva, traversandolo,

uno dei tratti dell' Eufrate-Arnon, il tutto come sta indicato sulla carta annessa alla presente Memoria. Nel diario di quei giorni la forma del Lago Ismenio è stata paragonata dall' osservatore a quella di una chitarra. — Nei giorni 16-20 marzo, essendo tornata in vista questa parte, il Lago Ismenio apparve sempre come un oggetto cospicuo, lungo e grosso, e fu anche osservato una volta al meridiano centrale il passaggio « del punto di mezzo fra i due bernoccoli, in cui è diviso ». Dopo il 20 marzo non si ebbe più occasione di veder bene questa parte del pianeta.

601. Se ora si faccia comparazione della divisione dell' Ismenio ora descritto con quella che si verificò nel 1882, si noterà un fatto singolare ed inaspettato: che il medesimo lago in epoche differenti può apparire geminato sotto aspetti diversi, e diviso in due zone orientate in modo diverso. Nel 1882 l' orientamento era nella direzione del Protonilo e del Deuteronilo; nel 1884 si produsse nella direzione dell' Eufrate e dell'Arnon. Si noterà che nei due casi la lunghezza delle geminazioni è in qualche modo proporzionata alle dimensioni che il lago (non geminato) ha in quella direzione. Il Lago Ismenio, nel suo stato che diremo naturale, è molto più esteso nel senso del parallelo, che nel senso del meridiano: perciò le due striscie del 1882 furono abbastanza lunghe e sottili, mentre nel 1884 furono così tozze e così brevi, da presentarsi come due macchie uguali quasi rotondeggianti, l' una a contatto coll' altra. Questo fatto, di cui troveremo più sotto qualche altro esempio, costituisce una delle proprietà più curiose delle geminazioni.

602. Il Protonilo, che congiunge il Lago Ismenio colla Nilosirte, quest' anno non fu veduto doppio. Al principio di dicembre era già molto visibile e largo, ma estremamente confuso e sfumato; ma al principio di gennaio già aveva assunto la forma di canale regolare. Nei giorni 7-21 febbraio fu veduto più volte, e il 13 aveva l' aspetto che si vede delineato nella carta; dove lo si vede cominciare nella Nilosirte con una bocca larga ed oscura, in forma di piccolo golfo, e terminare con altra bocca simile, ma più piccola, nel Lago Ismenio. Il giorno 19 fu visto come un filetto oscuro uniforme, e si constatò che la sua direzione non era esattamente quella del parallelo, ma saliva un poco andando verso destra. Il 20 febbraio era molto visibile, e bene esaminato fu trovato semplice; nè il 20, nè il 21 ho più potuto vedere i due golfi terminali del giorno 13. Come linea molto sottile fu veduto l' ultima volta il 18 marzo. — L' unica linea del Protonilo fu sempre veduta uscire dalla Nilosirte, e non dalla Boreosirte: tale circostanza, comparata coll' aspetto che il Protonilo geminato presentava nel 1882, darebbe a pensare, che delle due linee della geminazione la più australe sola restasse nel 1884, restando invisibile la più boreale. Ammessa tale ipotesi, converrebbe ancora ammettere un' altra di queste due cose: o che il centro del Lago Ismenio nel 1884 fosse alquanto più al sud che nel 1882, o che restando invariata la posizione di questo centro, la linea superstite del Protonilo nel 1884 abbia mutata d' alquanto la sua direzione in modo da passare per esso centro, ciò che nel 1882 non accadeva.

603. Il Tifonio era questa volta probabilmente in istato di geminazione; ma non è mai stato possibile vedere le due linee simultaneamente. La superiore era assai difficile, e fu veduta almeno sette volte dal 5 febbraio al 19 marzo. Molto più difficile ancora era l' inferiore, di cui indizi alquanto sicuri non si ebbero che il 10 gennaio e il 19 febbraio. — Invece l' Oronte, di cui il Tifonio insomma non è che un pro-

lungamento, fu veduto due volte in gennaio col solo tratto superiore, in febbraio tre volte col solo tratto inferiore; e da ultimo cinque volte sotto le date 14, 15, 16, 17, 18 marzo con ambo i tratti abbastanza marcati e sicuri. Nè Tifonio nè Oronte presentarono alcuna differenza sensibile rispetto a quanto s'era veduto nel 1882. Mancava però fra le due bocche del Tifonio nella Gran Sirte quella specie di indentazione od arretramento della costa, che si osservò nel 1882. — Il 7 febbraio e il 19 marzo un'ombra confusa originata dalle multiple intersezioni dei canali Phison, Eufrate, Tifonio, Oronte e delle loro più o meno visibili geminazioni ricordò le osservazioni anteriormente fatte, che avevan dato luogo alla supposizione di una palude Sirbonide (§§. 221, 457). Vera forma di lago però non si vide in quella parte.

604. Ben poco si può dire qui di nuovo sull'Hiddekel, il quale malgrado la sua estrema tenuità fu veduto già addì 7 dicembre, e poi parecchie volte in gennaio e febbraio; il 6 ed il 20 febbraio con relativa facilità. È questo uno dei canali di Marte, di cui non si ebbe mai luogo a sospettare la geminazione. — Poco soddisfacenti furono le osservazioni del Gehon, il quale sembra abbia subìto notabili cambiamenti durante l'intervallo. Addì 7 dicembre era forte e visibile quanto l'Indo: l'aria cattiva e la piccola immagine impedirono di descriverlo bene. Anche il 4 e il 9 gennaio era certamente ancora molto visibile, ancorchè osservato in cattive condizioni. Nell'intervallo 6-20 febbraio, in ottime condizioni di visione, era poco meno che sparito; la sua presenza fu più volte messa fuori di dubbio, ma nulla più. Il 13, 14, 15 marzo parve ravvivato alquanto; ma il 16 marzo, mentre tutt'intorno gli altri canali erano grossi e ben definiti, solo il Gehon « era un'ombra, più che una linea ». Questo per la parte australe del Gehon, dalla foce nel secondo corno Sabeo, fino al parallelo 35° boreale. Dell'altra parte non mi è stato mai possibile di rendermi conto esatto, in mezzo alla complicazione di linee che in quel luogo si manifestava. Talvolta mi parve sboccasse nel Lago Niliaco, tal altra ho creduto di vederlo finire nel Mare Acidalio. Credo che le cose stiano a un dipresso come sono indicate sulla carta. Ma non si può negare che in questa parte restano ancora insoluti i dubbî espressi nel 1882 (§. 453).

605. Nella carta del 1882 il Deuteronilo figurava come un tratto diritto che seguiva quasi esattamente il parallelo fra il Lago Ismenio e il Lago Niliaco. Nel 1884 quel tratto comparve diviso in due parti disuguali da un piccolo lago rotondeggiante, simile al Lago Meride e al Fonte di Gioventù, al quale si è assegnato il nome di Fonte Dirceo (v. sopra §. 598). Il colore ne era oscurissimo, e il diametro forse due gradi: non fu veduto che il 14 marzo e nei due giorni consecutivi. Ora il tronco del Deuteronilo compreso fra questo lago e il Lago Niliaco era pochissimo visibile, anzi stando alle espressioni scritte sul momento si potrebbe dubitare che sia mai stato veduto in questa opposizione: e perciò sulla carta figura il nome e non la linea. L'altra parte invece fra il Fonte Dirceo e il Lago Ismenio era grossa ed oscura, e figurava (appunto come già prima nel 1882 era sembrato, §. 459) come una parte dell'Oxo.

606. L'Oxo si presentò questa volta con una magnificenza non prima notata, come si può vedere da alcuno dei disegni annessi alla presente Memoria, ed in marzo giunse ad emulare quasi la grandezza dell'Indo. In gennaio già era stato molto visibile e così pure al principio di febbraio. Addì 7 febbraio trovo scritto: « Oxo sempre magnifico ». Un mese dopo, essendo tornata in vista questa parte, e precisamente

il 14 marzo, si ebbe dell'Oxo la stupenda immagine che ho tentato di rappresentare nella figura I. della Tavola II. In esso pareva incorporato il Deuteronilo, così che il tutto formava un unico corso arcuato e grossissimo dal Golfo delle Perle al Lago Ismenio. Nessun altro canale di Marte presentò questa volta uno spettacolo così interessante, che il giorno dopo potei far ammirare ai miei amici professori Tito Vignoli e Lodovico Struve. Esso era diviso in tre sezioni da due nodi, o macchie oscure rotondeggianti, la prima delle quali è già stata descritta col nome di Fonte Dirceo; in essa l'Oxo incontrava il Deuteronilo, lo Xenio ed il Giordano. L'altra macchia (che chiameremo Fonte di Siloe), meno perfettamente formata, segnava l'intersezione dell'Oxo col Gehon, il quale allora era pochissimo visibile. Fra queste due macchie il corso dell'Oxo pareva più nero ai due lati che nel mezzo. Ciò dette luogo il 16 marzo ad un sospetto di geminazione, che poi non sono riuscito a tradurre in certezza. « Guardando bene, credo che la duplicità sia da mettere ancora in quarantena: vi è là certamente qualche complicazione insolita, forse un'isola nell'Oxo? ma non posso decidere, tutto essendo troppo piccolo. Certamente la curvatura non è continua, all'incontro col Gehon il corso dell'Oxo fa un angolo estremamente ottuso ». Il diametro apparente di Marte quel giorno era di 10″,7. Sventuratamente mancò l'occasione di assistere alle ulteriori evoluzioni che ebbero luogo in questa regione del pianeta.

607. Il Giordano fu veduto spesse volte dal 7 dicembre al 16 marzo; dapprincipio come striscia confusa, poi come prolungamento alquanto deviato del Deuteronilo; finalmente come ramo indipendente, che dal Fonte Dirceo andava a raggiungere il Mare Acidalio poco sotto il Ponte d'Achille. Nel 1882 la direzione era la medesima, ma l'origine era nel Lago Ismenio, e la foce nel Mare Acidalio mi parve più bassa. Per quanto si può giudicare adunque il Giordano del 1882 era press'a poco parallelo al Giordano del 1884; forse si tratta di una geminazione, di cui nel 1882 fu vista una linea, e l'altra nel 1884. Del resto la moltitudine delle linee comprese in piccolo spazio fra il Lago Ismenio, il lago Niliaco, e il Mare Acidalio ha sempre impedito di discerner bene il corso di ciascuna, e forse anche dato luogo a confusioni. In parecchi de' miei disegni il Giordano è presentato come identico al Deuteronilo, in altri figura confuso colla parte inferiore del Gehon: talvolta il Gehon è fatto sboccare nel Lago Niliaco sopra il Ponte d'Achille, tal altra nel Mare Acidalio sotto esso ponte. Nuove osservazioni con potentissimi mezzi si richiedono a risolvere tutte queste dubbiezze.

608. Tutta la regione compresa fra la Gran Sirte e l'Indo (ad eccezione della zona oscura contigua alla neve polare) fu sempre di color giallo, e di giallo alquanto più carico nella striscia compresa fra l'Indo ed il Gehon (Thymiamata). Chiazze bianche furono però notate sulla spiaggia d'Aeria lungo la Gran Sirte, fra le bocche del Tifonio e dell'Astusape. Questo bianco fu veduto il 13-14 dicembre e il 21 marzo nel mezzo del disco o a poca distanza; molto più brillante fu nei giorni 14-15 gennaio e 19 febbraio, essendo ω rispettivamente 254°, 263°, 237° e quindi Aeria molto prossima all'orlo destro. — Trovo di più scritto, che il 6 febbraio a $5^h\ 45^m$ il primo Corno del Golfo Sabeo aveva una piccola orlatura bianca sul lato sinistro nella Terra di Edom. Una eguale orlatura si vide contemporaneamente sul lato sinistro del Golfo delle Perle in Thymiamata, e sul lato sinistro del Golfo dell'Aurora in Chryse. —

Più d'una volta fu veduto del bianco anche sulla regione detta Cidonia fra il Giordano e Callirhoe. Il 4 dicembre a 8^h 40^m sid. tale bianco fu tanto intenso, che nel passar al meridiano centrale parve formare una massa unica di luce bianca colla neve polare, la quale allora parve prender la figura di macchia quasi rotonda. Tale albore fu veduto pure in Cidonia, quantunque con minore intensità, il 5 e il 7 febbraio, precisamente nel medesimo luogo. Questo è il poco, che si è potuto rivedere della magnifica zona bianca obliqua, la quale attraversava la stessa regione nel 1882, partendo dai dintorni della calotta polare, e scendendo all'Equatore fino al vertice d'Aryn (§. 556).

Sezione III.

Fra l'Indo e il Gange.

609. L'Indo comparve in questa opposizione come uno dei canali più cospicui del pianeta e fu sempre visibile dal 4 dicembre al 16 marzo. Di esso nessuna geminazione mai si è potuto notare, e forse la causa d'impedimento è connessa col suo corso tanto fortemente incurvato. Uguale sembra esser il caso della Nilosirte. L'Idaspe fu sempre veduto tutte le volte che l'occasione si presentò, quantunque sempre assai minore dell'Indo. Anche di questo finora non si è potuto constatare alcuna geminazione. Nulla mi parve mutato nella disposizione di questi due canali e del Golfo delle Perle.

610. La Jamuna fu veduta dal 31 dicembre al 16 marzo: sempre uniforme, fortemente indicata con tinta oscura, diritta e ben disegnata. Il 31 dicembre e il 2 gennaio ebbe qualche apparenza di possibile geminazione; così pure il 6 febbraio, nel qual giorno appariva come una striscia o nastro uniforme di notevole larghezza, stimata da me allora $\frac{1}{12}$ della lunghezza, dunque 3 a 4 gradi. Ma una separazione in due linee non fu mai veduta distintamente. Senza difficoltà osservarono pure con me la Jamuna il professor Porro addì 2 e 3 gennaio, e il professor Lodovico Struve il 15 marzo.

611. L'Idraote manca in un disegno del 31 dicembre nel quale figurano parecchi altri canali vicini. Siccome però l'immagine era alquanto diffusa, si può da questo solamente concludere che in quel giorno fosse meno visibile di quegli altri. Dopo il 2 gennaio fu sempre osservato ogni volta che si presentò in condizioni atmosferiche tollerabili, e figura in tutti i disegni di quella parte del pianeta. Sempre parve diviso dal taglio della Jamuna in due tratti d'apparenza più o meno disuguale, dei quali il destro fra la Jamuna e il Lago della Luna era più facile a vedere e più largo dell'altro. Il 6 febbraio e il 15 marzo, in buon stato d'immagine, questa porzione dell'Idraote fu veduta distintamente geminata, rimanendo semplice (*ad sensum*) l'altra fra la Jamuna e il Golfo delle Perle. Questa disuguaglianza fra i due tratti in cui l'Idraote è diviso dalla Jamuna sembra un fenomeno frequentissimo, e rappresenta quasi lo stato normale di quella formazione.

612. Molto più visibile dell'Idraote si mostrò questa volta il Nilokeras. Già il 31 dicembre era di facile osservazione; il 30 gennaio era « nero, largo, e spettacoloso »;

più largo nella parte inferiore verso il Lago Niliaco; i due profili laterali erano in generale a rettifilo, ma pieni di piccole irregolarità. Però già nei primi giorni di febbraio era alquanto meno prominente, benchè sempre forte e ben marcato. Il 4 fu stimato meno apparente della Jamuna. Il 6 febbraio a 6^h 31^m sid. ho scritto: « Il Nilokeras non lo vedo netto dalla parte sinistra verso la Jamuna: in quel luogo vi è un' ombra, che non so cosa voglia dire ». Il 9 marzo quest' ombra era sparita: « Nilokeras sottile ed oscuro »; e così fu veduto fino all' ultima osservazione, che fu il 16 marzo. Il Nilokeras si presentò sempre semplice, a meno che non si voglia considerare l' ombra enigmatica del 6 febbraio come un principio di geminazione. Dei due tratti veduti nel 1882 fu questa volta visibile soltanto l' occidentale, che è dalla parte di Tempe. La sua bocca nel lago Niliaco era, come nel 1882, immediatamente a fianco del Ponte d'Achille. Non fu veduto quel punto nero, che nel 1882 apparve alla sua intersezione col Dardano, ed è segnato sulla carta annessa alla Memoria III (§. 466).

613. Poche indicazioni si ebbero del Dardano. In un disegno preso il 31 dicembre a 7^h 6^m sid. « con immagine non precisa e tutta ondulante », è figurata una lieve striscia sfumata che attraversa la regione di Tempe lungo un parallelo, e non può essere che il Dardano. Il 30 gennaio credetti d' intravederlo un momento, ma non l' ebbi per abbastanza sicuro e non figura nei disegni presi allora in ottima temperie d' aria. Finalmente si potè vederlo distintamente nei giorni 2, 3, 4, 5 marzo. Il 2 marzo era « come sta delineato sulla carta del 1882; traversa i due Ceraunii, e nel luogo dove li traversa forma due piazzette più scure che il resto di essi Ceraunii ». Il 3 marzo « benchè l' aria sia cattiva, si vede il Dardano attraverso al disco: esso è molto forte ». Esso si prolungava allora nell'Acheronte al di là del Ceraunio. Il 4 marzo fu visto l'Acheronte (che frattanto si era geminato), ma il Dardano appena si potè congetturare come prolungamento semplice dell'Acheronte inferiore. Nei giorni seguenti fino al 16 marzo questa regione si offerse ancora più volte alla vista abbastanza distintamente, ma non trovo più menzione del Dardano, nè in iscritto nè nei disegni.

614. In quei giorni invece ricomparve l' Issedone, una sola volta veduto durante l' opposizione precedente, ed allora anche solo in parte, cioè nel tronco compreso fra il Dardano ed il Tanai. Il 14 marzo lo vidi tutto intiero come un canale sottilissimo, attraversante tutta la regione di Tempe dal sud al nord, e connesso col Lago della Luna, quasi come un prolungamento del Gange. Tale pure lo rividi il giorno seguente 15 marzo. Come notammo nella Memoria III, l' Issedone occupa nella regione di Tempe la stessa posizione che ha il Galaxias nell' analoga regione d' Eliso (§. 576); l' averne adesso completato il corso dal Lago della Luna fino al Tanai rende vieppiù grande l' analogia.

615. Anche nella presente opposizione è accaduto più volte di veder macchie bianche nella regione chiamata Chryse. Già si è detto dell' orlatura bianca veduta sul lato sinistro dei tre gran golfi del Mare eritreo il giorno 6 febbraio a 5^h 45^m essendo $\omega = 30^\circ$. Essa rendeva più vivo il contrasto colla forte tinta oscura di quei golfi. Pel golfo formato dall' insieme dei due corni che fiancheggiano Aryn, l' orlatura bianca contornava la Terra d' Edom; pel Golfo delle Perle, la riva occidentale di esso Golfo in Thymiamata; pel Golfo dell'Aurora la parte di costa compresa fra il Capo degli

Aromi e la bocca del Gange. — Anche il 14 e 15 marzo vi era del bianco sopra l'Idraote fra il Capo degli Aromi e la Jamuna: l'osservazione fu fatta mentre appunto questa parte passava al meridiano centrale. Le seguenti osservazioni ebbero luogo invece quando Chryse si trovava lontana da questo meridiano.

Dicembre	7	$\omega = 334°$	Chryse bianca all'orlo destro.
—	14	295	Al lembo destro appare del bianco.
Gennaio	9	329	Su Chryse pare vi sia un po' di bianco.
—	10	318	Chryse luminosa al lembo destro.
—	25	126	Chryse bianca al lembo sinistro.
—	28	98	Chryse riluce al lembo sinistro.
Febbraio	7	350	Chryse molto bianca all'orlo destro.
Marzo	5	109	Chryse bianca all'orlo sinistro.

Le osservazioni dell'albore di Chryse questa volta furono più frequenti al lembo destro, mentre nel 1882 eran state più frequenti al lembo sinistro (§. 469).

616. Interessanti osservazioni della medesima specie furono fatte in Tempe, che è una delle regioni più distinte del pianeta per il suo frequente albore. La bella striscia bianca obliqua figurata nel mio disegno del 26 dicembre 1879 e descritta nei §§. 351 e 430, fu riveduta più volte nell'opposizione 1881-82 (§. 557 e Tavola III della 3ª Memoria). Nell'attuale opposizione fu ancora osservata, ma meno splendente e meno completa. In compenso fu notata per alcuni giorni un'altra striscia disposta press'a poco secondo il parallelo. Altre volte lo spazio bianco era mal terminato e senza figura alcuna assegnabile. Ecco le note da me scritte su questi fenomeni.

Gennaio 10, $\omega = 343°$: A destra del Lago Niliaco il dott. Porro mi ha fatto notare presso il lembo una macchia forse grande quanto Argyre o anche di più, bianca quanto la neve polare. — *Gennaio* 30, $\omega = 76°$: Vi è molto chiarore e probabilmente un po' di bianco fra il Nilokeras e il Ceraunio in Tempe.

Febbraio 3, $\omega = 35°$: Vi è del bianco sotto il Lago della Luna in Tempe, che forma una striscia quasi nella direzione del parallelo a destra del Ponte d'Achille. — *Febbraio* 4, $\omega = 7°$: In basso a destra esiste la striscia bianca di ieri fra il Nilokeras e il Tanai. $\omega = 30°$: Nella prospettiva obliqua la striscia bianca che traversa Tempe è quasi perpendicolare al meridiano centrale. Essa è un poco più bassa del Ponte d'Achille. — *Febbraio* 5, $\omega = 20°$: La stessa cosa risulta dal disegno di questo giorno. — *Febbraio* 6, $\omega = 32°$: Veduto la striscia bianca trasversale in Tempe. $\omega = 65°$: Vi è anche l'altra striscia bianca parallela al Nilokeras e al Chrysorrhoas, che parte dal centro di Tempe, e attraversa i due Nili precisamente come nel 1879; non arriva però sino al Lago della Fenice, come nel 1879, ma si arresta a mezza via fra questo Lago e il Nilo più australe. I due Nili in traverso risaltano bene sullo splendido fondo.

Marzo 8, $\omega = 77°$: Si vede la striscia bianca già da me disegnata nell'ultima Tavola della Memoria II, la quale traversa il centro del disco e pare assolutamente rettilinea. Comincia proprio in basso vicino al Tanai e va su fin quasi all'angolo fra Agatodemone e Iride. — *Marzo* 9, $\omega = 71°$: Vi è la striscia bianca di ieri dal Tanai al Lago della Fenice; larga forse 5° o 6° — *Marzo* 13, $\omega = 40°$: Vi è del bianco in Tempe. — *Marzo* 14, $\omega = 22°$: la stessa osservazione. $\omega = 41°$: Comincia a comparire la striscia bianca dei giorni scorsi lungo il Nilokeras. — *Marzo* 15, $\omega = 80°$: Vi è la consueta striscia bianca da Tempe al Lago della Fenice lungo Chrysorrhoas a Nilokeras.

Aprile 15, $\omega = 88°$: Vi è anche la solita striscia bianca attraverso ai due Nili dal Tanai al Lago della Fenice.

Adunque nei giorni 3-6 febbraio lo spazio bianco era racchiuso nei limiti di Tempe ed aveva la forma di una striscia corrente press' a poco lungo un parallelo. Il medesimo giorno 6 febbraio cominciò a vedersi la grande striscia del 1879, che fu poi osservata anche meglio dall' 8 al 15 marzo, ed era ancora visibile il 15 aprile, quando il diametro del disco era ridotto a 8″,3. Pare che abbiamo in questa striscia (e probabilmente nelle analoghe descritte §§. 556, 557 e 563) dei fenomeni intermittenti quanto al tempo, ma fissi quanto alla località.

Sezione IV.

Lago Niliaco, Mare Boreale.

617. Il Lago Niliaco si mostrò fin dal 7 dicembre molto oscuro, e tale era ancora al principio di febbraio. Durante le osservazioni posteriori (13 a 16 marzo) il suo colore parve meno intenso. Sempre fu ben definito il suo contorno settentrionale lungo il Ponte d'Achille; sempre mal terminato il resto del perimetro, specialmente frammezzo alle bocche dei numerosi canali che a quel lago fanno capo. Nella figura e nella grandezza non ho potuto riconoscere differenze notabili da quanto si era veduto nel 1882. — Anche il Ponte d'Achille si mostrò sempre distinto dal 7 dicembre al 16 marzo; il 2 gennaio fu osservato con me anche dal dottor Porro. Il 6 e 7 febbraio mi parve che la sua direzione non seguisse esattamente il parallelo, e che l'estremo a destra fosse alquanto più alto o più australe del sinistro: osservazione che fu confermata anche il 9 marzo. L'angolo col parallelo ad ogni modo era molto piccolo e non poteva superar 10°. Tutte le volte che fu veduto in buone circostanze d'atmosfera, il Ponte d'Achille apparve come una striscia chiara regolare, terminata sotto e sopra da due linee rette o quasi rette, e parallele fra di loro; nè mai mi è stato possibile supporre alcuna interruzione, che stabilisse un passaggio fra il Lago Niliaco e il Golfo Acidalio.

618. La gran macchia, sottostante al Ponte d'Achille, nella Memoria precedente fu designata col nome di *Mare Acidalio*. Le osservazioni di questa opposizione fecero riconoscere che questa macchia ha una grande estensione verso il polo boreale, e corrisponde, sebbene in proporzioni molto ridotte, al Mare Australe dell' altro emisfero. Perciò ho creduto opportuno di dovere, in omaggio alla simmetria, mutare il predetto nome in quello di *Mar Boreale*, riservando quello di Golfo Acidalio alla parte più angusta e più australe, veduta e descritta nell' opposizione passata. Le osservazioni della presente opposizione non hanno bastato a determinare il perimetro completo, a cagione della prospettiva non sempre abbastanza favorevole, e a cagione sopratutto della macchia bianca polare, che sempre parve occuparne una parte. — Partendo dal Ponte d'Achille, il limite orientale del Mar Boreale arriva alla bocca del Giordano, poi a quella del Callirhoe procedendo in direzione poco diversa dal meridiano; indi s'inflette verso occidente in modo da toccare il parallelo 60° nella longitudine circa 30° e il parallelo 70° nella longitudine circa 50°. A partir da questo punto il limite era formato, fra il parallelo 70° e il 75° dal contorno della macchia polare

fin verso il meridiano 120°. Il 13 marzo, essendo la macchia polare notabilmente diminuita, e ridotta a poco più di 20° di diametro, ho creduto un momento di vedere che essa avesse perduto il contatto col mare Boreale, e che fra questo e l'orlo oscuro circondante la neve vi fosse un piccolo spazio giallo, formante un filetto sottile; ciò che tuttavia non fu confermato da accurata ispezione fatta nel giorno seguente. Lascieremo dunque la questione indecisa.

619. Dall'altra parte il limite australe del Mar Boreo, partendo dal Ponte d'Achille, contorna con curva rotondeggiante la regione di Tempe, ed arriva alle bocche dei due Ceraunii sotto il parallelo di 55°, e sotto questo si mantiene press'a poco fino al meridiano 120°. Lungo questo meridiano dovrebbe trovarsi il limite che contorna l'estremità occidentale del Mar Boreo; ma dalle osservazioni ben poco di certo si potè ricavare in proposito. Non avendo mai potuto osservar questo luogo in buone circostanze, mi è impossibile definire con qualche certezza il limite in questione. Forse anche per l'interpretazione di particolari così difficili e veduti in tanta obliquità era insufficiente la forza del telescopio usato; il quale non ha mai mostrato qui altro che ombre confuse e sfumate di qualche intensità, alle quali dopo il meridiano 120° succedevano parti relativamente più chiare. Per ora direm soltanto che il Mar Boreo si allunga incurvandosi alquanto dal Ponte d'Achille al meridiano suddetto, occupando 80° a 90° di longitudine sotto il parallelo medio di 60° o 65°. La parte finora esplorata avrebbe una larghezza di 15° a 20°.

620. Questo grande spazio non suole esser tutto di colore uniforme: come il Mare Australe, esso contiene isole di tinta e di ampiezza variabile. Nella Memoria precedente ho avuto occasione di riferire intorno alla piccola isoletta Scheria, veduta nel 1882 vicino al Ponte d'Achille (§. 465): or di quest'isola nessuna traccia si potè vedere nell'opposizione attuale, quantunque quella regione sia stata esaminata molte volte, e più d'una volta in buone condizioni d'immagine. Tutto il Golfo Acidalio, nella prima parte che si estende dal Ponte suddetto verso settentrione, apparve sempre come una gran macchia, una formazione del medesimo ordine che il Golfo delle Perle e il Golfo dell'Aurora, ma più ampia, e sopratutto oscura, più oscura che qualsiasi altra parte del pianeta. Ma già il 31 dicembre, nel punto dove l'asse del Mar Boreo s'incurva e prende la direzione da levante a ponente, la parte media di esso mare apparve occupata da una lunga e sottile isola gialla, che lo divideva nelle due zone designate sulla carta coi nomi di Tanai e Jaxarte. Così fu confermato quanto già si accennava nella Memoria precedente (§. 467), che queste due striscie non siano canali della forma consueta, ma veri stretti o bracci di mare comparabili al Tirreno ed all'Adriatico. Lo Jaxarte si confondeva colla zona oscura perimetrale della neve polare, da cui soltanto una volta parve separarsi, come si è detto qui sopra (§. 618).

621. La grande isola si allungava sull'asse del Mar Boreale, quasi da levante a ponente, diventando in progresso di tempo sempre più larga e sempre più chiara (31 dicembre-5 febbraio). Il 5 febbraio e il 14 marzo si riconobbe che essa era interrotta dirimpetto alla bocca del Ceraunio orientale nella longitudine di 80° a un dipresso. Le isole dunque sono almeno due, che sulla carta furon segnate coi nomi di Baltia e di Nerigos. Baltia si estende dal Golfo Acidalio verso occidente per forse 20° di longitudine e Nerigos succede verso ponente estendendosi altrettanto o poco più;

dov' essa termini ad occidente non si è potuto veder bene. Della loro larghezza non si può dire molto di certo, tanto più che il ritirarsi ulteriore delle nevi polari potrebbe lasciarne a scoperto qualche parte finora non veduta. — Queste isole, come Scheria, Baltia, e Nerigos, che in certi tempi sono tutto o parte invisibili, in altri tempi splendono di color giallo in mezzo al fondo oscuro del mare che le circonda, non s' incontrano qui la prima volta. Un caso parallelo è offerto dalla isola Cimmeria, che nel 1881-82 fu vista occupare una parte notabile del mare Cimmerio lungo l' asse di questo, lasciando ai due lati due zone oscure analoghe al Tanai ed allo Jaxarte: isola di cui nel 1877 e nel 1879 non s' era vista la minima traccia (§. 515). Anche è probabile che la diversa visibilità di Ausonia, di Esperia, delle Terre di Pirra e di Proteo e di Ogige in diversi tempi sia da riferire alla stessa classe di fatti. Così vediamo ripetersi le medesime cose nelle latitudini più diverse e nelle regioni più distanti del pianeta.

Sezione V.

Dal Gange al Fasi.

622. Il Gange fu sempre veduto senza difficoltà dal 31 dicembre al 15 aprile. Non sempre però apparve uguale a sè medesimo; nè mai si riuscì a vederlo geminato, come si avrebbe potuto aspettare, se il fatto delle geminazioni fosse strettamente regolato sul ciclo delle stagioni di Marte. Il 2 gennaio era facile a distinguere, e fu meco osservato dal dott. Porro. Il 30 gennaio è descritto così: « bello, ma non oscuro, e non largo: non direi mai che sia doppio ». Da questo giorno non fu più veduto fino al 6 marzo, in cui apparve molto grosso, quantunque si presentasse in forte scorcio; ma nei giorni seguenti già di nuovo era diminuito, e nulla più offerse di notevole fino al 15 aprile, in cui fu veduto ancora, essendo il diametro del pianeta ridotto ad 8″3.

623. Il Chrysorrhoas seguì press' a poco le vicende del Gange, del quale però rimase generalmente alquanto meno cospicuo. Anch' esso il 30 gennaio era ben tracciato, ma non oscuro, non largo, e non doppio. In marzo era cresciuto in larghezza e diminuito d' intensità, così che si presentava come un nastro largo sì, ma leggero, e sfumato. In questo tuttavia riuscì di vedere il 9 marzo un principio di geminazione; la lieve ombra presentava sull' asse un *minimum* di oscurità, come si può vedere nel disegno di quel giorno, riprodotto nella Tavola II, fig. III. Il 15 marzo non fu veduto che come ombra leggera. Invece il 15 aprile si potè osservarlo distintamente insieme col Gange, al quale pareva diventato quasi uguale.

624. Nei giorni 29-30 gennaio fu riveduto l' Uranio come linea scura, grossa e geminata, che dal Lago della Luna procedeva verso occidente declinando di qualche poco verso il sud, e andava a connettersi col Gigante geminato anch' esso, in modo da formare una fascia quasi continua; non però tanto continua da non lasciar travedere un piccolo cambiamento di direzione al punto della traversata dell' Iride, dove Uranio e Gigante si connettevano ad angolo molto ottuso e poco diverso da 180°. Il colore delle due linee dell' Uranio era « un certo rosso curioso » e la loro distanza

fu stimata 10° o poco meno. Il Lago della Luna frattanto si era geminato, e le due zone in cui era diviso seguivano la direzione appunto dell' Uranio. Il 4 febbraio dell' Uranio non si vide più che la linea superiore; l' inferiore o era sparita, o forse impegnata nella contigua geminazione del Nilo, venuta fuori in quel medesimo giorno. Il medesimo stato di cose continuò nei giorni seguenti, e tale durava ancora il 9 marzo, quando l' Uranio fu osservato per l' ultima volta in questa opposizione.

625. Il Nilo, che ha origine nel Lago della Luna proprio dove comincia l' Uranio, fu veduto già il 31 dicembre, ma solo confusamente; il 29 gennaio non fu disegnato nel luogo che gli corrispondeva; il 30 gennaio era certamente semplice, e se ne vedeva soltanto la linea inferiore. La linea superiore o non esisteva, od era impegnata nella contigua geminazione dell' Uranio, allora molto bella e visibile. Ma il 4 febbraio le parti si trovarono invertite; l' Uranio apparve semplice, e chiaramente geminato il Nilo, il quale continuò a mostrar distintamente le sue due belle linee fino al 15 aprile, nel qual giorno fu ancora veduto e sdoppiato, malgrado che il diametro apparente del disco fosse ridotto a 8″,3. Nei giorni 6 febbraio, 8, 9, 14, 15 marzo, 15 aprile, le due linee del Nilo attraversavano la striscia bianca che in quei giorni si estendeva da Tempe al Lago della Fenice (§. 616), senza che punto scemasse per ciò la loro visibilità; anzi parevano spiccar meglio su quel fondo luminoso. — Si osserverà che nelle vicende subìte dall' Uranio e dal Nilo vi è una specie di correlazione consistente in ciò, che al geminarsi dell' uno appariva semplice l' altro, e inversamente. Sarebbe stato interessante di verificare se tale disparizione di una delle loro linee fosse reale, oppure semplice risultato di impossibilità ottica. Ma non fu possibile nulla decidere a questo riguardo; alla fine di gennaio e al principio di febbraio (epoca in cui successero questi avvicendamenti) il diametro apparente di Marte raggiungeva per vero dire il suo massimo di quasi 14″, ma ciò malgrado non era ancora sufficiente da permettere l' esame di particolari così complicati e così minuti.

626. Nell' opposizione precedente il Lago della Luna si era mostrato geminato, e diviso in due strisce parallele al Nilo-Idraote. In questa opposizione dapprincipio (31 dicembre) si presentò come macchia oscura, confusa e sfumata, probabilmente in conseguenza di visione imperfetta. Ma nei giorni 30 gennaio, 6 febbraio, 4, 6, 9 e 15 marzo lo vidi manifestamente geminato e diviso in due strisce parallele all' Uranio. Esse avevano il medesimo colore rossiccio, e la medesima larghezza, ma la striscia inferiore era molto più breve della superiore, siccome si vede nel disegno del 9 marzo (Tavola II, fig. III). Questa disposizione rimase ancora la medesima anche dopo il 4 febbraio, quando cessò d' esser visibile la geminazione dell' Uranio, e ad essa si sostituì quella del Nilo nel modo poco sopra dichiarato. Tuttavia non devo tacere, che in alcuni giorni intermediarî a quelli poc' anzi nominati e precisamente il 4 febbraio e il 7 marzo (con immagine a dir vero non eccellente) avrei giudicato che la geminazione del Lago della Luna fosse nella direzione parallela al Nilo-Idraote come nel 1882. Trattandosi di indagini così minute non oso dare a quelle due osservazioni un peso uguale a quello delle altre. Se elle fossero l' espressione di un fatto reale, ne dovremmo concludere, che la geminazione di un medesimo lago può esser soggetta a vicende abbastanza rapide nella sua forma e direzione. Ad ogni modo abbiamo nel Lago della Luna un caso parallelo a quello già descritto del Lago Ismenio (§. 601).

627. La formazione anomala detta Ceraunio, rappresentata nel 1882 sotto forma di due larghe strisce curve divergenti in basso a foggia di tromba, non mutò questa volta il suo aspetto in modo apprezzabile. Le due strisce vi furono sempre più o meno fortemente colorate, e spesso mostrarono di prender tinta più carica nei luoghi dove erano attraversate da altri canali, geminati o no: cioè dal Dardano, dai due Nili, e dai due Uranii. Notevole fu l'aspetto presentato il 4 marzo dall'intersezione dei due Ceraunii colla gran geminazione dell'Acheronte-Dardano: aspetto che è rappresentato nella nostra carta. I due Nili formavano sul Ceraunio orientale due macchie oscure, all'inferiore delle quali concorreva pure il Dardano. Due altre simili macchie eran formate sul Ceraunio occidentale dall'Acheronte geminato, di cui la linea inferiore era il prolungamento del Dardano. Le quattro macchie eran disposte in modo da formare i vertici di un parallelogramma. Nei giorni 6 e 9 marzo le due macchie superiori erano unite in una sola striscia, e le due inferiori in un'altra parallela alla prima, in modo da dar luogo ad una cospicua geminazione composta di due strisce grosse e corte parallele al Dardano-Acheronte. Questa disposizione di cose durava ancora il 9 marzo come si vede dal disegno portante quella data (Tav. II, fig. III); qui però manca il Dardano, che in quel giorno non fu veduto, e manca pure l'Acheronte, che era troppo prossimo all'orlo del disco.

628. Il canale della Fortuna fu veduto parecchie volte dal 31 dicembre al 6 febbraio sotto l'aspetto di filo nebuloso semplice, e non senza qualche difficoltà. Simile pure fu l'aspetto dell'Iride nei giorni 29-30 gennaio, e 5 febbraio. Però, un mese dopo, nei giorni 4, 5 e 9 marzo l'Iride era geminato in modo indubitabile e presentava la forma di due lievissime strisce nebulose appena sensibili all'occhio, quali sono indicate nel disegno del 9 marzo (Tav. II, fig. III). Esse sembravano formare come un prolungamento dei due Ceraunii verso il sud, ma erano parallele fra loro, e al loro dipartirsi dall'Uranio davano origine a due macchie un poco più oscure.

629. L'Agatodemone fu veduto più volte in tutta la sua estensione dal Lago della Fenice alla foce del Nettare nel Mar Eritreo, come parte dell'incorniciatura ovale di Thaumasia, senza però mostrar tracce di geminazione o altra cosa di nuovo o di eccezionale. Quel suo rigonfiamento che porta il nome di Lago Titonio fu dapprincipio poco apparente. Il 30 gennaio fu veduto in quel luogo, dove il Chrysorrhoas si diparte dall'Agatodemone, un punto oscuro. Al principiar di marzo invece fu trovato poco minore del Lago del Sole; esso aveva press'a poco la forma disegnata da Dawes il 12 novembre 1864. Delle due foci dell'Agatodemone nel Mare Eritreo fu veduta soltanto la più australe e più lontana, prossima a quella del Nettare. Non fu veduto l'altro ramo più breve che corre dritto a levante verso le foci del Gange. Così rimase l'Aurea Cherso allo stato di penisola non divisa dalla regione di Ophir, come nel 1877 e nel 1879. L'Aurea Cherso, benchè in scorcio forte di prospettiva, si presentò bene più volte dal 30 gennaio al 13 marzo: ciò che la rendeva molto appariscente era un forte pennacchio luminoso, che dipartendosi dalla sua punta australe, si volgeva ad oriente: questo pennacchio non era altro ehe la Terra di Proteo, di cui si dirà più sotto.

630. Il Lago del Sole fu sempre ben visibile dal 21 novembre al 15 aprile, quantunque per l'inclinazione dell'asse del pianeta non sia mai stato osservato a di-

stanza molto minore di 40° dal centro del disco. Sempre era oscuro e bene spiccava sul fondo circostante. La sua forma era alquanto allungata nella direzione del parallelo, come richiedeva l'obliquità della vista. — La regione Thaumasia che lo circonda apparve più volte bene incorniciata nel suo contorno ovale; il colore era chiaro e talvolta biancastro. — Gli emissari, che attraverso di essa mandava il Lago del Sole nel 1882, furono riveduti tutti e tre. — L'Ambrosia, come più prossimo al lembo australe, era anche il più difficile, e fu notato una sola volta il 30 gennaio. — L'Eosforo due volte assai bene il 29 e 30 gennaio: esso manca nei disegni fatti il 4, 6 e 9 marzo. — Il Nettare fu trovato la prima volta addì 29 gennaio, molto grosso e ottimamente visibile: la sua direzione mi parve meno lontana dal parallelo che nel 1879 e nel 1881-82. Ancora fu veduto bene il 6 febbraio, attraversante una regione allora coperta di bianco; ed il 9 marzo per l'ultima volta. — Il Fasi e il Golfo Aonio furono descritti pur essi dalla fine di gennaio al principio di marzo come parte dell'incorniciatura di Thaumasia: il Golfo Aonio era poco marcato e di tinta pallida, ciò che non deve far meraviglia, considerata l'obliquità sotto cui sempre si vide questa parte del pianeta. Quanto al Lago della Fenice, esso non si presentò mai altrimenti che come punto d'incrociamento delle varie linee che da esso irradiano.

631. Oltre la grande striscia bianca descritta più sopra (§. 616) come estesa più volte attraverso alla regione di Tharsis da Tempe al Lago della Fenice, diverse altre macchie bianche furono vedute in quelle parti, sempre di carattere transitorio. Il 3 gennaio, essendo $\omega = 17°$ fu visto biancheggiare il disco di Marte all'orlo destro nella parte che corrispondeva a Tharsis. Il 6 febbraio ($\omega = 34°$) fu osservato uno spazio bianco in Thaumasia intorno al corso del Nettare, ma principalmente sopra di esso; così pure in Ophir, lungo l'Agatodemone e sotto di questo, fra il Golfo dell'Aurora ed il Chrysorrhoas. Per i fenomeni analoghi osservati nel 1879 e nel 1882 nelle medesime località vedi §§. 351 e 481.

Sezione VI.

Mare Eritreo.

632. Il Mare Eritreo, colle isole e penisole di anfibia natura onde è sparso, si mostrò questa volta in prospettiva piuttosto obliqua; e le sue parti più australi non si poterono esaminare con molta precisione. Il suo colore fu generalmente più pallido che negli anni scorsi, ad eccezione delle tre grandi sue protensioni verso il nord formate dalla parte più occidentale del Golfo Sabeo coi suoi due corni, dal Golfo delle Perle, e dal Golfo dell'Aurora, le quali in certa configurazione del pianeta (quando al centro del disco passava il 25° meridiano) si presentavano tutte e tre allineate in linea obliqua attraverso al disco, formando tre macchie oscurissime di estensione poco diversa, quasi tre gran laghi poco men che chiusi, e davano al pianeta un aspetto caratteristico, quale si vede figurato nel nostro disegno del 4 febbraio e del 14 marzo

(Tav. II, fig. I e II). La macchia formata dal Golfo delle Perle parve talvolta meno oscura delle altre due. In mezzo a queste tre macchie è naturale che spiccassero in modo assai visibile e deciso le parti inferiori delle due grandi penisole di Deucalione e di Pirra.

633. La Terra di Deucalione era del color giallo pallido solito a vedersi in questa regione, il quale andava però facendosi sempre meno chiaro verso l'estremità orientale. Questa estremità il 20 febbraio fu terminata con qualche precisione dalla striscia oscura detta *Serpentino*, che forma una specie di coda a quella del Golfo Sabeo (§. 590). La terra di Deucalione era separata da Thymiamata per mezzo d'un'ombra sensibile ben terminata in una linea dalla parte inferiore, molto sfumata e digradantesi poco a poco nella parte superiore; ombra, alla quale questa volta non avrei osato applicare il nome di canale. Una distinta separazione della Terra di Deucalione da quella di Xisutro non fu notata che una volta, il 14 marzo, presso il lembo sinistro. — L'isola di Japeto non fu mai veduta in questa opposizione. — La Terra di Pirra si mostrò sempre distinta dal 2 gennaio al 16 marzo; la sua parte inferiore, che altre volte soleva esser molto oscura, apparve per lo più di chiarezza sufficiente fin dal luogo dove si attacca al continente di Chryse. Anche qui la separazione da Chryse era fatta da un'ombra non molto oscura, limitata con precisione dal lato di Chryse, e molto sfumata dal lato superiore. Il colore era qui dello stesso giallo pallido che si notava nella Terra di Deucalione, ma nella parte superiore degenerava in una specie di grigio. — Lo stesso giallo si mostrò pure nella Terra di Proteo, la quale si mostrò sempre con notabile evidenza tutte le volte che venne in vista. Nell'intervallo dal 30 gennaio al 13 marzo ne trovo ricordate sei osservazioni, dove è descritta sotto forma di un pennacchio orizzontale distaccantesi dal vertice dell'Aurea Cherso, nello stesso modo con cui le Terre di Deucalione e di Proteo si distaccano dai promontorî che loro servon di base. Anche la Terra di Proteo mostrava alla radice una sensibile ombra, nettamente terminata dalla parte dell'Aurea Cherso, sfumata dalla parte opposta. Sono evidentemente tutte e tre formazioni della medesima natura. Il 9 marzo la Terra di Proteo mi parve più sottile e più luminosa del solito. Essa fu veduta anche a Potsdam dal dott. Lohse, e si trova chiaramente indicata nei suoi disegni del 13 e del 17 marzo [1]

[1] *Publ. Potsd.* Vol. VIII, p. 135 e Tav. 3. Il dott. Lohse è di parere che la Terra di Proteo sia identica a ciò che Green nel 1877 vide a Madera e chiamò *isola di Hall*. Questa è pure la mia opinione (vedi Memoria II § 362); la latitudine dell'isola di Hall nei disegni di Green è poco diversa da quella del Lago del Sole, e ciò collima bene anche colle mie osservazioni della Terra di Proteo. Ma d'altra parte non posso ammettere ciò che da Lohse e da altri è stato affermato, vale a dire, che la Terra di Proteo e l'isola di Hall sian la stessa cosa che l'isola bianca disegnata da Dawes il 21 gennaio 1865 (*Monthly Not. of the Roy. Astr. Society*, Vol. XXV, p. 226). Nessuno oserà dire che in quel disegno la macchia segnata *a* e il Lago del Sole siano sul medesimo parallelo! D'altra parte io pure sono incorso in errore, attribuendo (Mem. I § 89) all'isola di Argyre l'osservazione fatta da Dawes il 13 marzo 1852 (*Monthly Not. of the Roy. Astr. Soc.* Vol. XXV, p. 228). Quell'osservazione nulla ha che fare con Argyre, e si riferisce ad un tratto bianco notato da Dawes nel luogo da me chiamato *Promontorio di Edom* presso il primo Corno del Golfo Sabeo. La confusione è nata da ciò che Dawes ha designato colla medesima lettera *a* e il luogo ora detto, e l'isola di Argyre.

634. Nelle regioni più australi del Mare Eritreo non fu possibile, per la soverchia obliquità, distinguer particolari di natura topografica; tanto più si sono rese manifeste queste regioni per la loro proprietà di diventar bianche, e talora anche lucenti, all' orlo del disco. Sotto questo rapporto le osservazioni d'Argyre formano continuazione opportuna della serie antecedente pubblicata nel §. 482, e sono compendiate nella Tabella seguente sotto identica forma.

Data	ω	Annotazioni
Dic. 31	52°	riluce come neve.
— 31	67	ancora bellissima, benchè all'orlo estremo.
— 31	71	ancora visibile.
Genn. 2	21	ben visibile.
— 3	11	si vede benissimo.
— 4	2	si vede già all'orlo destro.
— 9	329	isoletta bianca come neve e ben terminata.
— 10	331	brillante e ben terminata.
— 28	90	bianca all' orlo superiore sinistro.
— 29	95	bianco-lucente all' orlo manco superiore.
— 30	94	lucente all' orlo manco superiore.
Febb. 4	24	macchia bianchissima.
— 5	6	bianco-brillante: stupenda.
— 6	31	Argyre brilla come al solito.
— 7	9	bella come sempre.
Mar. 7	93	come un filo d' argento brillante limita il disco.
— 9	61	bianca, splendida.
— 13	40	bianca al limite della fase oscura.
— 14	22	bianco-splendente al limite della fase.

Nella presente opposizione il centro d'Argyre non fu mai distante meno di 60° dal centro del disco: questa probabilmente è la ragione per cui non si presentò mai nel colore naturale rosso o giallo, che talvolta mostrò nell' opposizione precedente al momento di passar pel meridiano centrale; ma sempre apparve bianca e spesso bianco-brillante. Notevole è l' osservazione del 10 gennaio, in cui Argyre apparve brillante e ben terminata già sotto ω — 331°. In tal configurazione il centro dell' isola non distava dal centro del disco meno di 70°. — Di Argyre II nulla si è potuto vedere nella presente opposizione.

635. Anche per Noachide si fecero alcune osservazioni consimili, delle quali ecco il riassunto tabellare.

Data	ω	Annotazioni
Gen. 10	305°	Noachide chiara.
Febb. 3	39	bianca.
— 4	7	bianca.
— 4	24	biancastra.
— 5	20	bianca, stupenda.
— 6	351	biancastra.
— 6	38	bianca, ben visibile.
— 7	349	come nube biancastra.
— 13	343	biancastra, ma non lucente.
— 20	308	assai bianca.
Mar. 9	40	biancastra.
— 14	21	bianca.
— 18	344	bigia.

Nelle osservazioni fatte intorno ad $\omega = 340°$ o $350°$, in cui l' estremità orientale e più boreale di Noachide passava al meridiano centrale a non più di 50° dal centro, Noachide appariva al lembo superiore come una nube biancastra (od anche bigia), e non assumeva il color bianco schietto che a maggiori distanze dal centro del disco. Cosa analoga a quanto si verificò per Argyre durante l' opposizione precedente (§. 482).

Sezione VII.

Dal Fasi al Titano.

636. Il Mare delle Sirene fu veduto sempre nella sua forma consueta, notabilmente assottigliata per effetto della prospettiva obliqna. Il suo colore era sufficientemente oscuro per spiccare dal fondo alquanto biancastro circostante, meno oscuro però degli anni precedenti. Ma le regioni che lo crrcondano apparvero notevolmente vuote di particolarità topografiche. Sembrava che un velo di natura ignota le ricoprisse, rendendo invisibili le cose più minute, e facendo apparir confuse e mal terminate le più grandi; e tale impressione era specialmente viva quando i contorni di quel mare erano ben terminati e l'aria sufficientemenle buona. In conseguenza di ciò parecchi dei canali minori comunicanti con quel mare non furono più osservabili. Per la prima volta non fu veduto l'Arasse. Nessuna traccia dello stretto detto Colonne d' Ercole, per cui negli anni precedenti il Mare delle Sirene comunicava col Golfo Aonio. Nessuna traccia

dell' Erinni, che nel gennaio 1882 parve formare una geminazione imperfetta col Mare stesso delle Sirene (§. 502).

637. In basso del disco la regione qui considerata apparve sempre terminata da un segmento di color meno chiaro, limitato inferiormente dalla zona oscura che continuamente circondò la neve polare, e superiormente da una linea non molto precisa, più oscura però che il resto del segmento, rappresentante ciò che nella carta del 1881-82 abbiam chiamato Tanai. La parte compresa fra il Tanai e la neve polare dal Golfo Acidalio fino al meridiano 120° abbiam più sopra attribuito al Mar Boreale e alle isole in esso comprese, Baltia e Nerigos (§. 621). Di fronte alla bocca del Sirenio sotto il meridiano 120° parve di scoprire il 25 e il 29 gennaio un' ombra forte, e quello è forse il termine occidentale del Mar Boreale in quel luogo. Nella parte restante, dalla bocca del Sirenio alla Propontide, la zona compresa fra il Tanai e l' orlo scuro delle nevi boreali parve sempre piuttosto chiara; benchè una immagine netta di quelle località non sia mai stata ottenuta, supponiamo per ora che si tratti qui di aree continentali estese sino ad alte latitudini, di cui le osservazioni posteriori potranno forse dar conto più esatto. Del rimanente queste regioni sembrano soggette a variazioni sensibili di colore e forse anco di distribuzione topografica apparente; ed è possibile che il Mare Boreo spinga talvolta delle vaste e cospicue diramazioni verso occidente, non decifrabili sotto questa inclinazione dell' asse e con un obbiettivo di soli 8 pollici di apertura.

638. Nel gran quadrilatero, che si estende in latitudine fra il Mar delle Sirene e il Tanai, e in longitudine va dalla linea Ceraunio-Iride-Fasi a quella del Titano, non riuscì neppur questa volta di veder quell' insieme di forme svariate e ben definite, che tanto rendono interessante la parte opposta del pianeta. Le lunghe linee o strisce, da cui questa regione è attraversata in varî sensi, furono vedute in tutto od in parte, ma generalmente in modo imperfetto. Tuttavia sull'Acheronte si potè verificare qualche cosa di nuovo. In novembre esso era certamente poco visibile; ma il 22 dicembre esso è disegnato (vedi Tav. III, fig. V) e descritto come « un sottilissimo canale, quasi parallelo al Tanai, ma un po' convesso verso il medesimo, e concavo verso l' alto », il quale si rannodava all' Erebo. Il 25 gennaio, essendo l' immagine poco tranquilla, fu tuttavia disegnato sotto l' apparenza di striscia lieve, larga e diffusa. « Non so se sia semplice o doppio, non so dire se sia una linea o una striscia, per esser l' aria poco buona; ma l' esistenza è indubitata; direi che sia piuttosto una linea che una striscia ». Nel disegno del 27 febbraio (Tav. III, fig. VI) appare come una geminazione larga e facile, benchè diffusa: e tale ancora si vede in altro disegno del 4 marzo. In questo giorno furon notate, nelle quattro intersezioni del doppio Acheronte col doppio Ceraunio, quattro macchie oscure, di cui due collegate anche colla geminazione del Nilo, e una collegata col Dardano nel modo che indica la nostra carta e in parte anche il disegno del 9 marzo (Tav. II, fig. III. Veggasi pure quanto su ciò si è riferito §. 627). Pochi giorni dopo (8 marzo) l'Acheronte fu veduto e disegnato sotto forma di larga zona diffusa dal signor Knobel; si consulti il volume XLVIII delle Memorie della Società Astronomica di Londra, p. 275 e seguenti.

639. Del Flegetonte non trovo questa volta alcuna notizia, quantunque il Nilo, di cui è prolungamento, sia stato sempre molto apparente ed abbia formato anche

una geminazione molto cospicua (§. 625). Invece il Piriflegetonte fu sempre osservato dal 20 novembre al 4 marzo in tutta la sua grande estensione dal Lago della Fenice alla Propontide. Anche questa volta, come nel 1881-82 (§. 500), esso offrì per lo più un aspetto enigmatico e difficile ad interpretare. Il 20-21 novembre era una striscia larga, leggera, diffusa, di cui non si poteva fare alcuna precisa delineazione. Un po' più stretto, e meglio terminato, e anche più evidente era il 22 dicembre. Il 25 gennaio è descritto come « indizio d' ombra indistinta; non è una fascia colorata, non è una linea oscura; che cos' è? non lo saprei dire ». Nel giorno 27 gennaio se ne videro « indizi certi, ma non regolari ». Il 29 fu disegnato come striscia confusa in connessione coll' Eosforo, di cui è un prolungamento. Visibile era pure sotto identico aspetto nei giorni 27 febbraio, 2 e 4 marzo. Nella classe dei così detti *canali* il Piriflegetonte sembra formare qualche cosa di eccezionale e di anomalo.

640. Non ben definito, ma sempre visibile dal 21 novembre al 5 marzo fu il Gigante. In novembre e in dicembre non presentò altro che una zona mal definita e di colore poco distinto. A partir dal 25 gennaio si mostrò invece sempre come una geminazione larga e manifesta, di cui le due linee, benchè di curvatura regolare e rigorosamente equidistanti, parevano piuttosto sbozzate a colpi di pennello, che tracciate colla precisione consueta in queste formazioni. L' aspetto era press' a poco quale si vede rappresentato nel disegno del 25 gennaio (Tav. II, fig. IV), il quale nel diario è accompagnato dalle seguenti note: « Vedo il Gigante doppio, curvato ellitticamente con convessità verso il polo nord: la linea inferiore passa poco lontano dal centro ($\omega = 122^\circ$). L' intervallo delle due linee è considerevole: forse 15° fra l' uno e l' altro dei lati esterni. Evidentemente nessuno dei due tratti forma un circolo massimo: del resto la posizione della geminazione è la stessa che nel 1882. Curioso è il colore rossigno o giallo-volpe di quelle due strisce, che contrasta col bianco circostante ». Meno evidente fu la geminazione del Gigante il 27 febbraio. Il 2 marzo si vedeva meglio la parte a sinistra del Nodo Gordiano, che la parte a destra. Il tratto a sinistra fu ancora verificato come doppio il 5 marzo. Questa colossale geminazione, e la colorazione biancastra del pianeta in quella regione davano a Marte in quei giorni un aspetto insolito.

641. Come nell' opposizione precedente, il Nodo Gordiano nelle posizioni più prossime al centro del disco non rappresentava altro, che l' intersezione di più strisce d' ombra, senza che si potesse attribuirgli un' esistenza indipendente come quella del Lago Ismenio o della Propontide. Ma anche questa volta, portandosi la località in questione presso l' orlo del disco in posizione obliqua, cresceva la bianchezza della superfice circostante, e diventava allora visibile per effetto di contrasto il Nodo suddetto, come una macchia ben terminata e relativamente oscura. In questo modo e non altrimenti fu possibile distinguere il Nodo Gordiano il 22 gennaio ($\omega = 187^\circ$), il 30 gennaio ($\omega = 88^\circ$), il 22 febbraio ($\omega = 203^\circ$) e il 27 febbraio ($\omega = 185^\circ$).

642. Il canale delle Sirene questa volta fu veduto distintamente solo nella sua parte inferiore fra il Nodo Gordiano e il Tanai (22 dicembre, 29-30 gennaio). In un mio disegno del 29 gennaio questa parte forma una linea oscura di molta evidenza. Invece nella parte superiore fra il Nodo Gordiano e il Mare delle Sirene questo canale rimase sempre invisibile. — Qualche traccia si riuscì a sospettare del Gorgone il 22 dicembre; meglio fu veduto il 27 febbraio, come striscia che connetteva il Nodo

Gordiano col mezzo del Mare delle Sirene. — Dell' Eumenide indubbiamente una parte figura nel disegno del 22 dicembre (Tav. III, fig. V); il 25 gennaio qualche traccia pur se ne vide, come di striscia indistinta di color giallo-volpe. Nel disegno del 27 febbraio (Tav. III, fig. VI) figura di esso la parte più occidentale contigua al Titano e la sua connessione coll' Orco; l' uno e l' altro essendo quel giorno difficilissimi e appena traveduti. Malgrado quest' ultima circostanza, pare che l' Eumenide di quest' anno fosse più alto e più vicino al Mare delle Sirene, che quello del 1882. Forse in conseguenza di una larga geminazione, di cui prima si sarebbe osservato un tratto e poi un altro separatamente.

643. Il Titano offrì in questa opposizione dubbiezze non minori che nella precedente. Dopo aver figurato come ombra indistinta il 20-21 novembre e il 18 dicembre, ad un tratto lo si vide presentarsi come linea sottile e definita, benchè leggera, il 21 dicembre, e anche meglio il 22; non solo era ben definito, ma anche molto distinto, come si può vedere dal disegno fatto quel giorno (Tav. III, fig. V). Un mese dopo, addì 21 e 22 gennaio, era di nuovo meno visibile: estremamente sottile e difficile il 25; quasi invisibile il 27. Ritornata questa parte in vista nel mese dopo, il Titano non fu più osservabile il 22 e il 25 febbraio. Finalmente nel disegno del 27 febbraio (Tav. III, fig. VI) il corso del Titano è principalmente visibile *in modo negativo.* Lungo di esso, in una zona larga 6° od 8° fra il Golfo dei Titani ed il Tanai, tutte le ombre e strisce degli altri canali sono o totalmente cancellate, o ridotte quasi invisibili da una causa impossibile a definire. Il Titano stesso figura come limite occidentale delle aree di visibilità e d' invisibilità delle altre ombre; le quali al suo immediato contatto dalla parte di destra si mostrano più intense, che altrove. L' effetto non si può render bene con parole, e soltanto il disegno ne può dare un' idea approssimata. Dopo il 27 febbraio non si ebbe più occasione di esplorar bene questa parte.

644. Io non oserò proporre alcuna ipotesi per spiegare un fenomeno così bizzarro. Durante i miei studi su Marte soltanto un' altra volta ho avuto campo di fare un' osservazione che presenta con questa qualche punto di somiglianza: e fu in questa stessa opposizione. Il 30 gennaio, essendo $\omega = 94°$, scrissi sul diario: « L' immagine è sempre buona, ma non diventa mai ottima. Tutte le linee a destra del limite Nilokeras-Chrysorrhoas-Agatodemone-Fasi sono tracciate con tinta debole, e ci vuole una gran fatica a discernere sul piccolo disco le loro relazioni. È anche impossibile prender passaggi al meridiano centrale, o misure sopra cose che si vedono bene soltanto per momenti e non quando vorremmo noi ». Può darsi che si tratti di una temporanea estensione dei veli biancastri, che resero tanto difficile in quest' anno l' esplorazione di Memnonia e delle regioni circostanti. Ma che cosa sono questi veli? sono dessi condensazioni di carattere atmosferico? Io non oso più pronunciarmi su questo punto con tanta sicurezza, quanta ne ebbi nel 1878, pubblicando la prima di queste mie Memorie sopra Marte. In questo scritto, di nuvole e di nebbie ipotetiche è fatto un abuso, che la continuata esperienza di più anni oggi non mi consente.

645. Sulla colorazione bianca di Memnonia aggiungo qui le annotazioni fatte, che potranno servir di confronto alle note analoghe delle opposizioni precedenti (§§. 122, 373, 494, 504):

Data	ω	Annotazioni
Gen. 16	212°	bianco mal definito, fosco, poco brillante.
— 17	226	bianco pallido e smorto.
— 19	218	bianca.
— 20	186	gran quantità di veli biancastri.
— 25	119	bianca intorno al Gigante.
— 27	141	nessuna bianchezza straordinaria.
Feb. 22	203	bianca.

Altre tracce di color bianco furono pure vedute in Arcadia sotto l'Acheronte il 22 gennaio e il 27 Febbraio. — Quanto alla neve Olimpica del 1879, essa non fu più da me osservata, neppure durante questa opposizione (cf. §§. 370, 504).

Sezione VIII.

Eliso e regioni circostanti dal Titano alla Piccola Sirte.

646. Quello spazio rotondeggiante, che sulla carta è designato col nome d' Eliso, e che appare inscritto in un pentagono quasi regolare di strisce oscure, fu veduto questa volta press' a poco sotto il medesimo aspetto che nel 1881-82; con due differenze però. La prima è che non fu possibile di vedere alcuna traccia del canale Galaxias, il quale nell' opposizione antecedente attraversava l' Eliso un po' eccentricamente in direzione poco diversa dal meridiano (§. 530). L' altra fu, che il contorno quasi circolare della regione si mostrò sempre piuttosto largo e diffuso, talvolta con tracce di evidente duplicità in qualche parte; anzi tutto intiero apparve duplicato il 18 gennaio, in modo da formare quasi due ghirlande nebulose circolari concentriche, come è indicato nel disegno parziale fatto quel giorno (Tav. III, fig. VII); la qual duplicazione non fu potuta riconoscere più altre volte in forma così evidente e così completa. In conseguenza di questo la parte interna, che forma un' area per lo più molto chiara, sembrò avere un diametro minore del consueto, che certo non arrivò a 25° — Spesso l' area chiara or detta si mostrò biancheggiante, sopratutto a distanza notabile dal meridiano

centrale. Ecco le osservazioni relative a quest' albedine, da confrontarsi con quelle degli anni precedenti (§§. 396, 530).

Data	ω	Annotazioni
Dic. 20	158°	appare Eliso bianco all' orlo destro.
— 22	155	bianco come la neve polare.
Gen. 18	216	biancastro, al solito, presso il merid. centrale.
Feb. 20	223	biancastro presso il meridiano centrale.
— 25	180	bianco.
— 27	162	bianco.
Apr. 1	214	biancastro.

Qui, come nel 1879 e nel 1881-82 non si ha alcuna osservazione dell' Eliso bianco presso l' orlo sinistro. Sembrerebbe naturale aspettarsi, che se tale bianchezza è visibile sotto $\omega = 150°$ circa quando Eliso è a 70° dal meridiano centrale verso destra, dovrebbe pure qualche volta potersi la medesima bianchezza osservare quando Eliso è a 70° dal meridiano centrale verso sinistra, cioè quando $\omega = 290°$, o in quel torno. Ora ciò non è mai avvenuto. Una sola volta il 29 gennaio 1882 fu veduto biancheggiar l' Eliso sotto $\omega = 259°$ a circa 40° dal meridiano centrale verso sinistra, non mai a distanze maggiori da quella parte, mentre a destra il 5 gennaio 1882 ne fu veduto l' albore sotto $\omega = 142°$ a 80° dal meridiano centrale. La ragione di questo fatto e di altri analoghi si potrà assegnare dopo più complete osservazioni, e potrà forse dipendere dall' azione del Sole, meno prolungata su quelle regioni nelle loro ore mattutine, che nelle vespertine.

647. La grande macchia oscura, informe, e mal definita, detta Trivio di Caronte, della quale nell' opposizione precedente non era stato possibile decifrar la struttura, fu veduta il 20 dicembre 1883 ancora forte, ma confusa: il 22 consecutivo mi parve contenesse un principio di geminazione. Infatti un mese dopo (19-23 gennaio) essa si presentava come una bella e distinta geminazione a tratti brevi, ma larghi e fortemente colorati, quale è indicata sulla carta. La sua direzione era alquanto obliqua rispetto al parallelo, e prolungata idealmente a traverso della piazza rotonda e luminosa dell' Eliso, andava ad incontrare l' Efesto, geminato anch' esso secondo due tratti esattamente uguali in larghezza ed in intervallo a quelli del Trivio, e posti di più esattamente sul prolungamento di essi. Per guisa, che se non fosse stato dell' interruzione per tutta la larghezza d' Eliso, il Trivio e l' Efesto avrebbero potuto esser considerati come parti di una sola ed identica geminazione. Nei giorni 20 e 21 febbraio queste due geminazioni e la loro corrispondenza eran manifestissime e furono osservate con me anche dal dott. Porro; mentre però il 19 gennaio il loro colore era press' a poco uguale, in febbraio il Trivio parve notabilmente più scuro ne' suoi due tratti, che l' Efesto. Il lembo inferiore del tratto boreale sembrava attraversare press' a poco centralmente il

disco dell' Eliso. L' Efesto era alquanto più lungo che il Trivio: l' angolo col parallelo fu stimato per ambidue di 10° o 12° a un dipresso. — Non discuterò qui se la corrispondenza fra due geminazioni distaccate l' una dall' altra per circa 25° d' intervallo sia puramente accidentale o dovuta a qualche causa. Data la seconda ipotesi, le conseguenze sarebbero importanti.

648. Il Trivio di Caronte continuò a vedersi come striscia doppia per molto tempo; il 2 aprile la sua duplicità fu ancora riconosciuta, benchè il diametro del disco fosse ridotto a 9″,2. Addì 9 maggio il Trivio era ancora benissimo visibile, quantunque per la piccolezza dell' immagine (ridotta a 7″,0 di diametro) non fosse più possibile decidere se continuava lo stato di geminazione. — I suoi termini furono sempre ad occidente il contorno circolare dell' Eliso, ad oriente il corso del Lestrigone, il quale sembrava troncarne nettamente le due linee. Però il giorno 27 febbraio la linea superiore delle due fu vista oltrepassare anche il Lestrigone, e andar fin al Titano, ridotta però molto d' intensità e di larghezza. Comparando il disegno fatto quel giorno colla carta dell' opposizione precedente si trova che quel prolungamento non è altro che l'Orco, di cui pertanto questa volta fu visibile soltanto la linea più australe. — Pare adunque che l' Orco e il Trivio fossero parti di una stessa geminazione, divisa dal Lestrigone in due porzioni di lunghezza e visibilità differente. Probabilmente il Trivio di Caronte è un lago d' aspetto variabile, come quello della Luna. In quest' anno si presentò geminato secondo la direzione dell' Orco, uno dei suoi influenti; è possibile che in altre epoche abbia a mostrarsi geminato secondo la direzione di un altro influente, in modo analogo a quanto si è constatato per il Lago della Luna e per il Lago Ismenio (§§. 601, 626). Questi influenti sono non meno di sette, cioè l' Orco già detto, il Tartaro, il Lestrigone, il Cerbero, l' Erebo, lo Hades, e lo Stige.

649. Il Tartaro fu molto appariscente in dicembre e in gennaio. Già figura in un disegno del 20 novembre, fatto in circostanze abbastanza difficili; il 22 dicembre era « scuro, bello, e manifesto; » veggasi il disegno di quel giorno (Tav. III, fig. V). Il 18 gennaio è detto evidentissimo; fu poi anche disegnato più volte nei giorni seguenti. Il 21 febbraio se n' ebbe ancora qualche indizio; ma il 22 non fu più veduto, e manca pure nel disegno del 27 febbraio (Tav. III, fig. VI), nè più oltre se ne parla nei diarî d' osservazione. Non dette mai sospetto alcuno di esser geminato. Il Tartaro partiva dal Mare delle Sirene a poca distanza dall' intimo Golfo dei Titani, e si riuniva al Trivio nella parte più orientale di questo, dov' era terminato dal Lestrigone.

650. Il Lestrigone non fu mai un oggetto difficile. Fu veduto per la prima volta il 22 dicembre; il 18 gennaio era evidentissimo, il 21 febbraio fino e sottile. In queste ed in altre osservazioni parecchie che ne furono fatte fino al 27 febbraio nulla fece supporre in esso uno stato di geminazione. Eppure il 27 febbraio d' un tratto si presentò duplicato nel modo che indica il disegno di quel giorno, cioè con tratti piuttosto confusi; l' osservazione fu confermata dal dott. Porro. Dei due tratti uno solo, cioè il più orientale, si prolungava sotto al Trivio verso il nord, formando l' Hades. Quest' ultimo fu sempre semplice dal 22 dicembre al 27 febbraio, e sempre facile. Dopo il 27 febbraio non si ebbero più occasioni di far osservazioni esatte in quella parte: però il Lestrigone è stato veduto ancora più o meno bene nei giorni 1 e 2 aprile.

Il canale Averno, che obliquamente congiunge il Lestrigone col Titano e traversa il Tartaro, è stato veduto due sole volte come oggetto assai difficile. Il 20 gennaio se ne vide solo il tronco compreso fra il Lestrigone e il Tartaro; il 22 consecutivo fu visto tutto intiero dal Lestrigone al Titano nella posizione che dà la carta. Era semplice, e dei due tratti veduti nel 1881-82 questa volta fu osservato soltanto il più boreale.

651. Dal 21 novembre al 27 febbraio fu molte volte osservato l'Erebo, oscuro ma molto confuso fino al 20 dicembre, poi sempre meglio distinto; la sua duplicità fu congetturata per la prima volta il 22 gennaio, e poi posta affatto fuori di dubbio da me e dal dott. Porro il 27 febbraio seguente, siccome risulta dal disegno di quel giorno (Tav. III, fig. VI). La geminazione era composta di larghi tratti e assai visibile; la tinta però non parve uniforme in tutta la lunghezza, ma nella parte vicina al Titano pareva rinforzarsi gradatamente in ambe le linee; fenomeno che finora non era stato osservato nè per l'Erebo, nè per altre geminazioni. L'estremità occidentale si connetteva col perimetro di Eliso presso a poco nei medesimi punti in cui tale perimetro era incontrato dalla geminazione del Trivio. Sebbene l'Erebo si prolungasse nell'Acheronte, fra l'uno e l'altro vi era un'interruzione prodotta da una causa ignota dipendente dal Titano per lo spazio di 7 od 8 gradi, come il disegno sopra citato dimostra. Dopo il 27 febbraio non si ebbe più alcuna buona occasione di osservar l'Erebo.

652. Lo Stige fu sempre veduto come parte del perimetro poligonale che serve di cornice alla rotonda dell'Eliso, non mai come linea definita, ma sotto aspetto di striscia sfumata più o meno. Una sola volta, il 18 gennaio, mi parve scorgervi traccia di geminazione, anche quella però non molto distinta. Poco soddisfacenti altresì furono le osservazioni del Boreas. La parte del medesimo compresa fra la Propontide e lo Stige fu intraveduta una volta sola, il 22 dicembre. Un'altra osservazione del 21 gennaio mi lascia dubbio se appartenga al Boreas o non piuttosto ad altro canale parallelo, ma più boreale. Quel tratto del Boreas, invece, che va dall'estremo di Stige al punto più australe dell'Anian non figurò mai altrimenti che come incorniciatura dell'Eliso, e sempre fu poco ben definito. L'Anian fu veduto e delineato almeno sei volte dal 22 dicembre al 21 febbraio: era fortemente accorciato dalla prospettiva, ma tuttavia ben distinto, non però così largo e così forte, come era stato veduto nel 1882. Perciò ho soppresso la denominazione di *stretto* datagli nella Memoria precedente (§. 512), e nella carta del 1881-82; e credo che sia un canale come gli altri circostanti, al par di essi soggetto a grandi variazioni nella sua larghezza e nella sua visibilità.

653. Per la regione occupata dalla Propontide e dalle sue diramazioni immediate le osservazioni di questa opposizione non dettero informazioni molto più sicure e più estese di quelle che risultavano dall'opposizione precedente. Più e più volte, specialmente nelle sere 22 dicembre, 21, 25, 27 gennaio, 27 febbraio mi sono industriato di decifrare il senso della rete multipla di strisce chiare ed oscure collocate fra l'Eliso e l'orlo della neve boreale; ma le interpretazioni da me ottenute non vanno sempre d'accordo fra di loro, e ho dovuto finire per convincermi, che col diametro del pianeta ridotto a meno di 14″ e colla obliquità forte di prospettiva che

ebbe luogo per quelle parti del pianeta, non era possibile venir a capo di tali difficili indagini usando un obbiettivo, anche perfetto, di soli otto pollici. Ciò che offre la carta è il risultato delle combinazioni che in questo momento mi paiono le più probabili.

654. La Propontide per sè stessa non dette alcuna ragione di dubbio, essendosi sempre presentata molto ampia e molto oscura. Si verificò l' osservazione già fatta prima, che la sua figura è a un dipresso rettangolare; che i suoi lati di destra e di sinistra son limitati e determinati dall' Hades e dal Titano; che i due lati maggiori sono press' a poco diretti nel senso del parallelo, però con una piccola deviazione di forse 10°, in conseguenza di cui la parte più occidentale è anche un poco più boreale. Il giorno 22 di gennaio si congetturò che il rettangolo fosse diviso per lo lungo da una sottile zona alquanto più chiara; in altri termini, che vi fosse un principio di geminazione. Ciò fu posto fuori di dubbio il 27 febbraio, nel qual giorno l' aspetto della Propontide fu quale lo presenta il disegno allora fatto (Tav. III, fig. VI). La zona più chiara compresa fra le due strisce geminate probabilmente è la stessa cosa che il Ponte d' Ercole segnato sulla carta del 1881-82 e descritto §. 512. Se questo è, dobbiamo concludere che la Propontide segnata in quella carta non è che la metà dell' intiera formazione, e che in quell' anno l' altra metà si trovò confusa colla zona oscura circondante le nevi polari: della qual zona i particolari per la soverchia obliquità si sottrassero allora all' esame dell' osservatore. — La Propontide fu veduta ancora il dì 8 aprile, essendo il diametro apparente di Marte ridotto a 8″ 7.

655. Osservazioni fatte il 27 gennaio e il 27 febbraio sembrano indicare, che a settentrione della Propontide e in parte collegato con essa esista un altro sistema di linee e macchie oscure, di cui le opposizioni posteriori potranno forse dare più esatta notizia. Secondo il disegno del 27 febbraio sotto la Propontide e quasi fra i medesimi meridiani vi sarebbe un altro lago poco di essa minore, detto Arsenio, avente il suo centro nella latitudine boreale di circa 60°. Da questo uscirebbe a sinistra un ramo a raggiungere il Mar Boreale presso la bocca del Sirenio, un altro a destra a connettersi coll'Anian. Due altri servirebbero ad unirlo colla Propontide, uno a sinistra che forma prolungamento del Titano, un altro a destra, che press' a poco sarebbe prolungamento dell' Hades. Tutto questo ha grande bisogno d' esser meglio veduto e confermato. Una relazione della Propontide col Tanai, quale è indicata nella carta del 1881-82, non risulterebbe affatto dai disegni del 22 dicembre 1883 e del 27 febbraio 1884, presi in buone circostanze. Pare, anzi, che in questi disegni la parte più occidentale del Tanai, che secondo le osservazioni dell' opposizione antecedente pareva stabilire una comunicazione diretta fra la Propontide e il Mar Boreale, non esista affatto. E neppure sembra accennata in essi quella linea, che nel 1881-82 partendosi dalla Propontide e passando sotto Cebrenia arrivava all' estremo boreale di Anian. Certamente poi non fu più veduto il Cocito, che nella carta antecedente si distaccava dalla Propontide verso Oriente. — Invece la connessione del Piriflegetonte colla Propontide fu notata più volte: soltanto il 27 febbraio tal connessione si trovò interrotta dalla striscia chiara accompagnante il Titano. Vedi il disegno di quel giorno (Tav. III, fig. VI) e il §. 643.

656. Osservazioni del 22 dicembre e del 25 gennaio mi porterebbero a credere, che dal congiungimento dello Stige col Boreas una linea oscura proceda in direzione

quasi meridiana verso il nord, dividendo in due la regione Cebrenia, e giungendo fino ad altra linea oscura che senza dubbio sta sotto questa regione fra il Lago Arsenio e l'Anian. Tali osservazioni non hanno tuttavia quel grado di sicurezza che si può desiderare; epperò quella nuova linea, benchè segnata sulla carta, è incerta. Essa seguirebbe press' a poco il 207° meridiano fra i paralleli 40° e 60°.

657. Dei canali formanti il contorno d' Eliso restano a considerare il Cerbero, l' Eunosto e l' Ibléo; i quali furon sempre visibili in tutte le condizioni d' atmosfera, benchè per lo più assai mal definiti. Il 18 gennaio tutti erano geminati, ma anche in tale stato assai sfumati e non belli a vedere, e non facili a studiare. In quel giorno tutto l' Eliso apparve circondato da due poligoni mal definiti, che facilmente si potevano anche prendere per due circonferenze concentriche. L' Ibléo del resto nulla presentò di notabile. Il Cerbero addì 20 gennaio parve ancora doppio; la linea superiore si prolungava al di là del Ciclope fino al Mare Cimmerio, cosa già avvenuta anche nell' opposizione passata (§. 516): e il prolungamento « formava una linea stretta e affatto filare ». È quello segnato x sulla carta. In modo affatto analogo e nel medesimo giorno fu visto l' Eunosto geminato prolungare la sua linea inferiore nella linea inferiore dell'Anteo, però soltanto fino al Lestrigone, incontrando questo nello stesso punto in cui giungeva contemporaneamente dall' altra parte il tratto inferiore dell' Averno, come sopra si è narrato, §. 650. La linea inferiore dell'Anteo fu veduta ancora il 22 gennaio, sempre però solo nella parte a destra del Lestrigone. Della parte d'Anteo compresa fra il Lestrigone e il Mare Cimmerio nulla è stato veduto.

658. Il Ciclope anche questa volta risultò composto d' un fascio di almeno tre linee, non mai tutte visibili simultaneamente. La vicenda delle loro apparizioni risulta dai seguenti estratti del mio giornale d' osservazione, dove le cose contenute fra parentesi devono considerarsi come addizioni posteriori.

Dicembre 22, $\omega = 187°$: Veduto il Ciclope, però in posizione lontana dal meridiano centrale; la direzione parrebbe secondo il meridiano, della duplicità non si può giudicare.

Gennaio 18, $\omega = 213°$: Ciclope evidentissimo, cade giù dritto verso il centro di Eliso; l' apparenza è doppia, ma la separazione delle linee non si può fare. (Nel disegno fatto pochi minuti dopo e riprodotto nella Tavola III fig. VII è diretto secondo il meridiano centrale). — *Gennaio* 19, $\omega = 211°$: Ho misurato la posizione del Ciclope e trovato 353°5 (la posizione dell' asse essendo 363°, si ha una deviazione notabile che accenna alla direzione della linea segnata a sulla carta. Nello schizzo preso pochi minuti prima la direzione del Ciclope è a un dipresso perpendicolare alla linea formata dal Trivio di Caronte congiunto idealmente coll' Efesto: ciò che conduce alla stessa conclusione). Può darsi che sia doppio, ma la separazione è impossibile. Tutte le linee sono mal distinte. — *Gennaio* 20: Ciclope largo; incerto se semplice o doppio. Sotto $\omega = 213°$ ho misurato la posizione e trovato 346° (ciò che dà una deviazione di 16° dal meridiano). Aria cattiva. Un' altra misura fatta sotto $\omega = 219°$ ha dato per posizione 347° (quindi una deviazione di 15°. Non vi è dubbio che la direzione è quella della linea a). — *Gennaio* 21: Aria non buona. Misurato sotto $\omega = 214°$ la posizione del Ciclope e trovato 347° (deviazione 15° dal meridiano centrale. Si conferma che la direzione è quella della linea a).

Febbraio 19, $\omega = 233°$: Ciclope non lunge dal meridiano centrale; grosso, evidentemente obliquo rispetto al meridiano stesso (delineato come semplice). — *Febbraio* 20. Sotto $\omega = 224°$ determinato la posizione del Ciclope in 338° (la posizione del meridiano essendo 354°, si ha una deviazione di 16° che accenna sempre alla direzione di a piuttosto che a quella di I e II, v. la carta. Lo stesso si conclude dal disegno fatto pochi minuti dopo, dove la direzione del Ciclope è quasi perpendicolare alla linea formata dal Trivio e dall' Efesto). È delineato come semplice. — *Febbraio* 21,

$\omega = 220°$: Ciclope doppio e diretto esattamente nel meridiano. La linea a sinistra è più grossa e passa esattamente pel centro dell'Eliso, mentre l'altra a destra è più sottile ed eccentrica. Ieri certamente la linea era unica ed inclinata al meridiano di un forte angolo, almeno 20°, se non più (questa stima è esagerata alquanto). $\omega = 224°47$: Passa al meridiano centrale tutto insieme il canale dei Ciclopi, o piuttosto la linea mediana delle due di cui è composto. L'estremo inferiore è proprio nel centro del disco, l'estremo superiore dista dal centro 0,40 del raggio di esso disco. La disposizione è precisamente quella del 1882. — *Febbraio* 22, $\omega = 203°$: Il Ciclope è certamente come ieri, immagine mediocre. Sotto $\omega = 224°13$ passa tutto intiero al meridiano centrale: l'estremo inferiore è più alto che il centro del disco di 0,05 del raggio, l'estremo superiore di 0,45. Posizione del Ciclope al momento del passaggio 354°10. (Posizione del meridiano centrale secondo Marth, 354°12: deviazione zero). — *Febbraio* 27, $\omega = 216°$: Ciclope doppio; ancora esattamente sud-nord come nei giorni scorsi. Sotto $\omega = 221°$ passa al meridiano centrale la linea mediana. Posizione di questa al momento del passaggio 353°6. (Posizione del meridiano centrale secondo Marth 353°4; deviazione trascurabile).

Marzo 28, $\omega = 252°$: Veduto il Ciclope; possibile che sia doppio, ma l'obliquità è troppo grande per giudicarne. — *Aprile* 1, $\omega = 214°$. Nei momenti buoni credo di veder ancora il Ciclope nella direzione meridiana o poco diversa; per un istante credo di averlo ancora potuto sdoppiare. — *Aprile* 2: Veduto Ciclope distintamente; ha il solito aspetto.

659. Le conclusioni che si traggono da queste note, e dalle misure di cui è stato possibile corredarle, sono ben chiare ed evidenti. Addì 18 gennaio il Ciclope è in geminazione, diretto secondo il meridiano. Il 19 gennaio si manifesta una deviazione dal meridiano assai sensibile; diventa dubbia la geminazione, od almeno irreconoscibile. L'una e l'altra circostanza durano fino a tutto il 20 febbraio, e sono constatate più volte in modo indubitabile [1]. Fra l'osservazione del 20 febbraio e quella del 21 ha luogo un cambiamento inverso a quello avvenuto fra il 18 e il 19 gennaio. Il Ciclope riprende l'aspetto geminato e la sua direzione meridiana, e tale dura per tutto il tempo delle residue osservazioni fino al 2 aprile e questo incluso. — Simili fluttuazioni d'aspetto sono state osservate nel 1882 (§. 517), ma quelle or ora descritte includono una vicenda alterna di cose, di cui qui si ha il primo esempio. La geminazione I-II del 1884 sembra identica per posizione a quella del 1882, sebbene non abbia di gran lunga raggiunto il grado di evidenza e di precisione che allora ebbe veramente straordinario (§. 518). La linea obliqua *a* del 1884 poi ho ragione di credere che sia bensì parallela a quella così segnata nel 1882, ma collocata parecchi gradi più a destra, in modo da aver comune o quasi comune con I il suo estremo superiore, e con II il suo estremo inferiore.

660. Sulla corrispondenza dell'Efesto e della sua geminazione col Trivio di Caronte già si è riferito §. 647. L'Efesto fu sempre ottimamente visibile e sempre si presentò come geminato in tutte le occasioni d'immagine sufficiente dal 14 gennaio al 28 marzo. Le due larghe strisce di cui era composto si appoggiavano da un lato al perimetro dell'Eliso, dall'altro al corso del Thoth. Era inclinato al parallelo di circa 10°, coll'estremità destra un poco più bassa della sinistra. Ad esso facevan capo l'Etiope, che fu visibile alcune volte, specialmente il 18 gennaio e il 19 febbraio: e il Lete, di cui una sola volta (18 gennaio) fu possibile ottenere una visione sicura. Nè l'uno nè l'altro mostrarono di prolungarsi al di là dell'Efesto verso settentrione.

[1] Le deviazioni dal meridiano addotte qui sopra nel §. 658 sono deviazioni *apparenti*, cioè danno gli angoli delle linee secondo cui il Ciclope e il meridiano centrale si proiettavano sul piano perpendicolare alla vista. La riduzione alla deviazione vera considerata sulla superfice di Marte si ritiene come trascurabile nel caso presente.

661. Circa la colorazione di tutte le parti descritte in questa sezione già si è riferito sul fenomeno principale, che è la variazione d'albedine dell'Eliso. Nella contigua Etiopide apparve pure una speciale colorazione bianca nei tre giorni 14, 15, 16 gennaio, di cui in altre epoche non si fa più menzione. Questa colorazione fu notata soltanto quando la regione era presso il lembo sinistro, non mai nelle vicinanze del meridiano centrale. — Infine è da notare che nelle giornate 19 e 20 gennaio tutta la regione intorno all'Eliso fu occupata da veli biancastri molto estesi, non però tanto definiti, che se ne potesse assegnare il limite. Essi prevalevano nella zona equatoriale, ed erano più intensi al lembo destro ed al lembo sinistro. Anche il 1° aprile, essendo al centro il 265° meridiano, il colore di Marte apparve « più bianco e affatto diverso dal solito ». Di simili imbrattamenti generali su vaste regioni del pianeta già altri esempî si ebbero nelle opposizioni precedenti.

Sezione IX.

Mari interni e Terre Australi dal 130° al 310° meridiano.

662. La serie dei mari delle Sirene, Cimmerio, Tirreno ed Adriatico non fu osservata in posizione troppo favorevole, per la molta obliquità della prospettiva; in generale non si potè in essi discernere alcuna variazione chiaramente dimostrabile rispetto allo stato delle opposizioni precedenti, salvo forse per quanto concerne il colore, meno intenso che nel 1877 e nel 1879. Rispetto al Mare Cimmerio possiamo aggiungere, che niente questa volta ha potuto far supporre l'esistenza in esso dell'isola Cimmeria, osservata nei primi giorni del febbraio 1882 (§. 515).

663. Le penisole o lingue di terra che separano l'uno dall'altro i predetti mari non presentarono neppur esse alcuna importante novità. L'Atlantide I fu veduta distintamente parecchie volte dal 18 dicembre al 27 febbraio; bellissima era il 22 gennaio e rassomigliava ad un filo d'oro teso obliquamente fra il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio. Dell'Atlantide II non si vide alcun indizio, non so se per effetto di vera disparizione, o della troppo obliqua visuale. — Esperia fu osservata bene più volte dal 17 gennaio al 1° aprile; la sua figura era appunto quella dell'opposizione precedente, e nella sua parte più australe e più angusta, contigua ad Eridania, fu osservata ancora l'ombra già notata da Maedler, osservata poi da me nel 1877 e nel 1881-82 (§§. 143, 527). Invece non fu notato il tratto oscuro obliquo, che negli anni 1879 e 1881-82 divideva questa penisola quasi nel suo mezzo (§§. 390, 527). Su di Esperia trovo nel diario sotto il 20 febbraio 1884 questa annotazione: « È singolare che tanto oggi, quanto in tutte le sere di buona visione Esperia e Libia, oltre ad apparir d'un giallo più fosco, sembrano porose, o piuttosto fioccose, come se fossero intersecate da un'infinità di lineette o bucherellate, o infine vi è alcuna cosa di nebuloso, ma in cui gli elementi della nebula non sono infinitamente piccoli, e danno l'impressione di una struttura pelosa o granulare ». Simili impressioni, piuttosto che osservazioni, sono state notate negli anni scorsi a proposito della Libia, di Ausonia e di Japigia (§§. 402, 535, 546). — Di Ausonia fu notata la divisione in due parti operata dalla

striscia sfumata obliqua detta Euripo, veduta pure nel 1879 e nel 1881-82. Il 20 febbraio era ben visibile la piegatura d'Ausonia, segnata col nome di Capo Circeo: e si vide pure il tratto oscuro non ben definito, che la separa dalla Japigia. Quest' ultima pure fu osservata più volte nel febbraio sotto l'aspetto consueto d'isola di tinta fosca, e non ben terminata da nessuna parte.

664. Della lunga serie di regioni australi che si stende in questa parte lungo il 40° e il 50° parallelo, e comprende la Fetontide, l'Elettride, l'Eridania, l'Ausonia superiore e l'Ellade, non si è potuto osservare questa volta altro che i limiti boreali confinanti coi mari interni già detti. I canali che le percorrono e le separano: Colonne d'Ercole, Termodonte, Simoenta, Ascanio, Scamandro, Xanto, Alfeo e Peneo, rimasero tutti affatto invisibili, come pure quella parte d'Euripo, che separa il Chersoneso d'Ausonia dall'Ellade. Dei limiti superiori di queste regioni, del Mare Cronio, e del Golfo di Prometeo, non si potè mai constatare alcun indizio. Tutta quella parte del pianeta al di là del 40° parallelo boreale rimase sempre avviluppata d'una tinta grigio-biancastra press'a poco uniforme, su cui soltanto di quando in quando spiccavano, ordinariamente per pochi giorni, alcune macchie più brillanti.

665. Di queste la più cospicua e la più permanente fu l'Ellade, la quale dall'11 dicembre al 18 marzo nelle configurazioni a ciò opportune fu veduta sempre occupare l'alto del disco in forma di nube ellittica d'un bianco più o meno schietto. Il suo contorno era piuttosto diffuso, onde l'assimilazione ad una nube. Il diametro di ciò che si vedeva come macchia bianca non fu sempre uguale; da principio era certamente qualche cosa come 30° o non molto meno, ma andò diminuendo, e in febbraio era ridotto a circa 15°. Le particolarità di questo fatto e il suo modo di prodursi sfuggirono ad ogni tentativo d'osservazione. Ecco le Note scritte sul diario, ed ordinate in forma tabellare.

Data	ω	Annotazioni
Dic. 11	287°	In alto brilla come massa bianca ellittica l'Ellade in forma di nube luminosa più di tutto il resto.
— 13	291	Ellade bianca in alto.
Gen. 9	317	bianco-pallida all'orlo, come nube chiara.
— 10	305	Ellade bianca, ma non come neve.
— 11	296	Ellade biancastra.
— 12	288	color bianco un po' grigio: non brillante come neve.
— 15	273	bianco d'Ellade men vivo che quello d'Aeria e della neve polare: più esteso di quest'ultima.
— 16	213	bianca.
Feb. 7	343	una luce fosca indica l'Ellade.
— 18	290	Ellade biancastra, poco splendente e fosca.
— 19	302	indicata come bianca sul disegno.
— 20	308	L'Ellade (o almeno la sua parte bianca) pare piccola assai, il suo diametro non può esser molto più di 15°. È bianca, ma non viva come la calotta boreale; non vi è orlo preciso.
— 21	290	Ellade piccola, bianco-pallida non brillante.
— 22	278	Ellade bianca.
Mar. 16	351	biancastra a sinistra.
— 18	344	biancastra all'orlo sinistro.

Per le analoghe osservazioni anteriori si confrontino i §§. 180, 408, 547-548.

666. Anche le due isole di Thyle diventarono qualche volta visibili sotto forma di macchie bianche occupanti tutto o parte della loro area. Ambedue si videro il 20 gennaio formare una sola macchia bianca oblunga, che occupava una parte notabile del lembo superiore del disco. Thyle I poi fu vista sola splendere di luce bianchissima nei giorni 23 e 25 gennaio (il 24 non si fecero osservazioni). Thyle II presentò un mese dopo (19 e 20 febbraio) simili apparenze, ma più modeste; si vedeva come una piccola macchia bianca. Apparenze di bianco furon notate anche in Ausonia superiore (australe) nei giorni 19-20-21-22 febbraio e 25-26-28 marzo.

667. Nei giorni 18 e 20 gennaio fu osservata nell' alto del disco una macchia bianca come neve, assai minore però della calotta polare boreale; non sapendo bene a quale regione conosciuta si dovesse riferire, ne presi parecchi angoli di posizione, che qui si riportano.

Gennaio	18	$\omega = 212^\circ.4$	$p = 346^\circ.5$
—	—	237 .2	349 .6
—	—	250 .8	360 .5
—	—	262 .7	367 .2

Tali dati si possono rappresentare abbastanza bene, supponendo che la macchia nevata si trovasse nella longitudine di 238° e nella latitudine australe di 66°; il qual luogo corrisponde all' estremità più occidentale di Thyle II. — Un' altra simile macchia fu osservata nei giorni 20-21-23 marzo, bianca e ben contornata quanto la neve polare. Il micrometro dette i seguenti angoli di posizione:

Marzo	20	$\omega = 327^\circ.2$	$p = 5^\circ.2$
—	20	338 .8	14 .5
—	20	341 .7	25 .0
—	21	311 .6	1 .6
—	23	298 .1	— 4 .0
—	23	312 .7	3 .0

Questi numeri non si accordano molto bene fra loro, tuttavia se ne posson dedurre per le coordinate della macchia i valori: longitudine 293°, latitudine 55° australe. La macchia era dunque press' a poco nella punta estrema del Chersoneso d'Ausonia, sopra l' Ellade. Essa fu molto variabile di grandezza, e niente assicura che non lo fosse pure quanto a posizione. Il 20 marzo aveva, secondo la stima fatta, circa 15° di larghezza; il 21 era piccola e appena visibile; il 23 era di nuovo più facile ad osservare; il 24 non ne trovo menzione: il 25 fu cercata e non fu più trovata.

Sezione X.

Gran Sirte e sue adiacenze.

668. Nell' aspetto della Gran Sirte non ho potuto notare nulla che attestasse mutazioni certe rispetto a quanto s' era veduto nell' opposizione precedente. Il colore della medesima, sempre molto oscuro, sembra sia stato più uniforme di altre volte; in alcuni disegni che ho fatto, non trovo alcuna traccia dell' Enotria, zona alquanto più chiara del resto, che nelle osservazioni degli anni passati formava quasi un prolungamento d'Ausonia fin presso il confine orientale d'Aeria. Nè di questa Enotria trovo alcun cenno nelle osservazioni scritte. — Anche la Nilosirte fu sempre molto oscura e molto larga, forse meno larga però che nell' opposizione precedente. La sua larghezza al di sotto del 20° parallelo australe è stata dappertutto uniforme, salvo piccole irregolarità dovute per lo più alle bocche dei varî canali che dalle due parti vi mettono capo. Su due disegni fatti il 19 e il 20 febbraio ho procurato di determinare questa larghezza misurandone il rapporto con la distanza ben nota che è fra la bocca del Nepente e il fondo della Nilosirte stessa; distanza che misurata lungo la riva orientale della Sirte e della Nilosirte ho supposto essere di 52°, ridotta per lo scorcio a 50°. Da ciò risultò la larghezza della Nilosirte 6° 2 il 19 febbraio, e 5° 0 il 20 febbraio: medio delle due determinazioni 5° 6. Un mese dopo (19 e 20 marzo) però la Nilosirte dovea esser cresciuta notabilmente di larghezza, perchè in quei due giorni è designata nel diario come « molto grossa » quantunque lontana dal centro del disco. — Presso la punta inferiore dell' isola di Meroe la Nilosirte formava una ramificazione breve, ma nera e cospicua, la quale andava verso sud-ovest al piccolo lago rotondo detto Pseboas, da cui si dipartivano il Phison orientale e l'Astusape. Questa ramificazione fu manifesta specialmente nei giorni 19-20-21 febbraio. — La Nilosirte poi all' estremo settentrionale terminava con un abside rotondeggiante, di cui un piccolo golfo a ponente segnava il principio del Protonilo. E tale abside era separata da un intervallo chiaro di alcuni gradi dal principio della Boreosirte.

669. Molto ben pronunziato, perfettamente definito, e di agevole osservazione è stato pure sempre l'Astusape, che fu veduto dall' 11 dicembre al 1° aprile, qualche volta anche in posizioni di grande obliquità (il 18 gennaio a 52° dal meridiano centrale, il 19 febbraio a 46°). Il suo corso non era curvo come nel 1881-82, ma dalla foce dell'Astabora nella Gran Sirte dritto andava al lago Pseboas, che segnava il suo congiungimento col Phison orientale (§. 594). La sua direzione era alquanto inclinata al meridiano. Il 21 marzo ($\omega = 312°$) parve più grosso e più cospicuo del solito: tale stato eccezionale però era già cessato il 23.

670. Molto oscura fu anche la macchia designante la Piccola Sirte, la quale ebbe pure un periodo di massima appariscenza nei giorni 20 e 21 marzo: il 23 di nuovo era come prima. — La Libia si mostrò sempre di color rosso cupo e di tessitura fioccosa come nell' opposizione precedente (§. 535); il qual colore si faceva anche più oscuro al confine occidentale verso la Gran Sirte, occultando così il Lago

Meride, che riuscii a distinguere una sola volta, il 20 febbraio. Il limite australe di Libia verso il Mar Tirreno e il limite occidentale verso la Gran Sirte erano mal definiti, e il contrasto di tinta con quei mari piuttosto debole.

671. Il Tritone (canale) fu visto tutto intiero come confine d'Esperia e di Libia colla regione Amenti in tutta la sua estensione dal Mare Cimmerio fino al Nepente e al principio del Thoth. Non dette mai alcun indizio di geminazione. Quanto al Lago Tritone, ne fu esaminato più volte il luogo, e sempre constatata l'assenza. Nell'area da esso prima occupata, il 21 febbraio fu visto un po' di bianco fra i due tratti del Thoth presso il punto dove essi si congiungono col Nepente. Un'osservazione analoga era già stata fatta nei giorni 3, 4, 5 febbraio 1882 (§. 542). Il Thoth cominciò ad esser ben visibile verso la metà di gennaio: il 18 era geminato, e questa geminazione persisteva ancora il dì 1° di aprile. In febbraio fu di particolare evidenza, e il 20 di quel mese potei farla vedere anche al dott. Porro. Due particolarità ebbi a notare nel Thoth geminato. La prima, che i due tratti non erano uguali di grossezza e d'intensità, ma l'orientale o sinistro era molto più sottile che l'occidentale o destro: quest'ultimo il 21 febbraio era una delle più grosse linee che si vedessero sul disco. La seconda, che il Nepente, il quale nel 1882 arrivava soltanto a contatto del tratto destro del Thoth, ora giungeva fino al tratto sinistro, appoggiandosi obliquamente ad esso, come la carta dimostra. Il tratto destro del Thoth, il quale nel 1882 cominciava dal fondo della piccola Sirte, quest'anno cominciava molto più basso e precisamente dal Nepente in giù. Una comparazione delle due carte del 1882 e del 1884 darà una idea chiara delle variazioni avvenute in questo luogo.

672. Il Nepente si mostrò come una grossa striscia semplice, uniforme, alquanto arcuata e concava verso il basso. Il 22 febbraio la sua larghezza fu stimata di 3°. Sovr'esso, avvolto in densa ombra, fu visto il 20 febbraio il Lago Meride per la prima ed unica volta nella presente opposizione: sotto esso, non esisteva più quella acuta prominenza oscura che nel 1882 formava la bocca dell'Athyr. Dell'Athyr, nessuna traccia. Nell'interno dell'arco formato dal Nepente fu veduto invece del bianco; non mai però così concentrato in poco spazio e così ben limitato, che se ne potesse inferire la continuata esistenza della neve Atlantica. La tinta bianca era generalmente diffusa sopra tutta la parte più australe della Regione d'Iside; era ben terminata dal Nepente nella parte superiore, ed ivi faceva vivo contrasto coll'oscurità della Libia; ma non aveva confini determinati verso il basso. — Inferiormente la Regione d'Iside era, come prima, limitata dall'Astapo, poco visibile per vero dire, ma tuttavia riconosciuto da me distintamente a più riprese, e per l'ultima volta dal signor Porro il 20 febbraio.

673. Il luogo e la forma incurvata della Boreosirte, e la disposizione dei suoi rami furono tali quali erano già stati descritti nell'opposizione antecedente. Il suo principio occidentale era diviso dall'estrema Nilosirte per mezzo d'un intervallo chiaro di alcuni gradi, siccome mi è constato indubbiamente da attento esame, fatto specialmente nei giorni 18, 19, 20, 21 febbraio. Nelle osservazioni del gennaio questa interruzione fra la Nilosirte e la Boreosirte non mi era sembrata così evidente. Al contrario non è stato possibile quest'anno di vedere l'interruzione della Boreosirte segnata nella carta del 1881-82 sotto il 272° meridiano. — La Boreosirte formava

una bella striscia quasi uniforme, larga a un dipresso quanto la Nilosirte o poco meno, e di colore assai simile, incurvata in modo da raggiungere il luogo, dove in un' ombra comune si confondono con essa il Thoth, l'Alcionio, e il prolungamento occidentale dell' Eunosto. Le congiunzioni col Thoth e coll' Eunosto erano pallide e mal delineate, piuttosto ombre vaghe, che altro: fortemente indicata invece era la congiunzione col-l'Alcionio, formante sotto il parallelo 40° quell' angolo retto nerissimo, che è stato veduto già prima da varî osservatori (§. 534), e che il 20 febbraio fu osservato simultaneamente da me a Milano e dal dott. Lohse a Potsdam (1). L' Eliconio non si potè mai vedere ben separato dalla zona oscura perimetrale che circondava la neve polare, e l' isola Utopia apparve sempre mal terminata dal lato di settentrione. L'Asclepio fu veduto con qualche difficoltà due volte, il 18 gennaio e il 20 febbraio.

674. Quel ramo della Boreosirte, che il 19 dicembre 1881 (§. 539) fu visto salire obliquamente a latitudini boreali elevate, si potè questa volta seguire fino al suo congiungimento col Lago Aretusa, sebbene si presentasse piuttosto come un' ombra diffusa, che come una linea ben determinata. Sulla carta è designato col nome di Pierio. In qual modo esso si connetta coll' Eliconio rimane dubbio per ora. Il 19 febbraio si potè invece disegnare (quantunque in grande scorcio) un altro ramo, che dal Pierio dipartendosi sotto la longitudine di circa 290°, sale verso il polo con deviazione sensibile verso oriente. Dove fosse il suo termine boreale non ho potuto definire, perchè questo termine si confondeva colla solita molestissima zona oscura contornante le nevi boreali. Sulla carta l' ho segnato col nome di Piramo. Queste osservazioni sono necessariamente molto imperfette, e per l' obliquità della visione, e per esser state fatte una sola volta.

(1) *Publ. Potsd.* vol. VIII, Tafel 4. Nello stesso disegno del 20 febbraio il Lohse ha figurato la Boreosirte, l'Astapo, l'Alcionio, e l'isola Utopia.

CAPITOLO III.

Osservazioni concernenti la costituzione fisica del pianeta e della sua atmosfera.

SEZIONE I.

Osservazioni della macchia polare boreale.

675. Il 27 marzo 1883 a 22^h 25^m di tempo medio esplorai in pieno giorno l'aspetto di Marte, il quale solo da 3 ½ mesi era uscito dalla congiunzione al sole, e due mesi dopo dovea passare pel suo solstizio australe: il diametro apparente era 4″2. Non vidi altro che un dischetto di luce bianca smorta, molto più pallido del vicino Mercurio, il quale allora era di un bianco splendido un po' roseo, e nel suo disco (diametro 5″4) presentava macchie scure e chiare mal definite, ma molto sensibili. Sebbene Marte mostrasse allora in buona prospettiva il polo australe, e la calotta nevosa di quel polo dovesse essere ancora assai ampia (il solstizio australe non ebbe luogo che il 19 maggio), niente fu veduto di questa. Questa osservazione è interessante per la comparazione dei due pianeti rispetto al colore, e mostra, che se Marte si trovasse al luogo di Mercurio, ben poco o forse nulla si potrebbe sapere della sua topografia e della sua fisica costituzione.

676. Quando nel novembre consecutivo Marte cominciò a presentarsi con un diametro di 8″, l'oggetto più prominente del suo disco fu una striscia oscura mal definita, in forma di corda più o meno regolare che lasciava libero nella parte inferiore un segmento di circa 60° d'ampiezza. La striscia rappresentava una parte di quella zona continua d'ombre, che circonda il pianeta fra 50° e 60° di latitudine boreale, e a cui si è dato il nome di Piccolo Diaframma (§. 449). Il segmento incluso era di color biancastro, e nel suo vertice si mostrava un bianco più vivo, ma di contorni poco salienti e male definiti. Questo era, come provarono le misure allora prese, la neve polare boreale: il 5 e il 21 novembre fu stimato che il suo diametro (o almeno il diametro della parte non immersa nell'ombra dell'emisfero oscuro di Marte) potesse essere di circa 30° del lembo. Così scialba fu essa pure veduta a Potsdam dal dottor Lohse [1]. Nella prima metà di dicembre fino al 14 questo stato di cose si mantenne con varie fluttuazioni, accompagnate anche da irregolarità manifeste di forma e di distribuzione, delle quali il piccolo diametro apparente e la non mai troppo buona qualità dell'immagine non permisero di fare un'analisi soddisfacente. Ecco le note da me prese in tale intervallo.

[1] *Publ. Potsd.* vol. VIII, p. 111. *Novembre* 5: difficile a vedere. *Novembre* 27: grande ma alquanto pallida.

Dicembre 4 ($\omega = 339°$): La neve in basso non mi pare occupi più di 20° circa. Le dimensioni nord-sud sono fuori di proporzione, sembra quasi rotonda, e forse è tutta sul disco. — *Dicembre* 5 ($\omega = 350°$): Non se ne intende bene la forma; è circondata da ombre molto indistinte. — *Dicembre* 7 ($\omega = 334°$): Non è molto bianca, forse meno che Chryse all'orlo destro: è raccolta in uno spazio ovale di non molta dimensione (forse 20°), ma non ne posso precisare i confini. — *Dicembre* 11 ($\omega = 287°$): Molto ampia, in forma all'ingrosso di segmento occupante forse 30° del lembo; ma tutto è mal terminato. — *Dicembre* 13 ($\omega = 292°$): Male distinta. — *Dicembre* 14 ($\omega = 297°$): Neve boreale è almeno grande quanto l'Ellade o anche di più; inoltre oggi pare più bianca.

677. Le osservazioni, interrotte dopo il 14 dicembre, ricominciarono il 18. A partire da questo giorno non solo apparve molto cresciuta di splendore e di diametro, ma sui disegni incominciò a vedersi limitata con precisione da una zona molto oscura che la circondava tutt'intorno; zona che continuò a vedersi fino alla fine delle osservazioni. Le variazioni del suo diametro ed altre indicazioni generali sul suo aspetto s'intenderanno meglio raccolte in forma tabellare come qui appresso.

Data 1883-84	Dal solstizio boreale giorni	ω	Diametro estimato	Annotazioni diverse
Dic. 18	— 147	166°	40°	brillantissima.
— 20	— 145	153	....	benissimo veduta.
— 22	— 143	139	40	
— 31	— 134	56	....	manifestamente ellittica.
Gen. 2	— 132	21	36	ellittica.
— 3	— 131	11	40	sempre molto estesa.
— 4	— 130	10	45	
— 9	— 125	320	47.5	meno di 50° e più di 45°.
— 10	— 124	323	45	contorno dentellato.
— 14	— 120	254	30	ridotta a 30° o poco più.
— 15	— 119	273	30	Ellade pare anche più estesa.
— 16	— 118	217	35	benissimo definita: contorno ellittico.
— 17	— 117	221	35	bella, ellittica, ben distinta.
— 18	— 116	211	40	irregolare alquanto.
— 19	— 115	201	36	due quinti del quadrante.
— 20	— 114	200	36	id. bianchissima e bellissima.
— 21	— 113	190	....	ben contornata da zona oscura.
— 25	— 109	114	37.5	da 35° a 40°: brillantissima.
— 27	— 107	135	....	pare diminuita di larghezza verticale.
— 29	— 105	99	....	irregolare e men grande del solito.
— 30	— 104	63	30	sottile: contorno dentellato.
Feb. 3	— 100	37	35	
— 4	— 99	7	30	non più di così.
— 5	— 98	3	....	taglio oscuro (*vedi più sotto*).
— 6	— 97	33	....	non simmetrica (*vedi più sotto*).

Data 1883-84	Dal solstizio boreale giorni	ω	Diametro estimato	Annotazioni diverse
Feb. 7	— 96	359°	30° +	perfettamente ellittica.
— 13	— 90	340	30	ovale perfetta.
— 18	— 85	298	25 ?	immagine fosca.
— 19	— 84	233	30	un po' più sottile a destra.
— 20	— 83	222	30	sottile: perfettamente ellittica.
— 21	— 82	211	35	non certo minore di così.
— 22	— 81	278	30	
— 27	— 76	212	28	pare un po' diminuita.
Mar. 2	— 72	122	—	oscuro intorno fino a 45° di latitudine.
— 4	— 70	106	25	
— 5	— 69	110	25 ?	stima incerta.
— 7	— 67	108	....	pare molto diminuita e più sottile.
— 9	— 65	60	25	
— 13	— 61	27	22	più corta, ma più larga nel senso verticale.
— 14	— 60	17	25	
— 16	— 58	351	22	più larga nel senso verticale.
— 17	— 57	3	20	
— 19	— 55	346	25	un po' più grande che nei giorni scorsi.
— 20	— 54	324	28	quasi 30° o almen 25°: cresciuta?
— 21	— 53	311	25	certo ancora così.
— 23	— 51	294	25	
— 25	— 49	276	25	non pare diminuisca.
— 26	— 48	290	25	
— 28	— 46	252	22	come al solito 25°, forse meglio 20°.
Apr. 1	— 42	214	22	circa 25° o piuttosto 20°.
— 1	— 42	244	20	
— 2	— 41	209	22	
— 8	— 35	155	25	certamente così.
— 12	— 31	121	25	
— 15	— 28	88	20	non più: forse anche meno.
— 25	— 18	1	15 ?	perfetta, benchè molto piccola, forse 15°.
Mag. 9	— 4	280	15	ben visibile, ellisse non molto allungata.

678. Lo stndio dei numeri della quarta colonna indica in totale una progressiva diminuzione della macchia polare. Le piccole fluttuazioni che s' incontrano ora in eccesso ora in difetto non sembrano avere alcuna connessione col periodo della quantità ω e coi diversi meridiani del pianeta. La sfaldatura della macchia al suo perimetro ha dunque avuto luogo bensì irregolarmente e per salti, ma ora da un lato ora dall' altro, senza prediligere alcuna parte speciale dell' orlo. A tale diminuzione saltuaria sembra certamente dovuta la sottigliezza maggiore osservata dal 27 gennaio al 1° febbraio

per valori di ω compresi fra 63° e 105°, nei giorni 19-20 febbraio per valori di ω intorno a 230°, e ancora il 7 marzo per $\omega = 108°$ [1]. Alla stessa causa riferiremo pure la grossezza maggiore dell' ovale verificata il 2 gennaio per $\omega = 21°$, il 13 marzo per $\omega = 29°$ e il 9 maggio per $\omega = 230°$.

679. L' osservazione più importante circa lo sfaldarsi della macchia bianca è stata fatta il 5 febbraio sotto $\omega = 15°$ ed è rappresentata approssimativamente nella figura qui presso. Un taglio oscuro eccentrico formava nell' ovale bianca un' insenatura

profonda aperta in forma di tromba nella parte perimetrale, e terminata interiormente in punta acutissima. Non è stato possibile di seguire tale punta fino all' orlo del disco, e non si può quindi affermare, che il taglio dividesse l' intera macchia in due segmenti disuguali. L' inclinazione apparente della sua linea mediana era di circa 50 gradi rispetto al meridiano centrale del disco; pertanto l' asse del taglio, prolungato al di fuori come circolo massimo doveva intersecare l' equatore del pianeta press' a poco nella longitudine di 40°. La sua eccentricità era considerabile, e la distanza dal centro della macchia bianca si poteva stimare circa la metà del raggio di essa macchia. Il giorno dopo sotto $\omega = 39°$ trovo l' annotazione seguente: « è certissimo che la neve boreale non è perfettamente ellittica, ma un poco più acuminata all' estremo destro. Il taglio di ieri forse vi è ancora, ma non lo vedo distinto, perchè l' aria si è guastata alquanto ». In quella sera non fu fatto alcun disegno in cui entrasse una rappresentazione qualsiasi della neve polare.

Sezione II.

Sui fenomeni che presentò la macchia polare boreale nelle opposizioni 1881-82 e 1883-84.

680. Per ragioni facili a comprendere non sarà mai dato all' osservatore terrestre di seguire il fenomeno interessante della formazione dell' una e dell' altra neve polare di Marte con quella copia ed evidenza di particolari che si può avere, rispetto alla dissoluzione delle medesime. Tutto quello che si può sperare è di studiare quanto avviene per ciascun polo nella sua stagione primaverile, fra il suo equinozio vernale

[1] Fenomeno notato anche dal dott. Lohse a Potsdam nei giorni 28 gennaio, 1 e 17 febbraio. *Publ. Potsd.* vol. VIII, p. 112-113. Le date consentono, per quanto lo concedono le interruzioni del cattivo tempo.

e il suo solstizio estivo; nel qual tempo si dovrebbe credere che il processo di formazione della macchia debba esser cessato, ed anche forse incominciato il processo di distruzione. Per lo studio della macchia boreale durante questa fase della sua esistenza offrono qualche materia le osservazioni delle due opposizioni 1881-82 e 1883-84. La prima di queste serie comincia il 26 ottobre 1881, quarantatrè giorni prima dell' equinozio vernale, e termina col 21 aprile 1882, cioè 65 giorni prima del solstizio estivo; nelle epoche più favorevoli allo studio della calotta nevosa il polo boreale oscillava appunto sul limite dell' emisfero visibile, stando ora pochi gradi entro, ora pochi gradi fuori di esso (v. §. 438). La seconda serie comincia il 5 novembre 1883, dieci giorni dopo l' equinozio vernale, e termina col 9 maggio 1884, quattro giorni prima del solstizio estivo; il polo boreale nel tempo delle osservazioni più importanti si trovava avanzato 18° entro i limiti dell' emisfero visibile. I risultati di questa seconda serie sono stati descritti or ora: quelli della prima si trovano nella Memoria III, §§. 554-567.

681. L' esame comparativo di quanto avvenne nelle due opposizioni conduce a riconoscere in ambedue un fatto importante: quello cioè di un' epoca critica, nella quale la neve boreale, anteriormente poco visibile e mal definita, in pochi giorni venne acquistando il suo maximum di ampiezza e di splendore, contornandosi in pari tempo d' una zona oscura, che la delimitava perfettamente a partir da quell' epoca per tutto il resto delle osservazioni. Nella opposizione 1881-82 si può ritenere che tal periodo critico cominciasse col 17 gennaio e finisse col 26 dello stesso mese (v. §§. 556 e 565): nell' opposizione 1882-83 risulta dalle cose dette poc' anzi (§§. 676 e 677) che cominciasse il 14 dicembre ed avesse termine col 18. L' intervallo fra i due periodi critici non differisce che di pochissimi giorni dalla durata della rivoluzione del pianeta, che è di giorni 687. Nella prima opposizione l' epoca media tra il principio e la fine fu 1882 25 gennaio, 48 giorni dopo l' equinozio vernale, e 151 prima del solstizio estivo. Nella seconda opposizione l' epoca media fra il principio e la fine fu 1883 16 dicembre, 51 giorni dopo l' equinozio vernale, e 149 prima del solstizio estivo [1]. Secondo tutte le apparenze abbiamo qui un fenomeno periodico, che segna nell' esistenza della calotta polare boreale una fase importante e bene determinata.

682. Quello, che nell' una e nell' altra opposizione è avvenuto della neve boreale dopo il periodo critico, appare dalla comparazione delle due Tabelle §§. 566 e 677, e mostra un perfetto parallelismo nei due andamenti. Uguale accordo però non si mostra nello stadio precedente il periodo critico. Durante questo stadio nella opposizione 1881-82 la macchia polare fu interamente invisibile, od almeno non fu mai veduta; mentre nell' opposizione 1883-84 essa fu visibile più o meno in tutte le osservazioni, quantunque sempre pallida e mal terminata. Questa differenza si spiega facilmente colla differente inclinazione che ebbe l' asse di Marte, rispetto alla visuale nelle due opposizioni. Nelle settimane che precedettero il periodo critico 17-26 gennaio 1882 il polo si trovò quasi esattamente al limite dell' emisfero visibile; e il giorno

[1] Per le epoche dei solstizi e degli equinozi mi riferisco costantemente a quelle assegnate dal signor Marth, e riportate §§. 438 e 579.

17 gennaio era occultato nell' emisfero invisibile alla distanza 1° 4 dal detto limite (§. 438). Invece nelle settimane che precedettero il periodo critico 14-18 dicembre 1883 il polo boreale era in piena vista, distante dal limite suddetto non meno di 18 gradi (§. 579). Ciò malgrado la neve si vedeva male; e non è troppo ardito supporre che sarebbe stata invisibile del tutto, se si fosse portata ai limiti del terminatore.

683. Un' altra differenza si manifestò fra l' una e l' altra opposizione nello stadio precedente il periodo critico. Nell' opposizione 1881-82 si videro comparire all' orlo boreale e muoversi lentamente lungo il medesimo alcune macchie biancastre, distanti dal polo 20° o 25°, che nella Memoria III furono descritte come appendici o rami della macchia polare allora invisibile (§§. 554-564). Tali appendici non furono vedute nell' epoca corrispondente dell' opposizione 1883-84. La diversità sembra provenire anche qui, come nel caso precedente, dalla diversa inclinazione dell' asse nelle due opposizioni. Ed una spiegazione plausibile di essa si può ottenere, comparando questi fenomeni cogli analoghi che hanno luogo intorno al polo australe.

684. L' apparizione di chiazze biancastre sui limiti estremi del lembo, nella parte di esso più vicina al polo australe, è una cosa ordinaria, descritta molte e molte volte nelle precedenti Memorie. E sappiamo anche, che tali chiazze sono fisse di posizione, e corrispondono ad altrettante isole conosciute, Ellade, Argyre I, Argyre II, Thyle I, Thyle II, Novissima Thyle; le quali quando avviene che dalla rotazione del pianeta e da una più favorevole posizione dell' asse siano portate più dentro il lembo, perdono quel loro color biancastro o bianco, e assumono il color giallo-rosso delle aree continentali Particolarmente istruttive a questo riguardo sono le osservazioni fatte su Argyre I e II (§§. 87, 89, 275, 352, 353, 482, 483). Ora l' analogia ci conduce ed anzi ci obbliga a supporre, che le macchie bianche del lembo settentrionale siano effetti della medesima specie, cagionati dall' aspetto che in date circostanze e sotto grande obliquità della vista prendono certe regioni di natura particolare. Da quanto si conosce della topografia di Marte nelle zone più boreali si può argomentare che tali regioni non siano isole di piccola estensione come quelle australi citate più sopra, e può darsi benissimo che non siano altrettanto ben definite nel loro perimetro; ed anche può essere, sebbene nulla lo provi, che arrivino fino a contatto col nucleo centrale dove sta la neve polare [1].

685. Ammesso questo, cioè che le macchie biancastre, che si mostrano sull' estremo lembo del disco a distanza di 20°, 30° o 40° dai due poli, rappresentino, per l' uno e per l' altro di essi, fenomeni della stessa natura, dovremo concluderne esse origine analoga e proprietà analoghe. Pertanto, siccome quelle circostanti al polo australe hanno il loro maggiore splendore all' ultimo lembo, e lo perdono tanto più, quanto più si avvicinano al centro del disco, lo stesso sembra debba ammettersi di quelle che circondano il polo boreale. Niente dunque dovrà sorprenderci, che esse sian diventate invisibili nell' opposizione 1883-84, quando essendo in vista il polo con un' inclinazione dell' asse di 17° a 18°, doveano passare al meridiano centrale in luoghi distanti di 40° a 50° dal confine dell' emisfero visibile.

[1] L' espressione di *rami della neve polare* da noi data a quelle macchie bianche deve quindi essere accolta con qualche cautela, come del resto già si trova accennato sulla fine del §. 564.

686. Un' altra conseguenza deriverebbe in questo caso dalle cose supposte; ed è, che quelle piazze biancastre, visibili soltanto sotto grandi obliquità, non possano propriamente considerarsi come formazioni di natura identica a quella della neve polare; la quale suol essere più brillante nelle regioni interne del disco, che agli ultimi confini del lembo, siccome per osservazioni fatte nel 1879 si è dimostrato (§. 414). Se adunque fra le accennate macchie e la vera neve del polo ha luogo relazione topografica di vicinanza, non sarà permesso concluderne una dipendenza immediata, nè chiamarle col nome di *rami della neve polare*, come nelle due Memorie antecedenti si è fatto; e tanto meno dire, come nei §§. 439, 554, 565, che dalla concentrazione in piccolo spazio del bianco contenuto in essi rami, sia nata (assai tardi e dopo l' equinozio di primavera) la calotta centrale che occupa il polo. Il bianco dei supposti rami è di natura identica a quello di Argyre e di Thyle e delle altre isole analoghe; esso è così poco permanente, che può essere disfatto ogni giorno al passaggio del sole pel meridiano. Non è dunque probabile che possa dare gran contributo alle masse probabilmente molto voluminose delle nevi polari, che per esser distrutte richieggono l' opera del sole per mesi intieri.

687. Sorge allora la questione: come queste nevi boreali (siano veramente nevi od altro) tardano tanto a costituirsi, da non essere appieno formate che quaranta giorni dopo l' equinozio di primavera, quando il sole batte di nuovo sulle medesime da più settimane? Dobbiamo a tal riguardo ricordare, che al momento dell' equinozio il sole comincia ad illuminare il polo; che se la neve è centrata su questo, ancora per metà deve rimanere nell' ombra, l' altra metà essendo illuminata molto obliquamente. Ciò basta a spiegare almeno in parte la poca lucentezza che essa ha in quel tempo e ancora parecchie settimane dopo. La maggior definizione di contorno e la maggior lucentezza, che appaiono dopo il periodo critico, dipendono probabilmente da ciò, che in tal periodo appunto, secondo le osservazioni concordi di ambe le opposizioni, comincia a formarsi intorno alla macchia quell' orlo oscuro, che poi ne va seguendo costantemente il perimetro a misura ch' essa si va restringendo. Quell' orlo oscuro non solo serve ad incorniciare la macchia, dandole un limite ben definito, ma col suo contrasto la rende più brillante, accrescendo così l' effetto dell' illuminazione solare, che frattanto si è fatta meno obliqua.

688. Questo è il risultato di induzione fondata sulle pure osservazioni, non combinate con alcuna ipotesi arbitraria. Che se come ipotesi sommamente probabile ammettiamo, che la macchia polare sia veramente il risultato del congelarsi d' un liquido qualsiasi, potremo spingere le conclusioni anche un grado più avanti. Infatti il contorno oscuro comincia a mostrarsi intorno alla macchia appunto durante il periodo critico, quando la macchia, raggiunta la sua massima ampiezza, entra nella fase di graduale diminuzione. È naturale supporre, che quel colore oscuro, il quale si sostituisce ad aree bianche, sia il risultato della disposizione di quelle sotto l' azione del Sole, cioè della loro fusione. Tanto più che le spaccature, le quali di quando in quando si manifestano, sono anch' esse del medesimo colore. Noi possiamo dunque immaginare come assai probabile, che il periodo critico sia quello durante cui il Sole comincia a far sentire in misura sensibile i suoi effetti. Una inondazione liquida si forma al contorno della macchia, dove la temperatura è più alta e l' incidenza dei

raggi solari meno obliqua; e presto tanto si allarga da potersi vedere anche da noi. La distruzione è cominciata; ma la macchia appar meglio definita di prima, ed è meglio illuminata, e la cornice oscura concorre a farla sembrare ancora più brillante. — Queste idee, per sè abbastanza plausibili, mi sembrano degne di esser messe a cimento con nuove e più accurate osservazioni.

Sezione III.

Riassunto dei principali risultati ottenuti rispetto alle geminazioni.

689. Durante l'opposizione 1883-84 di nuovo si ebbe campo ad osservare non pochi casi di geminazione. Nella rassegna topografica delle osservazioni (§§. 590-674) si è dato conto di ciascuna delle geminazioni osservate e del grado di certezza con cui furon vedute: e si è anche indicato quando l'aspetto geminato si presentò per la prima volta e quando si cessò di osservarlo. Non sarà inutile raccogliere tutti questi risultati e riassumerne l'insieme per sommi capi, confrontandoli con quanto è stato osservato nell'opposizione 1881-82. Ciò si farà agevolmente considerando la Tabella qui sotto.

Num.	Nome	Prima osservazione	Ultima osservazione	Annotazioni
1	Acheronte	27 Febbraio	4 Marzo	
2	Arnon	21 Febbraio	20 Marzo	
3	Ceraunio	30 Gennaio	14 Marzo	irregolare.
4	Cerbero	18 Gennaio	20 Gennaio	imperfetta, sfumata.
5	Chrysorrhoas	9 Marzo	9 Marzo	sfumatissima.
6	Ciclope	18 Gennaio	2 Aprile	
7	Efesto	14 Gennaio	28 Marzo	
8	Erebo	22 Gennaio	27 Febbraio	
9	Eufrate	10 Gennaio	20 Marzo	intermittente?
10	Eunosto	18 Gennaio	18 Gennaio	imperfetta, parziale.
11	Gigante	25 Gennaio	5 Marzo	sfumata.
12	Ibleo	18 Gennaio	18 Gennaio	imperfetta, sfumata.
13	Idraote	6 Febbraio	15 Marzo	parziale.
14	Iride	4 Marzo	9 Marzo	sfumatissima.
15	Ismenio (lago)	13 Febbraio	20 Marzo	
16	Jamuna	31 Dicembre	6 Febbraio	dubbia.
17	Luna (lago)	30 Gennaio	15 Marzo	direzione variabile?
18	Lestrigone	27 Febbraio	27 Febbraio	
19	Nilo	4 Febbraio	15 Aprile	
20	Oronte	14 Marzo	18 Marzo	
21	Phison	10 Gennaio	20 Marzo	intermittente?
22	Propontide	22 Gennaio	27 Febbraio	
23	Stige	18 Gennaio	18 Gennaio	
24	Thoth	18 Gennaio	1 Aprile	
25	Tifonio	5 Febbraio	19 Febbraio	avvicendata.
26	Trivio di Car.	22 Dicembre	2 Aprile	
27	Uranio	25 Gennaio	30 Gennaio	

690. L' esame di questa Tabella dimostra che il numero delle geminazioni osservate fu questa volta non molto minore che nell' opposizione precedente, durante la quale ne furon notate 31. Assai maggiore però fu il numero di quelle che presentavano qualche anomalia od imperfezione: anzi si potrebbe concludere, esaminando partitamente ciascun caso, che ben poche mostrarono quella perfetta regolarità geometrica, che fu così frequente nel 1882. Qualche parte in ciò han potuto avere le circostanze atmosferiche terrestri, tanto meno favorevoli nel 1884, che nel 1882. La maggior facilità di vederle fu nei mesi di gennaio, febbraio e marzo, cioè nel tempo del maggior diametro apparente del pianeta, e delle migliori osservazioni. Nel 1882 la maggior copia delle loro osservazioni fu pure in gennaio, febbraio e marzo; l' intervallo è quasi esattamente di due anni. Ciò che si vide nel 1884 corrisponde pertanto ad una stagione di Marte più avanzata di circa sei settimane: ed anche questo fatto può aver avuto parte nella diversità dei risultati ottenuti.

691. Tale diversità si manifesta anche in ciò, che le geminazioni osservate non furono tutte identiche nell' una e nell' altra opposizione. Delle 31 geminazioni [1] vedute nel 1882 soltanto diciotto furono osservabili nel 1884, e sono:

Acheronte	Erebo	Idraote	Phison
Ceraunio	Eufrate	Ismenio (lago)	Thoth
Cerbero	Eunosto	Luna (lago)	Tifonio
Ciclope	Gigante	Nilo	
Efesto	Ibleo	Oronte	

a cui si potrebbe aggiungere la Jamuna, se la duplicità di questa nel 1884 non fosse stata sempre registrata come dubbia. — Delle stesse 31 geminazioni del 1882 undici non furono riconosciute nel 1884, cioè:

Anteo	Gange	Orco	Sirenio
Averno	Gehon	Piriflegetonte	Titano
Eumenide	Nilokeras	Protonilo	

in tutti questi casi non essendosi veduta che una linea semplice; si dovrebbe aggiungere qui il serpentino, se la sua posizione troppo obliqua nel 1884 non rendesse incerta ogni comparazione a suo riguardo. — Finalmente in sette casi si potè constatare più o meno bene la geminazione nel 1884, che nel 1882 erano stati considerati come semplici; e sono:

Chrysorrhoas	Lestrigone	Stige	Uranio
Iride	Propontide (lago)	Trivio di Caronte.	

Non si aggiunge qui l'Arnon, perchè di esso non si ebbe dalle osservazioni del 1882 alcuna notizia, e quindi non si può sapere se allora fosse in stato di geminazione o meno. Invece si potrebbe annumerare qui l'Acheronte, del quale soltanto un breve tratto era geminato nel 1882, mentre nel 1884 fu geminato in tutta la sua enorme lunghezza, dal Ceraunio al Titano.

[1] Il catalogo §. 568 non dà che 30 geminazioni; ma una fu omessa allora, cioè il Lago della Luna, su cui le osservazioni del 1879 e del 1882 non lasciano alcun dubbio (§§. 337 e 473).

692. Da queste comparazioni non molto si può concludere circa le norme che reggono la cronologia delle geminazioni. Per ora sta il fatto, che nel 1877 non ne furon vedute, e che nel 1879 una sola fu osservata; che nel 1881-82 dapprima non se ne videro, poi alcune poche, il maggior numero non essendosi manifestato che assai tardi, un mese circa dopo l' opposizione; che nel 1883-84 furon visibili per tutto il tempo in cui il diametro apparente del pianeta lasciava la possibilità di osservarle nelle circostanze atmosferiche per lo più mediocri, che dominarono in quell' epoca. — Vi sono dunque, a quanto pare, epoche in cui le geminazioni o non sono visibili affatto, od in piccol numero: ed altre epoche, in cui esse appaiono in grande quantità. Il passaggio dall' uno all' altro stato di cose non è subitaneo, e sembra durar parecchie settimane; le geminazioni non appaiono tutte insieme, e può anche darsi che in diverse regioni del pianeta il tempo della loro maggior frequenza sia alquanto differente. Però vi è un tempo non lungo, in cui le apparizioni si seguono l' una l' altra con massima frequenza: questa epoca si è potuta constatare nel 1882, e fu 40 o 50 giorni dopo che per l' emisfero boreale di Marte era avvenuto l' equinozio di primavera.

693. Le osservazioni del 1884 hanno suggerito come cosa possibile, che la visibilità delle geminazioni dopo la loro apparizione non sia necessariamente continua per più mesi, ma possa andar soggetta a qualche intermittenza. Abbiamo esposto a suo luogo (§§. 591, 592) come l' Eufrate e il Phison, dopo di aver mostrato addì 10 gennaio 1884 i contrassegni di linee risolubili, benchè non risolute, il 13 febbraio consecutivo apparvero manifestamente semplici, e tornarono ad essere geminati il 20 marzo. L' intermittenza sarebbe qui intieramente assicurata se l' osservazione del 10 gennaio fosse stata più decisiva. Abbiamo qui dunque un indizio d' intermittenza, non una dimostrazione sicura. — Un altro caso parallelo è offerto dal Ciclope (§§. 658-659), il quale addì 18 gennaio mostrò le sue linee I II, quantunque non perfettamente separate, poi fu surrogato dalla linea obliqua *a* fino al 20 febbraio, e di nuovo riapparve con le linee geminate I II dal 21 febbraio in avanti. — Un fenomeno dello stesso genere può darsi sia quello presentato dal Tifonio di un *avvicendamento* nella visibilità delle due componenti, le quali non furon mai osservate tutte e due simultaneamente (§. 603). — Riferisco queste osservazioni e queste conclusioni colla massima riserva, non dissimulando la necessità di vederle confermate da altri fatti analoghi, ma determinati con maggior certezza. Troppo difficile spesso è distinguere, se un dato cambiamento d' aspetto dipenda da vere mutazioni avvenute nell' oggetto osservato, o dalle varie condizioni in cui si fa la visione telescopica d' oggetti così minuti.

694. Credo invece di poter fin d' ora mettere nel numero dei fatti accertati la variabilità delle geminazioni quanto a direzione ed intervallo delle loro linee. L' una e l' altra variabilità furono dimostrate, in modo da non ammetter dubbio, dalle osservazioni dell' Eufrate nelle due opposizioni 1881-82 e 1883-84. Veggasi su questo quanto si è detto §. 593. — Da tal fatto io aveva creduto di poter concludere, che le linee delle geminazioni non siano determinate in modo stabile sul terreno di Marte, e che piuttosto si debbano considerare come fenomeni prodotti nell' atmosfera del pianeta da qualche causa sconosciuta. La conclusione però non è rigorosa. Noi possiamo infatti immaginare che l' Eufrate risulti da un fascio o sistema di parecchie linee non tutte fra loro parallele, delle quali non sian visibili che una sola, o al più due simultaneamente.

È quanto abbiam veduto aver luogo nel Ciclope, dove le linee sembrano essere almeno quattro, I, II, *a'*, *a''*, due a due parallele fra loro, cioè I e II, *a'* ed *a''*. Quando appaiono insieme I ed II, oppure *a'* ed *a''*, si ha una geminazione parallela: quando invece una delle I II appare insieme con una delle *a'* *a''* si ha una geminazione non parallela con intervallo mutato. Veggasi su ciò quanto sta esposto nei §§. 517-518, 658-659.

695. Un' altra osservazione di capitale importanza, di cui già qualche accenno si aveva avuto nel 1882, apparve con maggior evidenza nell' opposizione attuale: parlo delle geminazioni che si formano sull' area dei laghi di Marte, cioè di quelle macchie d' ombra più o meno definita, dove più canali sogliono far capo. Essendo tali laghi di forma rotondeggiante, o almeno di sproporzione non troppo grande nei loro diametri, le geminazioni in essi formate sono per lo più assai tozze, cioè costituite da due strisce molto larghe e molto brevi. Il Lago Ismenio, quello della Luna, il Trivio di Caronte, la Propontide, e sino ad un certo punto anche l' Efesto sono gli esempi fino ad oggi osservati di questo fatto. Quando una delle dimensioni è molto preponderante, come nel caso della Propontide e dell' Efesto, la geminazione ha luogo in modo che le due strisce seguano la direzione della maggior lunghezza. In altri casi si è osservato che la geminazione segue la direzione di uno dei canali che mettono foce nel lago: un esempio notabile di ciò è stato osservato quest' anno nel Trivio di Caronte, che era geminato nella direzione dell' Orco, benchè quest' ultimo sia stato appena qualche volta discernibile, e come linea semplice. — Ma il fatto più bizzarro e più interessante, è questo: che vi sono laghi, la cui geminazione può cangiar di direzione da un tempo all' altro, seguendo prima la direzione di uno dei canali influenti, per quella d' un altro; cosa che sinora due volte è stata verificata, nell' Ismenio cioè, e nel Lago della Luna. L' Ismenio nel 1882 era geminato nella direzione del Protonilo, e nel 1884 invece lo fu nella direzione dell' Eufrate-Arnon, quasi perpendicolare alla prima: su di che veggansi i particolari §§. 454, 600, 601. Quanto al Lago della Luna, la sua geminazione nel 1879 e nel 1882 seguiva quella del Nilo; nel 1884 invece seguì per lo più quella dell' Uranio. Veggansi i particolari di queste osservazioni §§. 473 e 626. — Qualunque sia l' interpretazione, che gli studî avvenire suggeriranno di fatti così singolari, una cosa è certa: che essi gioveranno non poco a conoscere la natura delle geminazioni e la causa misteriosa che le produce.

Meridies

Oriens

Occidens

Septentrio

Thyle I
Thyle II
Phaetontis
Electris
Eridania
Hellas
Argyre
AONIUS SINUS
Chersonesus
Euripus
Ausonia
Noachis
MARE SIRENUM
Atlantis
MARE CIMMERIUM
MARE TYRRHENUM
M. HADRIATICUM
MARE ERYTHRAEUM
Hesperia
Zephyria
Deucalionis Regio
Pyrrhæ Regio
Protei Regio
Thaumasia
SOLIS L.
AURORÆ SINUS
MARGARITIFER SINUS
Xisuthri Regio
SINUS SABÆUS
Syrtis Minor
Libya
SYRTIS MAJOR
Japygia
Hammonis Cornu
Circæum Prom.
Aeolis
Cyclops
Aethiopis
Amenthes
Triton
Isidis Regio
Neith Regio
Arabia
Edom
Eden
Chryse
Ophir
Tithonius Lacus
Tharsis
Lunae L.
Nodus Gordii
Amazonis
Memnonia
L. Phœnicis
Titanum Sinus
Trivium Charontis
Elysium
Phlegra
Erebus
Cebrenia
Utopia
BOREOSYRTIS
NILOSYRTIS
Psebоas Lacus
Ismenius Lacus
Dirce Fons
LACUS NILIACUS
Achillis Pons
SINUS ACIDALIUS
Cydonia
Tempe
Arcadia
PROPONTIS
Baltia
Tanais
MARE BOREUM
Nerigos
Lacus Arsenius
Arethusa L.
Heliconius
Pierius
Callirrhoe
Arnon
Jaxartes
Pyramus
Gorgon
Gigas
Titan
Tartarus
Avernus
Laestrygon
Eumenides
Orcus
Acheron
Hades
Styx
Boreas
Anian
Hyblaeus
Cerberus
Eunostos
Lethes
Thoth
Nepenthes
L. Moeris
Hephaestus
Astapus
Astaboras
Asclepius
Protonilus
Alcyonius
Phison
Euphrates
Hiddekel
Gehon
Orontes
Indus
Hydaspes
Jamuna
Nilokeras
Ganges
Hydraotes
Deuteronilus
Jordanis
Chrysorrhoas
Fortunae
Uranius
Iris
Phasis
Eosphoros
Nectar
Agathodaemon
Ceraunius
Sirenius
Pyriphlegethon
Dardanus
Issedon
Ambrosia
Prom. Aromatum
Edom Prom.

MARS 1883-84.

Stab. Lit. L. Salomone Roma

1884 Marzo 14
ω = 22°

1884 Febbrajo 4
ω = 24°

1884 Marzo 9
ω = 71°

1884 Gennajo 25
ω = 130°

Lit. L. Salomone Roma

V

1883 Dicembre 22
$\omega = 139°$

VI

1884 Febbrajo 27
$\omega = 160°$

VII

1884 Gennajo 18
$\omega = 220°$

VIII

1884 Febbrajo 19
$\omega = 295°$

Lit. L. Salomone Roma

RELAZIONE

dei Socî Taramelli, relatore, e Capellini, presentata al Presidente durante le ferie accademiche del 1896, sulla Memoria del dott. G. De Angelis D'Ossat intitolata: *Contribuzione allo studio della fauna fossile paleozoica delle Alpi Carniche. I. Coralli e Briozoi del Carbonifero.*

« La Memoria che i Commissarî presentano: *Contribuzione allo studio della fauna fossile paleozoica delle Alpi Carniche*, del dott. Gioacchino De Angelis D'Ossat continua la serie delle pubblicazioni; che tendono ad illustrare la serie paleozoica in quel tratto delle Alpi italiane dove essa è più completa e più ricca di fossili, e perciò più suscettibile di sicuri riferimenti. Furono nei Rendiconti del corrente anno stampati dalla nostra Accademia una Nota stratigrafica di uno di noi ed una descrizione dei fossili permiani, della zona a *Bellerophon* raccolti in località recentemente scoperte; potranno seguire alla presente altre monografie, sui fossili devoniani (cefalopodi, coralli e briozoi e pochi brachiopodi) e sui fossili siluriani, degli scisti a graptoliti e dei calcari ad ortoceri. L'argomento è importante e la spettabile Presidenza ha indubbiamente il merito principale, se esso non è rimasto negletto, di fronte a recenti lavori di geologi stranieri su quella stessa località; poichè un sussidio a questo scopo stanziato nello scorso anno rese possibile una escursione dei collaboratori, che stabilirono utili rilievi geologici e raccolsero abbondante materiale di studio.

« La Commissione si compiace di presentare e di raccomandare per l'inserzione nelle Memorie della R. Accademia questo lavoro perchè in esso vengono abilmente studiate e descritte delle specie assai interessanti di raggiati e molluscoidi, di cui la determinazione è sempre assai difficile e tornerà ancor più malagevole nello stato di conservazione di molti dei fossili esaminati. Alcune delle 25 specie determinate sono abbastanza caratteristiche per potersi ritenere fissata alla divisione superiore del carbonifero la zona di scisti, in cui i fossili furono raccolti, appena sotto alla zona di massimo sviluppo del calcare a *Fusulina;* altre sono comuni al carbonifero inferiore ma ne controbilancia il valore cronologico la presenza di forme permiane. I noti profili dei monti Accerniz e Kröne, presso Pontebba, permettono d'altronde di fissare con sufficiente esattezza la posizione stratigrafica della zona scistosa coi fossili qui descritti. Più sicuri caratteri potrebbero essere forniti da fossili più elevati; ma pur troppo questi non si raccolgono che nella parte superiore della serie e furono di già studiati da Parona e da Schellwien. Gli ulteriori studi sui fossili devoniani del piano a *Clymenia*, sottostanti alla zona scistosa con polipi e briozoi carboniferi, preciseranno ancor meglio i rapporti. Il presente lavoro torna assai utile allo sviluppo delle nostre conoscenze sul paleozoico delle Alpi Carniche ».

Contribuzione allo studio della fauna fossile paleozoica delle Alpi Carniche.

Memoria del dott. G. DE ANGELIS D'OSSAT.

I.

Coralli e Briozoi del Carbonifero.

INTRODUZIONE

Il materiale che forma l'oggetto di questo studio fu raccolto nelle Alpi Carniche dai professori Taramelli, Pirona, Parona, Tommasi e da me. Gli esemplari, che ora appartengono al Museo geologico della r. Università di Pavia e del r. Istituto tecnico di Udine, sono stati messi a mia disposizione dalla gentilezza dei rispettivi direttori; prof. Taramelli e prof. Tellini.

Di alcuni risultati di questo studio diedi già breve comunicazione alla Società geologica italiana [1], prima che io stesso mi recassi sul posto. Ora il materiale è stato di molto arricchito, e per forme e per esemplari, con le raccolte che sotto la direzione del prof. Taramelli, facemmo nell' estate 1895 con i professori: Tommasi, Brugnatelli ed O. Marinelli. Intanto il tempo trascorso mi ha permesso di far tesoro di lavori interessantissimi, che ancora non mi era stato possibile consultare.

Durante quelle escursioni si potè raccogliere abbondantissimo materiale di Corallarî e Briozoi del Devoniano a Pecol di Chiaula, al Passo di Volaja e sul Zermula. Anche di alcuni di questi fossili, raccolti dal prof. Taramelli da oltre un ventennio, diedi breve notizia alla Società geologica italiana (loc. cit.). Furono questi avanzi che testimoniarono per la prima volta il Devoniano a nord di Paularo. Ora son ben fortunato di potere annunziare che lo stesso prof. Frech, come mi comunica per lettere, ritiene che appartenga al Devoniano ciò che prima dallo Schellwien [1] e da lui stesso [2]

[1] Boll. Soc. geol. ital., vol. XIV (1895), fasc. 1.

[1] Schellwien E., *Die Fauna des Karnischen Fusilinenkalks*. I, *Palaeontg*. XXXIX. Con carta geologica nel testo.

[2] Frech F., *Die Karnischen Alpen*, Halle, 1894. In questo lavoro, corredato di una splendida carta geologica 1:75000, in tre fogli, e di moltissime figure e sezioni nel testo, vengono riassunti i molteplici e pregevoli studî dell' autore già anteriormente pubblicati intorno alla geologia delle Alpi Carniche.

si riferiva al Siluriano, al Carbonifero ed al Triassico (Schlerndolomit). I Corallari e Briozoi devoniani saranno descritti in un' altra Memoria speciale.

I fossili carboniferi provengono dal M. Pizzúl, dal Bombebasch, dal Vogel B. e dal Nassfeld. La fauna della prima località fu già descritta dal prof. Parona [1]; in essa si trovano citate parecchie specie di Coralli e Briozoi, come avremo occasione di ricordare [2].

Tanto geologicamente, quanto paleontologicamente le località fossilifere sono abbastanza conosciute per i lavori di una eletta schiera di scienziati italiani e stranieri, come: Taramelli [3], C. F, Parona, Tommasi [4], Bozzi [5], Sacco [6], Pirona; Frech, Stache, Geyer, Unger, Hauer, Tietze, Suess e Schellwien [7]. Della regione si hanno tre carte geologiche oltre quella del prof. Taramelli; quella cioè del Hauer [8], dello Schellwien (loc. cit.) e del Frech (loc. cit.) [9]. In queste due ultime non viene riportato il Carbonifero nel bacino del Vogel B., quantunque sia già stato riconosciuto da molto tempo.

Rimando ai lavori citati chi volesse conoscere la natura petrografica, la stratigrafia ed il valore cronologico degli strati che contenevano i fossili studiati; le cui località e la natura del materiale procurerò di designare, più esattamente che mi sarà possibile, nella descrizione delle singole forme.

Poichè i fossili non erano in ottimo stato di conservazione, sono stato costretto a praticare molte sezioni, colle quali sono riuscito il più delle volte a determinare specificamente, alcuna volta però mi sono dovuto contentare di assicurare la sola posizione generica [10].

[1] Parona C. F., *Brevi notizie sulla fauna carbonifera di M. Pizzúl in Carnia.* Boll. Soc. geol. ital., 1889.

[2] Il citato lavoro del Parona, come tutti gli altri di geologi italiani, risguardanti la geologia delle Alpi Carniche, non sono stati tenuti in conto nelle loro interessantissime pubblicazioni nè dal prof. Frech, nè dallo Schellwien.

[3] Taramelli T., *Stratigrafia della serie paleozoica delle Alpi Carniche.* R. Istituto veneto. Venezia, 1874. — *Geologia delle provincie venete.* R. Accad. dei Lincei, Roma, 1882. — *Sulle recenti scoperte di fossili siluriani nella provincia di Udine.* R. Istituto Lombardo, 1891, — *Spiegazione della carta geologica del Friuli,* Pavia, 1881. — *Osservazioni sul paleozoico delle Alpi Carniche.* Boll. Soc. geol. ital., 1895. — *Osservazioni stratigrafiche sui terreni paleozoici nel versante italiano delle Alpi Carniche.* Rend. R. Accad. dei Lincei, 1895.

[4] Tommasi A., *Sulla scoperta del Carbonifero al Monte Pizzúl nell'Alta Carnia.* Boll. Soc. geol. ital., Roma, 1889.

[5] Bozzi L., *La flora carbonifera di Monte Pizzúl (Carnia).* Boll. Soc. geol. ital., Roma, 1890.

[6] Sacco F., *Note di paleoicnologia italiana.* Atti Soc. it. Sc. nat., 1888.

[7] Nella spiegazione della Carta geologica del Friuli, il prof. Taramelli riporta una completa bibliografia risguardante la geologia del Friuli sino al 1881.

[8] Hauer von. *Geologische Karte von Oesterreich-Ungarn.*, Wien 1875.

[9] Del prof. Frech F., esiste un' altra carta geologica delle Alpi Carniche, che si estende da Collina al Pizzo di Timau. *Ueber Bau und Entstehung der Karnischen Alpen.* Zeits. der Deut. geol. Gesell., vol. XXXIX, 1887.

[10] Chi bramasse conoscere le relazioni che corrono fra gli antichi Tabulati ed i viventi Alcionari potrà consultare, con molto vantaggio il lavoro del Sardeson: *Ueber die Beziehungen der fossilen Tabulaten zu den Alcyonarien.* 1896. Ivi inoltre si potrà conoscere la lunga bibliografia intorno a tale interessante argomento.

La scarsa conoscenza di Coralli e Briozoi carboniferi in Italia mi ha obbligato à paragonare gli esemplari in istudio con quelli dei terreni paleozoici extralpini, di cui fortunatamente il Museo geologico della r. Università di Roma possiede una discreta collezione; con la quale mi sono potuto avviare in questo genere di studi.

Molte sono state le opere che ho dovuto consultare, solo qualche lavoro di antica data non ho potuto avere a mia disposizione. Di ciò ne sono grato al ch. prof. A. Portis che gentilmente mi ha permesso l' uso della sua ricchissima biblioteca.

Nel seguente elenco, in ordine cronologico, trovansi raccolte le Memorie, ancora non menzionate, che più frequentemente vengono citate nella discussione delle singole forme.

1840-47. Michelin, *Iconographie Zoophytologie.* Parigi.
1844. Koninck (de), *Description des Animaux foss, de la Belgique.*
1850. D'Orbigny, *Prodrome de Palæontologie stratigraph. univ.* Paris.
1851. Bronn's H. G., *Lethaea geognostica.* Stuttgart.
1851. Milne-Edwards ed Haime, *Monographie des polypiers fossiles des terrains palaeozoïques.* Arch. du Museum Hist. nat. Paris.
1852. Milne-Edwards, *Of the British. fossil. Corals Palaeont. Society.* London.
1853. Pictet, *Traité de Paléontologie.* Paris.
1855. D'Eichwald, *Lethaea rossica au paléont. de la Russie.* Stuttgart.
1855-58. Roemer F., *Beiträge zur Kenntniss des nordwestlichen Harzgebirges. Palaeontogr.* Cassel.
1860. Milne-Edwards, *Histoire naturelle des Coralliaires.* Tom. III. Paris.
1858-61. Fromentel (de), *Introduction à l'étude des Polypiers fossiles.* Paris.
1861-63. Ludwig, *Actinozoen und Bryozoen aus dem Carbon-Kalkstein im Gouvernement Perm. Palaeontog.* Cassel.
1863. Koninck (de), *Descriptions of some Fossils from India.* Quart. Journ. Geol. Soc. Lond., vol. XIX, pag. 5, tav. II, fig. 3.
1866. Seebach, *Die Zoantharia perforata der palaeozoischen Periode.* Zeitschrift der Deutschen geol. Gesell., vol. XVIII.
1865-66. Ludwig R., *Korallen aus paläolithischen Formationen. Paleontg.* XIV, Cassel.
1869. Kunth A., *Beiträge zur Kenntniss fossiler Korallen.* Zeits. der Deuts. geol. Gesell., pag. 183.
1870. Kunth A., *Beiträge zur Kenntniss fossiler Korallen.* Idem., pag. 24.
1870. Kent Saville W., *On an existing Coral closely allied to the Palaeozoic gen. Favosites.* Ann. and Mag. of nat. hist. Zool. Bot. Geol., vol. VI. London.
1872. Koninck (de), *Nouvelles recherches sur les animaux fossiles du terrain Carbonifère de la Belgique.* Mém. Acad. Royale de Sc. let. et art. de Belgique, tom. XXXIX. Bruxelles.
1873. Koninck (de), *Monographie des fossiles carbonifères de Bleiberg en Carinthie.* Bonn.
1875. Toula Franz, *Permo-Carbon-Fossilien von des West Küste von Spitzbergen.* Neues Jahrbuch für Miner. Berlin.
1876. White M. O., *Description of new species of fossiles from palaeoz. rocks.* Accad. nat. sc. proceeding. Philadelphia.
1876. Trautschold H., *Die Kalkbrüche von Mjatschkowa eine monographie des oberen Bergkalks.* Moscau.
1877. Meek F. B., *Palaeontology.* IV-IX. *Carboniferous species. Report of the Geological explor. of the fortieth parallel.* Washington.
1879. Nicholson ed Etheridge Jun., *On the microscopic structure of three species of the genus Cladoconus* M'Coy. The geological Magazine. Decade II, vol. VI. London.
1879. Nicholson, *Descriptions of Palaeozoic Corals from Northern Queensland, with Observations on the genus Stenopora.* The Ann. Mag. of natural History., vol. IV. London.
1879. Nicholson, *On the structure and affinities of the Tabulate Corals.* Edinburg and London.

1883. Roemer F., *Lethaea geognostica.* I Theil. Stuttgart.
1883. Kayser E, *Obercarbonische Fauna v. Lo-Ping* (China). Im Richthofen. Berlin.
1884. Stache G., *Ueber die Silurbildungen der Ostalpen mit Bemerkungen über die Devon-Carbon- und Perm-schichten dieses Gebietes.* Zeitschrift der Deut. geol. Gesell., vol. XXXVI. Berlin.
1885. Stache G., *Fragm. ein Afrikanich. Kohlenkalkfauna aus Gebiete des West-Sahara.* Deuk. k. k. Akad. Wien.
1838. Stuckenberg A., *Anthozoen und Bryozoen des oberen mittelrussischen Kohlenkalks.* Mém. comité géol., vol. V.
1895. Stuckenberg A., *Korallen und Bryozoen der Steinkohlenblagerungen des Ural und des Timan.* Mém. comité géol., vol. X.
1896. Sardeson, *Ueber die Beziehungen der fossilen Tabulaten zu den Alcyonarien.* Neues Jahr. für Min. Berlin.
1896. Lindström G., *Beschreibung einiger Obersilurischen Korallen aus der Insel Gotland.* Der Königl. Academ. der Wissenschaften Vorgelegt den 11. Stockholm.

Le forme di Coralli e Briozoi che fino ad ora ho potuto determinare sono le seguenti: i primi disposti nell' ordine proposto dallo Chapman, professore di Toronto, ed i secondi classificati seguendo le orme dell' ultimo lavoro dello Stuckenberg.

Coralli.

1. *Monilipora macrostoma* Roemer.
2. *Monticulipora tumida* Phill.
3. » *n. sp.*
4. *Syringopora reticulata* Gold.
5. *Zaphrentis Omaliusi* E. H.
6. *Lophophyllum proliferum* M'Chesney.
7. » *tortuosum* Mich.
8. » *breve* Konck.
9. » ? *Dumonti* E. H.
10. *Cyathophyllum* cfr. *Konincki* E. H.
11. *Caninia Koksharowi* Stuck.
12. » *sp.*
13. *Campophyllum compressum* Ludw.
14. *Lithostrotion junceum* Flem.
15. » *irregulare* Phill.
16. *Clisiophyllum Pironai* n. sp.
17. *Aulophyllum fungites* Flem.
18. *Petraja Benediniana* Konck.
19. *Cyathaxonia cornu* Mich.

Briozoi.

20. *Fenestella Veneris* Fisch.
21. » cfr. *plebeja* M'Coy.
22. *Polypora Kolvae* Stuck.
23. » *sp.*
24. *Penniretepora pulcherimma* M'Coy.
25. *Geinitzella crassa* Lonsd.
26. *Archeopora ? nexilis* Konck.

DESCRIZIONE DELLE FORME

ZOANTHARIA — Vacuata.

Gen. **Monilipora** Nicholson, Etheridge jun.

1879. Nicholson et Etheridge jun. *On the microscopic structura of three species of the genus Cladochonus* M' Coy. (*Monilipora* [*Cladochonus*] *crassa*) pag. 293, tav. VII, fig. 2 *a, b. c, d, e, f.*
1883. Roemer, *Lethaea geognostica*, part. I, pag. 525.

Il Nicholson ed il giovane R. Etheridge osservando al microscopio sezioni praticate attraverso individui del gen. *Cladochonus*, riconobbero nel *Cladochonus crassus* M' Coy [= *Jania crassa* M' Coy (1) = *Jeunes Syringopores?* E. H. (2)] una struttura cellulosa già intravveduta dal Rofe (3). Tenendo conto di questo carattere anatomico insieme allo spessore della *theca* ed alla forma generale esterna credettero giustificata la istituzione del nuovo genere *Monilipora.* Descrissero accuratamente l' unica forma che vi ascrivevano e ne riportarono la rappresentazione dell' intero individuo e delle parti anatomiche.

Il Roemer (1883) accetta il nuovo genere e lo descrive (op. e pag. cit.) con le seguenti parole: « *La frequente costituzione del corallario si avvicina di molto al gen. Aulopora; le pareti dei calici sono spesse e risultano di una speciale struttura cellulosa* ». A questa breve diagnosi seguono molte interessanti osservazioni che, per amore della brevità, non trascrivo. Al genere poi ascrive una nuova forma, *M. macrostoma* Roemer; ma senza figurarla.

1. *M. macrostoma* Roemer.

1883. Roemer, *Lethaea geognostica*, pag. 526.
1890. Parona C. F., op. cit. (*Cladochonus Michelini* E. H.).

Riferisco a questa specie un unico esemplare che, quantunque non in ottimo stato di conservazione, pure ci mostra tutti i caratteri che l' autore assegna alla forma. Il polipierite è conico, ma molto allargato verso il calice alla foggia di un cornetto non di troppo curvo. Nella estrema parte del pedicillo non è intero. L' esemplare è stato isolato dall' azione meteorica sino al piano mediano e così è stato tolto dalla roccia. Tuttavia dall' andamento dell' orlo calicinale si può asserire che il calice è

(1) M' Coy, *Synop. Carb. Limestone foss. Ireland.* 1884, pag. 197.

(2) Milne Edwards ed Haime, *Pol. terr. pal.* 1851, pag. 296. — *Mon. Brith. foss. Corals*, 1852, part. III, pag. 164. — *Hist. nat. Cor.* tom. III, pag. 298.

(3) Rofe, *Geol. Mag.* 1869, vol. VI, pag. 352, fig. 2, 3, 4 e 4*a*.

circolare, e se ellittico con gli assi molto vicini in dimensioni. Forte è lo spessore della parete che lascia una stretta cavità nell' interno. La teca è costituita da una struttura cellulosa speciale come si può osservare anche con una semplice lente d' ingrandimento. Il Roemer non potè riscontrare tale particolare anatomico per la silicizzazione dei suoi esemplari. Una figura rilevata con la camera lucida dell'Abbe riuscirà più efficace di qualsiasi descrizione (fig. 1).

Fig. 1. 1:5
Sezione longitudinale mediana.

Fig 3. 1:5
Superficie esterna.

Fig. 2.
Struttura cellulosa interna, fortemente ingrandita.

L' esemplare se non avesse mostrato la teca con tessitura cellulare si sarebbe riportato al gen. *Cladochonus* per tutti i caratteri esterni. Devesi però avvertire che la struttura cellulosa (fig. 2) varia alquanto da quella rappresentata dal Nicholson ed Etheridge. Per le dimensioni però, come egregiamente osserva il prof. Parona C. F., si escluderebbe il riferimento al *Cl. Michelini*, pag. 69: « Anche questo fossile del calcare è mal conservato, e le dimensioni sono un poco maggiori di quelle dei poliporiti del *Cl. Michelini* del calcare carbonifero di Tournai, che si conservano nel Museo paleontologico di Pavia: la forma però ne è identica ».

Per assicurare la mia determinazione non mi sono contentato delle descrizioni e delle figure del genere e della specie sopra citate, ma ho praticate parecchie sezioni in esemplari del *Cl. Michelini* del calcare di Tournai (esempl. del Museo geol. di Roma) che tutte mi hanno rivelato la mancanza della tessitura speciale del gen. *Monilipora*, del forte spessore della teca e della grande cavità interna.

Il Roemer ascrive a carattere della sua specie l' angolo retto formato dall' inserzione dei nuovi pedicilli con il piano del calice. Nel nostro esemplare ciò chiaramente si osserva, scorgendosi un resto di pedicillo sul margine del calice e con direzione normale al piano di questo (fig. 3).

Tralascio i caratteri comuni con la forma tipica del genere, estesamente descritta e riccamente figurata dagli autori, perchè si rilevano di leggieri.

Il Roemer aggiunge che la presente forma generalmente si trova attaccata sopra stili di Crinoidi, ma che questi sono quasi sempre irriconoscibili. La cavità lasciata da un polipierite sopra un crinoide fu trovato dal Roemer che misurava circa mm. 23.

L' esemplare non intero della Carnia misura 16 mm. in lunghezza. Il diametro calicinale è di mm. 6 (Roemer; mm. 5).

Calcare carbonifero nelle vicinanze di Louisville presso Ohio (Roemer).

Loc. Monte Pizzúl (Collezione del Museo geol. di Pavia).

Tabulata

Gen. **Monticulipora** d'Orb.

Sinonimia presso de Koninck, op. cit., pag. 141.

In questo lavoro è riportata l'intricata istoria del genere sino al 1872. Dopo quest'epoca parecchî si occuparono sia della posizione del genere, come delle divisioni da introdursi dentro di esso. Il Dybowski [1] propose la seguente parentela, cioè: *Dianulites* Eichwald, *Solenopora* Dyb., *Callopora* Hall, *Trachypora* E. H., *Stellipora* Hall, *Orbipora* Eichwald, *Monticulipora* d'Orb., *Trachypora* Hall, *Dittopora* Dyb., *Labechia* E. H. Non molto più tardi il Nicholson [2] stabilì le seguenti suddivisioni: *Heterotrypa*, *Diplotrypa*, *Monotrypa*, *Prasopora*, *Peronopora*.

Più vive furono le discussioni intorno alla posizione del genere. Ora si ritiene per migliore quella dimostrata specialmente dal Dybowski e dal Nicholson e già intraveduta dal de Koninck (op. cit., pag. 143).

Ora seguendo le orme dei citati scienziati, più quelle segnate da Lindström [3], si fanno nei trattati paleozoologici parecchie divisioni.

2. *Monticulipora* (*Heterotrypa* Roemer) *tumida* Phill. sp. (*Calamopora*).

La lunga sinonimia di questa forma trovasi nel lavoro cit. del de Koninck (pag. 143). Secondo il Nicholson la specie entra a far parte della divisione *Heterotrypa*. Un piccolissimo cilindretto, trovato al Nassfeld, deve essere certamente riportato alla *M. tumida* per i caratteri specifici che ci presenta. Sul principio, a causa delle diverse forme e dimensioni che può presentarci la specie, non mi decisi per la determinazione, ciò che poi feci con l'osservazione rivolta sopra l'esemplare in confronto delle buone descrizioni e rappresentazioni iconografiche della specie.

Il piccolo esemplare non è ben conservato, tuttavia mostra i caratteri distintivi. Esso consta di un piccolo tronchetto cilindrico, arrotondato alle due estremità. Si osservano i polipieriti dipartirsi obliquamente per venirsi a disporre in quinconce sulla superficie esterna. Ivi si scorgono i calici di dimensioni variabili e di forma non costante, sempre però grossolanamente paragonabile ad una losanga o ad un ovale. L'erosione ha consumato il bordo calicinale, che vediamo conservato in brandelli ed ivi si mostra spessito. I calici dal piccolo diametro, circa $^1/_4$ di mm. Sulla superficie esterna non si scorgono mammelloni, ciò che dimostra lo stato giovanile del corallario.

L'esemplare misura circa 2 mm. di diametro e 6 mm. di lunghezza. Le dimensioni vogliono dir ben poco in questa forma che ce ne presenta delle svariatissime. Ed a seconda dell'età, noi troviamo modificazioni che furono giudicate dai diversi autori come sufficienti per la distinzione specifica. Spetta il merito al de Koninck d'avere riunito molti esemplari, con diverso nome, sotto questa moltiforme specie.

(1) Dyboski Wladislaw, *Die Chaetetiden der ostbaltischen Silur Formation.*

(2) Nicholson A., *On the structure and affinities of the Tabulata Corals of the Polaeozoic Period. On the structure and affinities of the genus Monticulipora ord its subgenere. . .*

(3) Lindström, *Några antickningur om Anthozoa tabulata.* Förhandl. 1873.

Il Milne Edwards ed Haime (*Fossil Corals of Great Britain*, tav. XLV, fig. 3) rappresentarono una sezione longitudinale del *Chaetetes tumidus* con visibili o numerosi tavolati, i quali non furono riscontrati dal de Koninck (loc. cit., pag. 145) nei numerosi esemplari sezionati a tale scopo provenienti dal Carbonifero del Belgio. Ciò però non dimostra la mancanza di simili produzioni endotecali che, come ci insegna il Kunth, è difficile riscontrarle allo stato fossile. Con un solo e cattivo esemplare non cercherò di sciogliere la questione con la distruzione del rappresentante carnico di questa forma [1].

Numerose sono le località di questa specie. Frequente a Tournai, a Feluy, ai Ecausinnes, a Soignies [Ourthe] (de Koninck), Mosca, distretto di Perm (Ludwig), sulle rive del Wol, nel Petschora (de Keyserling), nelle vicinanze de Waltow (Eichwald). In Inghilterra, Irlanda, ecc.

Di frequente si trova nel calcare carbonifero a Crinoidi.

Loc. Nassfeld. (Raccolto dal prof. Taramelli R. Istituto tecnico di Udine.)

3. *Monticulipora* (*Monotrypa*) sp. n.

Moltissimi esemplari provenienti dal Nassfeld erano nella Collezione del R. Istituto Tecnico di Udine determinati come: *Syringopora reticulata* Gold. Coll' esame dei caratteri anatomici facilmente si rileva che non si devono riferire a quel genere, ma al gen. *Monticulipora* ed alla sezione *Monotrypa*. Disgraziatamente il materiale, quantunque abbondante, non permette assolutamente nè una intera descrizione nè una buona rappresentazione iconografica. Il prof. Steinmann cui mandai in comunicazione i migliori esemplari, asserisce, per quanto lo concede il pessimo stato di conservazione, che trattasi di una specie nuova; ma non osa affermarlo. Mi auguro che il rinvenimento di esemplari meglio conservati mi permetta una esatta descrizione di questa nuova forma.

Loc. Nassfeld. (Raccol. prof. Taramelli, R. Istituto tecnico di Udine.)

4. *Syringopora reticulata* Goldf.

Sinonimia, Koninck (de), op. cit., pag. 123.
1826. Goldfuss, *Petref. Germ.*, t. I, pag. 76, tav. XXV, fig. 8.
1852. Milne Edwards ed I. Haime, *Brit. foss. Corals*, pag. 162, tav. XLVI, fig. 1, 1 *a*.
1860. Eichewald, *Lethaea rossica*, t. I, pag. 502, tav. XXV, fig. 10.
1876. Trautschold, *Kalkbr. von Mejatschow*, pag. 101, tav. XII, fig. 1 *a-e*.
1883. Roemer, op. cit., pag. 497, fig. 119 *a*, *b* (Figure riprese dal Nicholson).
1890. Parona, op. cit. (*Syringopora* sp. ind.; *S. reticulata?*).

Nei calcoschisti si trovano molti individui che appartengono al gen. *Syringopora*. Il prof. C. F. Parona riconobbe la somiglianza che lega gli esemplari del M. Pizzúl con la *S. reticulata*, ma non volle assicurarne l' identità a causa della cattiva conservazione degli esemplari. Ciò fu saggio, poichè le specificazioni basate solo sopra i caratteri esterni è oltre ogni credere irta di difficoltà. Infatti il de Koninck ecco

[1] A torto il Trautschold riporta questa forma alla *Ascopora rhombifera* Phil. sp. ciò che non fu poi ritenuto dagli autori posteriori. — *Die Kalkbrüche von Mjatschkowa...* pag. 94, Moscau, 1876. Non posso accertarmi se questa specie debba entrare a far parte del *Rabdomeson rhombiferum* Ph come pare che voglia lo Stuckenberg (1888, op. cit.).

come si esprime: « Les caractères distinctifs des diverses espèces de ce genre ne sont « pas faciles à saisir, et il n'est pas impossible que quelques-uns des échantillons « qui ont été envisagés comme devant constituer des espèces distinctes, ne soient « en réalité que des individus plus ou moins modifiés par l'âge ou par le milieu « dans lequel ils ont vécu. L'écartement plus ou moins considérable qui existe entre « les divers polypiérites d'une colonie, ou entre les tubes qui les relient les uns aux « autres, de même que la conformation plus ou moins rectiligne ou geniculée, ne « suffisent pas toujours pour distinguer les espèces entre elles. Ces caractères sont « trop sujets à varier par les influences externes qui peuvent intervenir, pour être « invoqués avec toute sécurité » (pag. 120).

A ciò aggiungasi come le sezioni trasversali riescono mai somiglianti. Rarissimo poi il caso di trovare la presenza dei setti che constatarono il Milne Edwards e l'Haime negli esemplari ottimamente conservati.

Premesse queste brevi osservazioni passo alla descrizione dei nostri fossili, la cui determinazione rimane assicurata dal confronto delle sezioni citate del Nicholson.

I polipieriti sono disposti raggiatamente. Sembrano abbastanza rettilinei per quel tanto che si vedono sopra i calcoschisti, dove sono spesso spezzati, spostati e compressi. Non mancano tronchetti che si svolgono tortuosamente. Rimane quindi difficile stabilire esattamente le distanze che intercedono fra i singoli polipieriti. Tuttavia la si può ritenere non molto lontana a 2 millimetri, come si può congetturare dai tronchi che paiono ancora nel rapporto naturale. È dato solamente in qualche esemplare poter riconoscere il caratteristico ripiegamento della epiteca. I tubi poi di annessione li ho riscontrati solo nelle sezioni microscopiche, ciò che mi ha impedito di poter osservare la distanza con cui si intercalano. Il diametro dei polipieriti oscilla fra mm. 1-1,5.

Nelle sezioni microscopiche menate perpendicolarmente alla lunghezza dei polipieriti, ho potuto osservare la teca abbastanza spessa e formata da sottilissimi strati sovrapposti. In alcuni individui si osservano qua e là piccoli denticoli, che sono stati sufficienti per togliere questo genere dagli Alcionari, come faceva anche il Ludwig, per i rapporti stretti che trova colle *Tubiporae*. Gli anelli irregolari sono dati dalle sezioni delle tavole, che come tanti imbuti l'uno dentro l'altro, riempiono la cavità interna.

La figura grossolanamente corrisponde abbastanza bene alla fig. 1 *b* citata dal Nicholson e riportata dal Roemer. Non mi è stato possibile potere ottenere una sezione longitudinale tale da poterla paragonare con quella 1 *a* di Nicholson stesso.

Non nascondo però la grande somiglianza della sezione con la fig. 3. (Milne Edwards ed Haime, *Brith. foss. corals.* tav. 46) che rappresenta la *S. ramulosa.* Le dimensioni più che gli altri caratteri, ci persuadono che abbiamo a fare con la presente specie. Mi è riuscito impossibile il trovare quella regolarità di cui parla il Kunth [1], ciò che conferma la mia determinazione, inquantochè quella disposizione è propria della *S. ramulosa*, come disse il Kunth e confermò il de Koninck [2].

(1) *Beiträg. zur Kenntniss fossiler Korallen*, pag. 189-192, tav. II, fig. 7 *a*, 7 *b*.
(2) Op. cit., pag. 120.

Finalmente ho osservato qualche altro polipierite che potrebbe essere riferito ad altra specie di questo genere, ma il loro pessimo stato di conservazione non permette di farlo senza una grandissima esitazione.

Calcare carbonifero di Tournai, di Soignies, di Comblain-au-Pont, nei filoni calaminiferi d' Oneux, nel calcare dolomitico carbonifero di Fond-de-Forêt, (de Koninck). In Francia a Sablè; in Inghilterra a Bristol, a Derbyshire, ed in altre numerosissime località (Milne Edwards ed Haime).

Loc. Monte Pizzúl. (Raccolti dal Taramelli e De Angelis); Vogelbach (Taramelli).

TABULATA-STELLATA. — **Zaphrentidae corniculatae.**

5. *Zaphrentis Omaliusi* E. H.

1851. Milne Edwards ed I. Haime, *Polyp. foss. des terr. paléoz.* pag. 337, tav. V, fig. 3, 3 *a*.
1872. Koninck (de), op. cit., pag. 94, tav. IX, fig. 4, 4 *a*.

Un esemplare che era già stato riferito al *Z. vermicularis* Koninck (de), specie molto vicina alla presente, va ascritto al *Z. Omaliusi* per chiari caratteri specifici.

Non v' ha dubbio che questa sia la vera posizione generica della forma, come comunemente vien ritenuto, giacchè si riconosce di leggieri che non spetta al prossimo genere *Amplexus*, che non ha caratteristiche vere e proprie che lo differenzino dal gen. *Zaphrentis*. La sola stimata buona è riposta nella grandezza dei setti e nel maggiore o minore propendimento di questi verso il centro calicinale. In molti casi però è difficile il decidere del riferimento delle specie fra i due generi. Nulla possiamo dire intorno alle traverse endotecali, giacchè il Kunth ([1]), con la sua indiscutibile autorità, ci assicura che molte volte queste scompaiono a causa della fossilizzazione, essendo esse estremamente sottili.

Nella sezione superiore del nostro fossile si vedono i setti relativamente grandi e nell' inferiore arrivano quasi al centro del calice, ciò che ci assicura della buona sistemazione generica. Inoltre ci conferma il travedere nella superficie esterna del polipierite un' epiteca completa ed una fossetta settale sviluppata.

Il polipierite è di forma conica, ma superiormente si presenta schiacciato dalle pressioni, ciò ci fa credere che il calice doveva essere sufficientemente profondo. È dolcemente ricurvo. La superficie esterna è ricoperta dal materiale includente il fossile, tuttavia è dato scorgere i colletti d' accrescimento che non sono molto rilevati. L' epiteca si riconosce specialmente dalla sezione della parte superiore, dove si mostra piuttosto sottile. Il calice dovrebbe essere circolare, ma a causa dello schiacciamento si mostra allungato; nella sezione inferiore però è pressochè circolare. Di setti se ne enumerano 25; ma in un punto non si possono enumerare senza difficoltà, poichè è spezzato il calice, quindi non riesce difficile l' ammettere l' esistenza di un altro setto. Nella sezione inferiore si vedono i setti divenire sottili e tendere verso il centro, mentre ciò non si osserva nella superficie superiore, perchè passa per la sommità del

([1]) Kunth, *Beiträge zur Ken. Zeit. Deut.* 1869.

calice. Similmente si osserva la caratteristica fossetta settale, piccola, distinta e situata dalla parte della grande curvatura. Fra i setti principali s' intercalano altrettanti secondari, rudimentali e poco apparenti; nella sezione superiore sembrano abbastanza grandi a causa del mostrarsi appena i primarî.

Le dimensioni corrispondono a pieno a quelle che si attribuiscono alla specie, cioè: altezza maggiore mm. 16, non contando le parti mancanti che potevano misurare, a mio avviso, circa un centimetro. Il diametro maggiore del calice mm. 15. La profondità della fossula doveva essere profonda come lo dimostra la compressione, avvenuta specialmente sulla parte superiore.

Si distingue la presente forma dalla vicinissima *Z. vermicularis* specialmente per le dimensioni molto maggiori, per i colletti d' accrescimento non molto salienti, per la grandezza e numero dei setti. Collo studio dell' esemplare si possono rilevare molte particolarità già indicate dal de Koninck (loc. cit., pag. 95-96). Tuttavia l' esemplare presenta caratteri che riunirebbero le due forme in discorso, ciò che non oserei fare dopo le sapienti osservazioni del de Koninck (loc. cit., pag. 96).

Calcare carbonifero delle vicinanze di Tournai.

Loc. Nassfeld. (Raccolto dal prof. Taramelli. R. Università di Pavia.)

Zaphrentidae columniferae.

6. *Lophophyllum proliferum* M. Chesney sp.

1859. Mc' Chesney, *Descript. of new species of foss.*, pag. 75 (*Cyathaxon a*).
1875. White, *Wheeler's rep. expl. west. 100th. merid.*, pag. 101, tav. VI, fig. 4 (var. *sauridens?*).
1877. Miller, *American palaeoz. foss.*, pag. 57.
1883. Roemer F., *Lethaea geognostica*, Vol. I, pag. 369.
1883. Kayser in v. Richthofen, *Obercarbonische Fauna Lo-Ping.*, pag. 196, tav. XXIX, fig. 7-10.
1894. Frech., *Die Karnischen Alpen*, pag. 328.

La forma generale che ci offrono gli esemplari che provengono dal Nassfeld è quella di un cornetto abbastanza ricurvo. Una epiteca completa riveste tutta la superficie esterna. Nelle diverse sezioni ho riscontrato i caratteri della columella, che sono proprî della specie. Similmente dicasi delle dimensioni, del numero dei setti e delle loro relative dimensioni.

Le sezioni che ho praticato attraverso gli esemplari corrispondono esattamente a quelle citate del Kayser, come i caratteri tutti calzano del tutto con le osservazioni che il medesimo autore fa intorno alla specie. Nessun individuo credo che si debba riferire all' incerta varietà del White, *L. proliferum* var.? *sauridens*, perchè non ho veduto nulla che si potesse paragonare alle particolarità che sono riportate nelle figure del Kayser (tav. XXIX, fig. 11-13).

Il ch. prof. Frech, cui ho comunicato gli esemplari, fu quegli che m' indirizzò alla determinazione dei non ben conservati individui; di ciò ne rendo pubbliche testimonianze di gratitudine.

Questa forma è caratteristica nell'America del Nord del Carbonifero superiore. Fu trovata anche in China. Il Frech la cita nel Carbonifero superiore delle Alpi Carniche.

Loc. Nassfeld. (Raccolto dal prof. Taramelli. R. Università Pavia, Roma e R. Ist. Tecn. Udine.)

7. *Lophophyllum tortuosum* Michelin.

1846. Michelin, *Icon. Zooph.*, pag. 258, tav. LIX, fig, 8 (*Cyathaxonia*).
1850. D'Orbigny, *Prodr. de paléont.*, tom. I, pag. 158 (*Cyathaxonia plicata*).
1851. Milne Edwards ed I. Haime, *Polyp. foss. des terr. paléoz.*, pag. 322 (*Cyathaxonia*).
1872. De Koninck, loc. cit., pag. 56, tav. IV, fig. 6, 6*a*.
1883. Roemer, loc. cit., pag. 369.

Un esemplare che porta il nome di *Zaphrentis intermedia* deve essere ascritto alla presente forma. La presenza della columella dimostra chiaramente che il fossile non può annoverarsi fra le specie del gen. *Zaphrentis*, non portando queste detto organo. Riesce difficile il distinguere se l' esemplare deve far parte del genere presente o del gen. *Cyathaxonia* per la grande affinità che corre fra i due generi. Egli è per questo che le specie dei due generi passarono promiscuamente dall' uno all' altro, generando una confusa sinonimia. Secondo il de Koninck il carattere distintivo riposerebbe (loc. cit., pag. 53) nella presenza delle tavole nel gen. *Lophophyllum* e per le altre produzioni endotecali che mancano nel gen. *Cyathaxonia*. Non condivide questa opinione il Kunth (1869, loc. cit., pag. 193-197) il quale propone che siano eseguiti nuovi studî sopra esemplari calcarei ben conservati. Non avendo a mia disposizione che un solo esemplare non mi accingo a tagliare il nodo della delicata questione, ma seguendo il de Koninck lo riferisco al gen. *Lophophyllum*, quantunque non abbia osservato le tavole che del resto non si vedono nè nella figura del Michelin, nè in quella del de Koninck. Le tavole e le altre produzioni endotecali molte volte mancano a causa della fossilizzazione.

Descrivo i caratteri dell' esemplare per giustificare il mio riferimento. Polipierite dalle piccole dimensioni, conico, allungato, curvo ed alla base aguzzo. Esteriormente ricoperto da strie d' accrescimento poco pronunciate e da un epiteca sottile, che fa scorgere le coste ben marcate e regolari. Il calice ellittico doveva essere abbastanza profondo, giacchè ho dovuto logorarne parecchio per vedere il rapporto dei setti con la columella. Questa essendosi mostrata ben presto nella levigatura si può ritenere, senza dubbio, come saliente e dalle varie forme che presentava la si può credere crestiforme. Ora, nella sezione, è circolare con una apofisi in rapporto della maggiore curvatura. La columella non trovasi nel centro, giacchè il calice, essendosi ristretto per affievolita vitalità, ci fa scorgere i setti di diversa lunghezza. Infatti i setti principali che sono situati nella parte maggiormente ristretta sono lunghi mm. 1,5 circa, mentre quelli che si trovano nella parte opposta misuravano circa il doppio: da ciò il calice ellittico e la columella non centrale, caratteri che starebbero a dimostrare l' erroneo riferimento se non si dovessero attribuire a caso patologico. Con la stessa ragione ci spieghiamo la presenza di un setto principale di più di quelli attribuiti alla forma (25), le diverse distanze che corrono fra di loro e il diverso spessore che essi ci mostrano. I setti che sono dalla

parte che non ha subìto restringimento sono grossi, dritti, ugualmente lontani ed arrivano sino alla columella; che anzi uno sembra di compenetrarla; quelli che sono dalla parte opposta, sono sottili, flessuosi e non toccano la columella. Tutti però alternano con altri rudimentali. Laonde, quantunque la sezione passi per un punto patologico, pur non ci cela i caratteri essenziali della specie cui riferisco l' esemplare. Anzi tale irregolarità può essere tolta come carattere di specificazione; invero tanto il Michelin, quanto il de Koninck ci avvertono che la forma è irregolarissima; offrendoci diminuzione di diametro calicinale, come è nel nostro caso. L' unica difficoltà che sta contro la determinazione è la mancata constatazione delle produzioni endotecali. Non faccio la sezione longitudinale dell' unico esemplare anche perchè dette produzioni potrebbero mancare a causa della fossilizzazione.

Quantunque le coste siano visibili per buona parte della superficie esterna, pure non ho potuto scorgere, come toccò la ventura al Kunth, la loro disposizione bilaterale.

Chi poi bramasse riportare la specie al gen. *Cyathaxonia* a causa della columulla può trarre partito dall' esemplare descritto per confermare la propria opinione, non scorgendosi in esso le traverse endotecali.

Ultimamente ho avuto dal compianto prof. Pirona quattro esemplari della presente forma. Le molteplici sezioni mi hanno confermato la presenza di questa specie nella Carnia, quantunque si possano rilevare parecchi caratteri di variazione. Anche questi individui escludono la loro pertinenza al gen. *Zaphrentis*.

A causa delle dimensioni, del numero dei setti si allontana il nostro esemplare dagli individui del *L. leontodon* Kunth.

Calcare carbonifero di Tournai (De Koninck).

Loc. Volgebach presso Pontafel (R. Istituto tecnico di Udine, esemplari raccolti dal professore Taramelli). (R. Università di Roma, raccolti dal prof. Pirona.)

8. *Lophophyllum breve* de Koninck.

1872. De Koninck, op. cit., pag. 57, tav. IV, fig. 7,
1883. Roemer, op. cit., pag. 369.

I caratteri che l' autore ascrive a questa forma sono tutti fedelmente rispecchiati dall' esemplare che ad essa riferisco. La rottura che deturpava l' esemplare nelle due estremità non proibiva di paragonarlo nella sua forma generale ad un cornetto con sensibile curvatura. Per osservare i caratteri anatomici sono stato costretto a levigare l' una e l' altra parte; essi si sono mostrati nelle sezioni così chiaramente da togliere qualsiasi dubbio alla specificazione.

Le coste sono ben visibili, distinte e rilevate, corrono esse quasi dritte lungo il polipierite mostrandosi debolmente nodose e ricoperte da strie sottilissime d' accrescimento. Ciò si può scorgere solo dove l' esemplare è ottimamente conservato. Il calice doveva essere profondo non mostrandosi la columella alla superficie di rottura dell' estremità superiore, solo col procedere della levigatura essa si è mostrata robusta, appuntita, compressa lateralmente ed ornata di strie longitudinali. La columella nella sezione occupa quasi un quinto del maggior diametro. I setti sono 19, subeguali, molto sottili verso l' interno ed appena flessuosi. La fossetta settale è poco più larga

delle logge intersettali adiacenti e rimane divisa in due porzioni uguali per il setto primario che è visibilmente meno apparente degli altri. Ciò si osserva nella sezione menata nella parte inferiore del polipierite. Fra i setti principali si osservano appena i rudimenti di altri setti intercalati ai primi; ma l'estrema loro piccolezza ci fa sorgere il dubbio se questi debbano essere chiamati setti.

Il diametro della sezione è di mm. 6,5. Lunghezza in rapporto della parte esterna della curvatura mm. 7; prima della levigatura mm. 10. Lunghezza della columella nella superficie di levigatura mm. 1,3; larghezza mm. 0,3.

I caratteri che maggiormente giustificano la determinazione sono secondo il De Koninck, il piccolo numero dei setti e la struttura speciale della columella. Tali caratteri chiaramente si riscontrano nel nostro fossile.

Calcare carbonifero d' Etroeung nel Belgio.

Loc. Volgebach (R. Istituto tecnico di Udine; raccolto dal prof. Taramelli).

9. *Lophophyllum? Dumonti* E. H.

1850. Milne Edwards ed Haime, *Polyp. foss. terr. pal.*, pag. 50, tav, III, fig. 3.
1857. Pictet, *Traité de paléont*, tom. IV, pag. 453, tav. CVII, fig. 18.
1860. Milne Edwards, *Hist. nat. des Cor.*, tom. III, pag. 353.
1860. Eichwald, *Lethaea rossica*, tom. I, pag. 527, tav. XXIX, fig. 6 (*L. breviceps?* secondo de Koninck).
1861. Fromentel (de), *Intr. à l'étud.*, pag. 290.
1872. De Koninck, op. cit., pag. 57, tav. IV, fig. 4.

L'esemplare che riferisco a questa specie, a causa della cattiva conservazione e per non essere intero, non permette una determinazione scevra di ogni dubbio. Infatti sulla superficie esterna s'intravedono appena le coste, l'epiteca e gli anelli d'accrescimento. La sua forma generale è conico-allungata, dolcemente curvata nel piano dell'asse maggiore del calice. Il polipierite nella levigatura inferiore si mostra circolare, nella superiore non fa scorgere la piccola columella e l'attacco di questa con il setto primario opposto. L'interno è riempito con i frammenti dell'estremità dei setti. Se non temessi di perdere troppa grande porzione dell'esemplare potrei, seguitando a levigare, fare passare il piano più in basso, tanto da vedere tutte le parti anatomiche. Tuttavia si riscontra chiaramente la posizione caratteristica del setto principale; la fossetta settale che arriva sino al centro del calice. Non si può precisare il numero dei setti ma, dalle fatte proporzioni, si può credere che non oltrepassi il numero conosciuto per la specie. La disposizione dei setti è così ben evidente da indurmi essa quasi esclusivamente alla presente determinazione. I setti vicino alla fossetta settale si vedono incurvare leggermente, come gli altri divengono flessuosi verso il centro del calice. Nella porzione parietale meglio conservata, fra i setti principali se ne scorgono altri rudimentali.

Questa forma a grandissimi caratteri di somiglianza con il *Zaphrentis Bowerbanki* E. H., ciò che rende incerta la posizione generica della forma.

Altezza massima, dopo levigate le due estremità, mm. 22; lunghezza mm. 11

Calcare carbonifero di Tournai. Calcare a *Spirifer mosquensis* presso Mosca.
Loc. Nassfeld (raccolto dal prof. Taramelli. Gabinetto stor. nat. R. Istituto tecnico di Udine).

VESICULO-STELLATA.

Cyathophyllidae corniculatae.

10. *Cyathophyllum* cfr. *Konincki* E. H.

1872. De Koninck, op. cit., pag. 50, tav. IV, fig. 1.

Un frammento di un polipierite credo debba essere riferito a questa rara specie, per i caratteri interni che ci presenta. Quasi nulla si può dire, a causa della piccolezza del frammento, intorno alla sua forma generale. Possiamo tuttavia essere certi che il polipierite era svasato, ricoperto da una sottilissima epiteca che con le sue ondulazioni ci mostra le coste che guarnivano la superficie esterna. Di setti ne ho enumerati circa 14, ciò che corrisponderebbe ai 36 che porta l' individuo intero, tenendo conto della parte mancante che è oltre la metà. I setti si protendono sino verso il centro. Non si osserva però il punto dove, curvandosi gli uni sopra gli altri, si confondono, meno sviluppati sono i setti secondari; tutti sono uniti da numerosissime vescicole che sono più piccole verso la parte esterna che nel centro, dove mancano. Le vescicole sono molto sottili e leggermente flessuose, donde l' aspetto caratteristico della sezione di questa forma (loc. cit. fig. 1).

Il diametro maggiore del frammento che non passa pel centro misura circa mm. 23. Nel calcare carbonifero di Visé è rarissima questa forma.

Loc. Nel calcare di Monte Pizzúl (gabinetto R. Università di Roma, raccolto da De Angelis).

Gen. **Caninia** Michelin 1841.

Il Michelin nel 1841 nel congresso di Torino, non conoscendo il gen. *Zaphrentis* proposto da Rafinesque e Clifford [1], stabilì il gen. *Caninia* [2] dedicandolo a C. Bonaparte, principe di Canino. Nel 1844 il M' Coy riportò il genere fondato dal Michelin a quello dello Scouler [3], *Siphonophyllia*. Il de Koninck [4] incluse il presente genere nel gen. *Zaphrentis* Sow.; ciò che non seguì il d' Orbigny [5] tenendo separati i generi *Amplexus*, *Caninia* e *Siphonophyllia*, definendo le *Caniniæ* come *Cyathophylliæ*, « *avec une partie latérale creusée comme les* C y a t o p s i s ». Finalmente

[1] Rafinesque e Clifford, *Prodr. d'une monog. des Turbinolies foss. du Keutucky*. Ann. gén. des sc. phys. de Bruxelles, t. V, pag. 234, 1820.

[2] Michelin, *Dict. des sc. nat*, *Supplem.*, t. I, pag. 485, 1841.

[3] Scouler in M'Coy, *Syn. of carb. foss. of Ireland*, pag. 187, 1844.

[4] de Koninck, *Recherches* etc. 1872..

[5] D' Orbigny, *Prodrome de paléont.*, t. I, pag. 105 e 158.

il Milne Edwards ed Haime [1] riuniscono tutti i tre citati generi nel gen. *Zaphrentis*, come poi fece anche il de Koninck [2] ed altri.

Ultimamente però lo Stuchenberg [3] ed altri conservano separato il gen. *Caninia* come fu fondato dal Michelin; anzi egli fonda altresì un nuovo genere, cui dà il nome di *Pseudocaninia* Stuck [4].

11. *Caninia* cfr. *Koksharowi* Stuck.

1895. Stuckenberg, *Die Korallen und die Bryozoen*... pag. 197, tav. III, fig. 12; tav. XII, fig. 1 e 4.

Sopra al calcare nero di M. Pizzúl, rese visibili dall' azione meteorica, si scorgono di frequente sezioni che, con difficoltà, permettono una specificazione. Infatti sono parti di polipieriti così mal ridotte, che appena con levigature si può discernere qualche carattere anatomico. Alcune di queste sezioni si potrebbero riportare al genere *Cyathophyllum* per i pochi caratteri che presentano, altre poi più complete debbono essere riferite certamente nel presente genere e con molta probabilità alla *C. Koksharowi* Stuck. tanto sono somiglianti i caratteri che noi riscontriamo con la multiforme specie. Tale avvicinamento mi è riuscito possibile mercè l' esatta descrizione della nuova forma e delle ottime figure, con cui essa viene illustrata dall' autore. Per quanto il cattivo stato dei fossili me lo ha permesso ho potuto riscontrare tutti i caratteri designati per la specie, intesi però con quella larghezza che la variabilità della forma esige. Sono però persuaso, che tali avanzi non debbano in nessun modo far parte dei generi *Zaphrentis* ed *Amplexus*, come di leggieri si potrà rilevare dai caratteri che ora descrivo.

Le dimensioni dei diametri calicinali non sono di quelle più vistose, tuttavia alcuni esemplari presentano un diametro di circa mm. 30. I polipieriti sono generalmente allungati, frequentemente subcilindrici, talvolta molto schiacciati, ciò che si deve attribuire, come giustamente osserva lo Stuckenberg, alla delicata struttura del tessuto delle tavole che riempiono la parte interna dei calici che ha permesso al polipierite di cedere alle pressioni. Nulla si può dire della superficie esterna, ma da quanto si può congetturare da ciò che si osserva, possiamo essere certi che i polipieriti sono talvolta alquanto ricurvi. Anzi in qualche esemplare ho intraveduto eziandio gli irregolari anelli di accrescimento ad una distanza non molto considerevole.

L' ordinamento dei setti sembra fatto in due cicli. Non ho potuto osservare sicuramente il setto principale nella fossula se non in un esemplare, dove si mostra più breve degli altri circostanti del primo ordine, di cui alcuni si prolungono per oltre mm. 10.

In rapporto alle dimensioni dei polipieriti si hanno un numero maggiore o minore di setti. I nostri esemplari che oltrepassano di poco i 20 mm. mostrano di avere circa 60 setti, tenendo conto di quelli che per lo stato di cattiva conservazione noi non riusciamo a riscontrare. I setti vicino al *Hauptseptum* ci presentano una depo-

(1) Milne Edwards ed I. Haime, *Polyp. des terr. palaeoz.*, pag. 164, 1851.
(2) De Koninck, *Recherches* etc.. 1872.
(3) Stuckenberg, *Die Korallen und die Brioz*... pag. 42, 1888.
(4) Stuckenberg, *Anthozoen und Brioz*... pag. 12, 1888.

sizione di *Stereoplasma*, il quale accrescimento è più sviluppato nelle sezioni vicine al calice che in quelle più profonde. In questi setti è visibilissima la *sutura*. Del tessuto endotecale se ne hanno scarsi avanzi, dove però si mostra oscuramente si riconosce di struttura abbastanza vicina a quella descritta e figurata dallo Stuckenberg. Nella zona del tessuto endotecale manca l' accrescimento delle lamelle. In una sola sezione ho osservato le tavole che occupano la parte centrale, esse sono sottili, divise e paiono inclinate e molto vicine fra di loro; ve ne ha più di una per ogni millimetro. Le sezioni di polipieriti alcune volte si osservano tanto vicine fra di loro che ci fanno comprendere che alcune volte la moltiplicazione avvenga per gemmazione calicinale, come ha riscontrato l' autore della specie in molti esemplari.

Ciò che più di ogni altro mi ha convinto di questo riferimento è la grandissima somiglianza che corre fra queste sezioni e quelle figurate dallo Stuckenberg, sia per il caratteristico aspetto delle sezioni a causa dell' accrescimento di alcuni setti, sia per la sottigliezza degli altri; come per lo schiacciamento dei polipieriti e per la rottura dei setti nell' interno dell' individuo che alcune volte viene a simulare una falsa columella.

Gli esemplari quasi tutti furono raccolti dal prof. Taramelli ed alcuni da me al Monte Pizzúl, ed ora parte appartengono al Gabinetto di Storia naturale dell'Istituto tecnico di Udine, dove portavano le specificazioni seguenti: *Zaphrentis* cfr. *patula* Mich. e *Amplexus* cfr. *coralloides* Sow. Io non ho riscontrato nelle diverse sezioni nessuna che si dovesse attribuire a queste forme: credo però che il prof. Parona, cui debbonsi attribuire le determinazioni (Boll. Soc. geol. ital. vol. IX, pag. 69), l' avrà riconosciute in altri esemplari.

Lo Stuckenberg ha raccolto gli esemplari tipici nel livello inferiore e superiore del sistema Carbonifero sul versante occidentale dei monti Urali.

Loc. Monte Pizzúl. (Raccolti Taramelli, de Angelis. Gabinetto Storia naturale di Udine, Museo Geol. di Pavia, Museo Geol. di Roma.)

12. *Caninia* sp.

Un frammento di un esemplare, in pessimo stato di conservazione, per i caratteri che presenta deve essere ascritto al presente genere. Col paragone che ne ho istituito con tutte le altre forme del genere, mi sono convinto che debba appartenere ad una nuova forma, non oso stabilire una specie nuova sopra un solo frammento, quantunque mi abbia permesso di riconoscere molti caratteri anatomici in una sezione orizzontale, passante pel calice ed una obliqua che ha tagliato le tavole che ne riempiono l' interno. Tutte quasi le parti anatomiche ravvicinano strettamente il nostro esemplare alla *C. Antipowi* Stuck. (op. cit., 1895, pag. 201, tav. XVIII, fig. 7; tav. XIX, fig. 1). Infatti, la forma del polipierite doveva essere conica, coi margini superiormente alquanto risvolti all' infuori. Il calice sembra molto profondo e sufficientemente largo. Il numero dei setti non si può precisare, ma sono certamente numerosi. La fossula è stretta vicino alla parete esterna, formata dai setti vicini che si fondono, lasciando lo spazio interno occupato solo dal setto principale (*Hauptseptum*). Le dimensioni del nostro esemplare sono maggiori di quelle che lo Stuckenberg trovò nei piccoli esemplari;

difatti il diametro calicinale misura circa mm. 25. Verso il centro i setti si ripiegano allontanandosi dalla parete esterna per circa mm. 8; essi però sono sempre piuttosto spessi vicino alla fossetta, mentre paiono divenire sottili nelle regioni più lontane da questa. Fra i principali se ne osservano solo in qualche parte alcuni secondarî sottilissimi. Nella sezione orizzontale non si riconosce la produzione endoticale, solo qualche traversa che riunisce due setti vicini: nella sezione obliqua però si riconoscono benissimo le sottili traverse fra due o tre setti, vicine fra loro (lungo un mm. ben 4), esse si allontanano dalla parete esterna per circa mm. 2. Ben visibili sono le *suturae* che attraversano i setti. La mancanza delle traverse nelle altre parti si deve attribuire alla fossilizzazione. Le tavole nell' interno dell' individuo sono sottilissime, vicinissime, ramificate, numerose, ed inclinate. È questo il precipuo carattere differenziale che corre fra il nostro esemplare e la *C. Antipowi*; a meno che negli esemplari dello Stuckenberg non siano rimasti che i più robusti.

L' esemplare offre somiglianze anche con la *C. colossea* Ludwig (*Heliophyllum. Zur Palaeont. des Urals*, pag. 194, tav. XXIII, fig. 1 *a-d*; tav. XII, fig. 3) [1] dalla quale però si allontana per la brevità dei setti, per il minor sviluppo delle produzioni endotecali, per la configurazione della fossula. Per le stesse ragioni si distacca dalla *C. uswae* Stuck. (op. cit., 1895, pag. 201, tav. XIX, fig. 3), cui somiglia grandemente per la struttura delle tavole (fig. 3 d). Anche con la *C. Ruprecti* Stuck. (op. cit., 1895, pag. 200, tav. XVI, fig. 9; tav. XVII, fig. 5) ha grandi somiglianze, ma deve essere separata per la minor lunghezza dei setti e della fossula.

Sono persuaso che il nostro esemplare appartiene ad una nuova specie vicina alle *C. Antipowi*, *C. colossea*, *C. uswae* e *C. Ruprecti*.

Loc. Calcare M. Pizzúl. (Rac. Taramelli. Museo Univ. Pavia.)

13. *Campophyllum compressum* Ludwig.

1866. Ludwig, op. cit., pag. 202, tav. LVII, fig. 1*a-c* (*Taeniolopas*).
1869. Kunth, op. cit., pag. 198, tav. III, fig. 3*a*, 3*b*.

Ho durato molta fatica per riportare a questa specie un polipierite quasi intero ed altri frammentari, tutti dalla stessa costituzione anatomica. Erano stati riferiti parte al gen. *Zaphrentis patula* Konk. (de), ma erroneamente a causa dei caratteri che descriverò, parte al gen. *Cyathophyllum* sp. per mancanza di osservazione diretta; infatti i setti non si avvicinano molto al centro del calice, per la disposizione delle traverse e per la parete di tessuto cellulare esterno.

Il riferimento che ne faccio non è però scevro di dubbî, che anzi essi sono parecchî, ben fondati e di non tenue importanza. Tuttavia credo che questa specie sia la più affine, e ad essa riferisco il fossile non volendo istituire nuove forme con un materiale così mal conservato. Benchè non integro il calice, pure non si mostra ellittico come gli esemplari figurati nelle sezioni del Ludwig (1*b*, 1*c*) e del Kunth (3*a*). Chi è versato in questo genere di studi, facilmente comprende di quale valore debbasi riguardare tale carattere. Infatti nelle stesse sezioni citate si trovano dei rapporti abbastanza diversi fra gli assi.

Il polipierite è conico irregolarmente, con la parte inferiore alquanto risvolta in

[1] Stuckenberg, op. cit., 1895, pag. 201, tav. XI, fig. 3; XIX, fig. 4.

un piano diverso da quello della curvatura generale. L' epiteca sembra sottile ed ornata da strie sottili che corrono parallelamente all' orlo calicinale. Sopra l' epiteca si mostrano rilievi d' accrescimento, abbastanza spessi ed irregolari. In complesso la forma esterna somiglia di molto alle fig. 2, 2*a* (Kon. de, op. cit., tav. VIII) dello stesso *Z. patula* Kon. de. I setti sottili, internamente flessuosi, non raggiungono il centro, lasciando uno spazio vuoto quasi circolare che misura un terzo del diametro della sezione superiore. I setti quasi uguali sono in numero di 25 in una metà di sezione. Internamente all' epiteca si riscontra uno strato di tessuto vescicoloso con cavità a vario diametro, ma non maggiori di quelle che il Kunth attribuisce alla specie. In alcune direzioni se ne contano sino a 9, comprese quelle più piccole; è questo un carattere molto relativo. Dopo questo strato si distinguono chiaramente i setti e direi che da qui essi prendono origine.

Fra due setti contigui di tanto in tanto si osservano traverse che vanno diminuendo e di frequenza e di spessore coll' avvicinarsi al centro. Nella sezione superiore per la cattiva conservazione non si distinguono molte cose, ma alcuni caratteri si possono osservare in una sezione obliqua laterale. Infatti, si scorge il tessuto laterale rassomigliante a quello figurato dal Kunth (fig. 3*b*), i tavolati che solo incertamente si potevano osservare superiormente. Nella sezione inferiore riscontriamo una figura che risponde abbastanza bene all' analoga del Ludwig (1*c*). La parete periferica e la forma della cavità interna non corrisponde a quelle della specie completamente. I setti, in numero di 40, portano traverse e mostrano nell' interno le tavole e tutte le altre particolarità disegnate nella fig. cit. Le varie differenze, compresa quella del numero dei setti, si debbono attribuire al fatto, che nel nostro fossile la sezione è molto più vicina all' apice inferiore.

L' esemplare ha la lunghezza di mm. 45; maggior diametro del calice 35 mm.

Per le questioni che s' agitano intorno alla posizione generica ed alla struttura anatomica rimando, per amore di brevità, al citato lavoro dal Kunth. Del resto la posizione generica rimane stabilita dall' accurata osservazione delle figure delle specie congeneri, come quelle del *C. flexuosum* Goldfus. (Milne Edwards ed I. Haime, *Polyp. foss. des terr. paléoz.* pag. 395, tav. VIII, fig. 4, 4*a*) e del *C. Murchisoni* E. H. (Milne Edwards ed Haime, *Brith. foss. Corals*, pag. 184, tav. XXXVI, fig. 2, 2*a*, 3).

Calcare carbonifero a Hausdorf (Ludwig).

Loc. Rio Bombasch presso Pontafel. (Raccolto dal prof. Taramelli) Pontebba (Museo Geol. r. Università di Pavia.)

Lonsdaleidae aggregatae.

14. *Lithostrotion junceum* Flem.

1852. Milne Edwards ed Haime, *Brit. foss. Corals*, pag. 197, tav. XL, fig. 1, 1*a*, 1*b*.
1869. Kunth, *Zeitsch. der Deuts. geolog. Gesells.*, pag. 206, tav. II, fig. 8.
1872. Koninck (de), op. cit., pag. 29, tav. III, fig. 1, 1*a*.
1883. Roemer, op. cit., pag. 379, tav. XXXIX, fig. 6*a-b*.

Nel lavoro del de Koninck è riportata la lunga sinonimia.

Un frammentino di polipierite lungo mm. 8, dal diametro di mm. 2, lo riferisco alla presente forma per i seguenti caratteri specifici: Il polipierite è piccolo, allun-

gato, grossolanamente cilindrico, sembra rivestito di grossa epiteca con i caratteristici prolungamenti laterali che servono a riunire gli individui fra di loro come avviene nel gen. *Syringopora*, dal quale si allontana il gen. *Lithostrotion* per l'evidente presenza dei setti. L' erosione ha arrotondato i piccoli prolungamenti dei quali nella nostra superficie cilindrica se ne osservano distintamente quattro. La stessa erosione ad una estremità ci fa scorgere abbastanza chiaramente gli elementi anatomici interni. Probabilmente tale superficie non è quella dell' estremità calicinale, ma una superficie di rottura sopra cui l' erosione ha messo in evidenza i setti e la columella. Quantunque i setti non si osservino in tutta la superficie, tuttavia si può assicurare che non sono in numero minori di 6 e non più di 18. Sono questi i limiti che assegna alla specie il de Koninck. I setti principali si vedono prolungare sino alla columella, portando lateralmente altri setti secondari. Per assicurarmi ho praticato una sezione dalla parte opposta a quella preparata naturalmente, ma disgraziatamente non mi ha rivelato che la columella, la cui forma è abbastanza corrispondente alla figura 1*a* del Milne Edwards ed Haime, specialmente riguardo alla compressione. Nulla posso dire delle tavole.

Ultimamente ho riferito alla stessa specie due altri tronchetti cilindrici, provenienti dalla stessa località, perchè presentano abbastanza visibilmente i caratteri specifici.

Questa forma è molto vicina a *L. harmodites* E. H. del Carbonifero dell' America settentrionale a Castelnau (*Pol. foss. des terr. palaeoz.* pag. 440, tav. XV, fig. 1, 1*a*); ma se ne differenzia per le dimensioni. Non voglio però nascondere un carattere che ravvicina le due forme, i prolungamenti cioè dell' epiteca che ben sviluppati riuniscono i diversi individui.

Nel calcare carbonifero; Inghilterra (Kendel, Bristol, Lowick), in Scozia (Rutherglen, Burdiehouse), in Irlanda (Derryloran, Corkstown), in Belgio (Visé), in Russia (Karowa, Kaluga, Kaminsk), in Germania (Hausdorf e Rothwaltersdorf).

Loc. Nassfeld. (Raccolto dal prof. Taramelli. R. Istituto tecnico Udine.)

15. *Lithostrotion irregulare* Phil.

1852. Milne Edwards ed Haime, *Brit. foss. Corals*, pag. 198, tav. XL, fig. 1*a-e*.
1869. Kunth, op. cit., pag. 206, tav. II, fig. 9.
1872. de Koninck, op. cit., pag. 30, tav. I, fig. 5, 5*a*; tav. II, fig. 1 (Sinonimia).
1883. Roemer, op. cit., pag. 380.

Riporto a questa specie, con qualche esitazione, un esemplare per avermi mostrato i seguenti caratteri: Polipierite allungato, subcilindrico a causa della profonda erosione subita e pel materiale includente tuttora attaccato all' esemplare. In una estremità ci offre un diametro massimo di mm. 4,5. In una sezione sottile, in trasparenza, la columella si presenta come un punto bianco, mentre che nelle superficie estreme levigate compare nera. Evidentemente il polipierite è ripieno di un materiale calcareo più chiaro che facilmente si depose nella cavità interna, dove mancano l' estremità delle lamelle nella parte interna della serie di traverse vescicolari. Sono in dubbio se di queste ve ne abbiano due. L' erosione ha esportato la teca lasciando

in alcune parti dei fori disposti con un certo ordine; i quali, tenuto conto della mancanza della parte interna delle lamelle, fanno sorgere l' idea di un avanzo appartenente a Briozoi; ma la sezione microscopica ha rivelato i setti principali e qualche altro secondario. Tutti però non sono disposti punto regolarmente e se ne possono annoverare 24, fra' quali paiono intercalarsi altrettanti secondarî.

Il pessimo stato di conservazione non facendoci rilevare altri caratteri e mostrandoci oscuramente quelli enunciati non ci permette di assicurare la determinazione assolutamente.

In Inghilterra (Castleton, Corwen, Oswestry, Mil. Ed. ed H.); Bristol, Ashfell (Phil.); in Scozia nel bacino carbonifero di Dalry; in Irlanda a Martidesert, Desertcreat. Mosca (Eichwald). Visé; Nomur, M. Rutot.

Loc. Vogelbach presso Pontafel. (Museo R. Istituto tecnico di Udine.)

16. *Clisiophyllum Pironai* n. sp.

Polipierite conico-allungato, ricurvo specialmente verso l' apice che è molto acuminato, con dolcissime ondulazioni sulla superficie esterna. Coste ben visibili, piuttosto piane, corrono regolarmente lungo la superficie con visibili e locali tortuosità. L' epiteca sembra completa, ma non spessa. La parte superiore del polipierite mostrandosi schiacciata ci fa argomentare la fossula piuttosto profonda. Il calice, come si congettura dalla sezione, doveva essere rotondo, ma un poco allungato nel piano di curvatura. Il numero dei setti non si può precisare esattamente per la rottura di uno o due setti, ma dalle proporzioni istituite possiamo asserire che siano 24 primari, fra i quali intercalati ne scorgiamo i rudimentali che di poco si allontanano dalla parete esterna. I setti primari sembra s' ingrossino verso l' interno dove si protendono in genere rettilineamente, ma taluno flessuosamente sino alla falsa columella. Solo il setto principale si estende sino al centro del calice. La falsa columella, che nella sezione occupa circa un terzo del diametro maggiore, è costituita da sottili lamine radiali, tagliate da altre tangenziali. Veduta in sezione longitudinale ci mostra una disposizione simile a quella che osserviamo figurata dallo Stuckenberg per il *C. squamosum* Ludwig (*Kor. Bryoz.* 1894, tav. V, fig. 2*d*) e per il *C. Krasnopolskyi* Stuck. (op. cit., tav. IV, fig. 7*d*). Si scorge dalla sezione longitudinale che le logge intersettali sono ripiene di abbondanti traverse, e che la columella doveva essere sufficientemente elevata.

Fig. 4. 1:5
Superficie esterna

Mi duole vivamente di non poter dare la sezione trasversale essendomi riuscito a vuoto ogni mezzo tentato, sia con la camera dell'Abbe, sia con la diretta fotografia. Ciò è dipeso dal materiale che riempie le cavità intercettali, che è nero, come lo scheletro dell' individuo. Ho procurato però di essere, più che mi è stato possibile, chiaro nella descrizione.

Lunghezza del polipierite	mm.	32
Diametro maggiore della sezione	»	9
Diametro minore della sezione , ...	»	7,8

Il polipierite non doveva essere di molto giovane come lo dimostra la sua lunghezza. Se avessi nutrito il dubbio che l'individuo era giovane non avrei istituito una nuova forma, perchè già da molto tempo è conosciuta la variabilità dei caratteri anatomici interni ed esterni secondo le diverse età (de Koninck, *Nouv. recher. foss. Belg.*, pag. 42).

Questa specie si differenzia abbastanza bene dalle congeneri per la sotttile epiteca, per le coste ben visibili, per le dimensioni e struttura della falsa columella. Si avvicina al *C. costatum* M'Coy (*Cyathaxonia*) [1], ma se ne distingue per le dimensioni, pel numero dei setti, per la forma generale, per la diversa falsa columella.

Dedico la presente forma alla memoria del prof. Pirona che con amore, studio ed intelletto illustrò la fauna e la flora vivente e fossile del Friuli. Egli raccolse l'unico esemplare di questa forma.

Loc. Vogelbach. (R. Università di Roma; raccolto dal Pirona.)

17. *Aulophyllum fungites* Flem. sp.

1852. Milne Edwards ed I. Haime, *Brith. foss. Corals*, pag 188, tav. XXXVII, fig. 3.
1866. Ludwig, op. cit., pag. 160, tav. XXXVI, fig. 1*a-e*. (*Cyathodactylia undosa Ludw.*); pag. 161, tav. XXXVI, fig. 2*a-d* (*C. stellata Ludw*).
1869. Kunth, op. cit., pag. 201, tav. III, fig. 2*a* 2*b*.
1872. Roemer F., op. cit., pag. 355, fig. nel testo 72, 73*a*, 73*b* (dal Milne Edwards, Haime, dal Kunth).

La sinonimia completa, tratta dalle opere anteriori al 1850, trovasi nel cit. lavoro del Milne Edwards ed Haime.

Lascio le questioni che sorsero per parte di M'Coy contro l'esistenza del genere, perchè furono tutte risolute primieramente dal Milne Edwards ed Haime e poi dal Kunth. Per la qual cosa una parte del gen. *Clisiophyllum* M'Coy entra a far parte del presente genere che è ben distinto dagli altri vicini, come gen. *Acervularia* e *Smithia*, a causa delle traverse meno sviluppate; mentre è allontanato dal gen. *Clisiophyllum* specialmente per la mancanza di una columella. Il M'Coy credette erroneamente di vedere in questa specie una columella, mentre non era altro che la muraglia interna che produceva un rialzo interno a causa dell'abrasione della muraglia esterna.

Riporto alla presente forma un esemplare costituito da tre frammenti, già rozzamente preparati con una lima. Con sei piani di levigatura, menati in direzioni diverse, mentre ho finito di deformare il già malconcio esemplare, ho però rilevato chiaramente la struttura interna più che in qualunque altro esemplare studiato. Mi è riuscito quindi facile, col confronto delle lunghe descrizioni e delle buone figure, determinare la specie senza che rimanesse dubbio di sorta.

Il polipierite presentavasi conico e non allungato, ciò che può dipendere dalla giovanile età dell'individuo. Non si può accertare se era pedicellato o meno, pure tenendo conto del modo con cui era scavezzato, possiamo ritenerlo come pedicellato. Le strie di accrescimento sono visibili, ma non molto rilevate. L'epiteca è ben chiara.

[1] M'Coy. Ann. and. Mag. of. nat. hist., 2ª ser., t. III, pag. 6, 1849. — *Brit. palaeoz. foss.*, pag. 109, tav. III, fig. 2.

La sezione superiore quantunque mancante, pur fa riconoscere il calice subcircolare. Il diametro maggiore approssimativamente è di mm. 45, del minore mm. 40; la misura va da una parte all' altra dell' epiteca. La teca interna dalla sezione superiore non si scorge perchè passante nel vuoto del calice ripieno del materiale calcareo nero in cui spicca nitidamente una bella sezione trasversale di un individuo di *Fusulina cylindrica* Fischer (Roemer, op. cit., tav. XXXIX, fig. 1*a-d*). La teca però si può osservare nelle due sezioni longitudinali dove le due linee che la manifestano si allargano fortemente in modo da non conservarsi rettilinee, ma ripiegate all' esterno. Ciò è conforme alla bella sezione del Kunth (2*b*) riportata dal Roemer (73*b*). Il numero dei raggi setto-costali non si può precisare per la mancanza di una porzione del polipierite, tuttavia di quelli più sviluppati ne ho potuto enumerare oltre 40, numero che non è molto lontano da quello che ci presenta l'esemplare figurato dal Kunth (2*a*). Intercalati ai maggiori se ne vedono altri estremamente rudimentali, allontanandosi per meno di un mm. dalla prima teca ed occupando solo l' area esterna. Le vescicole che sono abbondanti nella parte periferica e pressochè uguali in dimensioni; non mancano pochissime anche nella parte interna, come si scorge da una sezione che taglia la parte inferiore. Ivi ancora si mostra il tessuto vescicoloso che riempie la seconda teca, di struttura molto somigliante a quella figurata dal Kunth; ma col progredire della levigatura, mentre ho potuto meglio vedere i raggi setto-costali, ho obbliterato in parte la parete interna. I caratteri però si trovano sempre con un accurato esame. Similmente ho constatato la disposizione che il Ludwig (fig. 1*a*) schematicamente ha rappresentato. Finalmente nella parte centrale ho riconosciuto la presenza delle tavole che in verità sono meno tortuose di quelle della fig. 2*b* del Kunth, mentre analogo ne è l' andamento e uguale il numero. Al di là della ben distinta teca interna si trova la regione dei raggi setto-costali con poche e rare vescicole, più esternamente la caratteristica struttura delle traverse.

Sono questi caratteri riscontrati che stanno a dimostrare la determinazione, ma anche gli altri esposti nelle classiche pagine del Kunth si possono riconoscere nel nostro esemplare.

Nel calcare carbonifero d' Inghilterra (Derbyshire, Northumberland), in Scozia (Aryshire), in Irlanda (Kildare presso Dublin), in Germania (Hausdorf in Slesia).

Loc. Rio Bombasch. (Raccolto dal prof. Taramelli. R. Istituto tecnico di Udine.) [1].

Integro-stellata.

Gen. **Petraja** Münster; emend. Kunth.

Syn. *Liocyathus, Ptychocyathus, Taeniocyathus* Ludwig, 1866.

1870. Kunth, *Ueber Analoga des Deckels der Zoantharia rugosa bei lebenden Korallen*, pag. 40 [2].

Rimando il lettore, se avesse vaghezza di conoscere la storia del genere, ai la-

[1] Al M. Pizzúl trovammo moltissimi esemplari del gen. *Fusulina* che mostravano sezioni che facevano nascere qualche dubbio sul loro riferimento. Gentilmente il prof. G. Steinmann mi assicura che è la *Fusulina cylindrica* Fischer, di che rendo pubbliche grazie.

[2] Zeit. Deuts. geolog. Gesellsch., Band XXII, Berlin, 1870.

vori del de Koninck [1], del Roemer [2] e del Frech [3]. Il Münster non potè dare la diagnosi del genere a causa del pessimo stato di conservazione degli esemplari da lui studiati; laonde non riuscirà nè discaro, nè superfluo che riporti le caratteristiche del gen. *Petraja*, tolte dai lavori del de Koninck. « Polipierite semplice, sessile, di forma conica o turbinata, più o meno svasata. La camera viscerale si estende da una parte all'altra; sono interamente mancanti tutte le produzioni endotecali. L'epiteca generalmente sottile lascia facilmente scorgere le coste settali esterne. I setti sono costituiti da lamine sottilissime e piccole; si allargano alquanto verso l'estremità embrionale e s'aggruppano fra di loro per un quarto di circolo. Tavole e tessuto vescicolare mancante ».

18. *P. Benedeniana* de Koninck.

1872. Koninck (de), op. cit., pag. 116, tav. XI, fig. 4, 4*a* e 4*b*.
1883. Roemer, op. cit., pag. 412.

Il de Koninck riporta a questa forma il *Ptychocyathus excelsus* Ludwig [4].

Riferisco a questa forma un esemplare non intero per i seguenti caratteri. Il polipierite è di una forma conica, svasata; molto aguzzo nell'estremità per la quale aderiva ad un ostacolo come, con un accurato esame, si può riconoscere da una superficie di contatto. Questo carattere è parzialmente celato dal materiale roccioso che l'erosione meteorica non ha ugualmente spazzato in tutta la superficie. L'apice estremo si scorge traversato da una lamina di materiale più chiaro del polipierite, il quale potrebbe essere considerato come un frammento compreso dell'ostacolo. Una sezione scioglierebbe la questione, ma non posso sacrificare l'unico esemplare che mi è dato studiare.

Le coste sono ben pronunciate, grosse e pianeggianti. In rapporto del piano di curvatura si mostrano evidentemente disposte con ordinamento bilaterale. Da ciò possiamo arguire l'interna disposizione dei setti che non posso in nessun modo vedere. Appunto dove si vengono ad incontrare le coste si possono constatare le fine strie d'accrescimento. Le rughe invece sono visibili lungo la superficie esterna. Il polipierite porta solamente pochi setti che appena si allontanano dalla teca; essi sono sottili e dritti. Il calice quindi si può ragionevolmente arguire profondo. La teca relativamente è sottile. Il nostro esemplare somiglia per la forma generale alla fig. 4 del de Koninck, ma è meno risvolto; mentre è più curvo della fig. 3 del Ludwig.

La descrizione fatta più fedelmente che mi sia stato possibile corrisponde esattamente a quella del de Koninck ricavata dall'esemplare di Tournai. I caratteri però che mi hanno deciso alla presente specificazione sono riposti nella forma generale

(1) Op. cit., pag. 113-116.
(2) Op. cit., pag. 410.
(3) Frech F., *Die Korallenfauna des Oberdevons in Deutschland.* Zeit. Deuts. geolog. Gesell. Band XXXVII, Berlin, 1885.
(4) Ludwig, *Palaeont.* Bd. XIV, pag. 195, tav. XLIX, fig. 3 (escluse le fig. 2*a*-*b*).

del polipierite, dalla estremità aguzza, dalla disposizione bilaterale delle coste, dal calice profondo, dal piccolo numero dei setti, sottili, brevi e dritti.

Questa forma fino ad ora è stata raccolta solamente nel calcare carbonifero di Tournai.

Nel Vogelbach. (Raccolto dal prof. Taramelli. R. Istituto tecnico di Udine.)

19. *Cyathaxonia cornu* Mich.

1842. De Koninck, *Descript. des anim. foss.*, pag. 22, tav. C, fig. 5*e*, 5*f* (altre escluse) *Cyathophyllum mitratum* (p. p.).
1846. Michelin, *Icon. zooph.*, pag. 258, tav. LIX, fig. 9.
1851. Milne Edwards ed I. Haime, *Pol. foss. des terr. paléoz.* pag. 320, tav. I, fig. 3.
1851. Bronn e Roemer, *Lethaea geogn.*, tom. II, pag. 191, tav. V[1], fig. 16 *a*, *b*.
1857. Pictet, *Trat. de paléont.*, tom. IV, pag. 451, tav. CVII, fig. 15.
1866. Ludwig, *Cor. aus palaeolit. form.*, pag. 175, tav. XLVI, fig. 2 *a-g*.
1872. De Koninck, op. cit., pag. 110, tav. XI, fig. 2 *a*, *b*.
1883. Roemer, op. cit., pag. 395, tav. XXXIX, fig. 9 *a*, *b*, *c*.

Ho durato molta fatica prima di riferire pochi frammenti di polipierite a questa specie a causa di un materiale chiaro che pareva avesse riempito una cavità preesistente. Questo carattere mi aveva indotto a considerare gli esemplari come appartenenti al gen. *Amplexus*, anche perchè coi loro caratteri esterni, meno le dimensioni, ricordavano l'*Amplexus ibicinus* Fisch (de Koninck, op. cit., pag. 67, tav. VI, fig. 2, 2*a*) e specialmente l'*A. cornuarietis* Kon. (op. cit., pag. 72, tav. VI, fig. 4, 4*a*).

Praticando una sezione ho scorto un calice guarnito da setti e di un punto bianco nel mezzo, che potevasi attribuire ad una columella. Proseguendo nella consumazione e disegnando le varie forme che veniva a presentare il punto bianco centrale ho potuto osservare che questo aumentava continuamente nelle dimensioni, che i setti divenivano di maggiori lunghezze; tra questi ultimi si osservavano intercalati altri rudimentali. Ciò mi fece subito pensare al gen. *Cyathaxonia* dove oltre agli accennati caratteri troviamo le forme sottili, slanciate, a mo' di cornetto allungato e ricurvo. Oltre a ciò si poteva osservare l'epiteca completa, la fossetta settale situata dalla parte della grande curvatura, la dovuta disposizione dei setti, la columella stiliforme, la mancanza di tavole e di traverse [1].

I polipieriti sono di piccole dimensioni, assai gracili, dalla forma di un cono curvo e molto acuminato all'estremità. Una sottile epiteca riveste la superficie esterna che presenta lievissimi anelli d'accrescimento, mai però prolungamenti spiniformi. Le strie d'accrescimento sono maggiormente visibili nella parte superiore dei polipieriti; tuttavia non rimangono celate le coste, che con attenta osservazione si riconoscono disposte secondo la legge del Kunth. Il calice è circolare, l'unico che ho osservato misura mm. 6, ciò che ci spiega la presenza di qualche setto di più di quelli che vengono attribuiti alla specie (42), cui si assegna un minor diametro. La columella elevata, appena compressa lateralmente, quasi centrale, liscia all'estremità superiore,

[1] Rimando all'op. cit. del de Koninck, pag. 108-110 per la storia, per i rapporti, per le differenze del gen. *Cyathaxonia* ed affini.

si mostra quasi circolare man mano che va inferiormente e cava internamente, come si osserva specialmente nelle sezioni menate dalla parte opposta del calice. Superiormente in una sezione la columella si è presentata stellata, a causa dei setti che l'hanno raggiunta nell'interno mostra una sostanza di colore diverso, ciò che ci fa riconoscere la cavità interna della columella. Le pareti sembrano compatte, ciò che parve anche al de Koninck. L'angusta fossetta settale la si distingue in quasi tutti gl'individui ed in tutte le sezioni porgendoci un valido carattere a corroboramento della determinazione, perchè ci assicura che essa percorre tutta la lunghezza del polipierite. In genere si contano, fra primari e rudimentali, 38 setti; ma non mancano diversità nelle sezioni che sono prossime all'apice da quelle che passano vicine al sommo del calice. La metà si prolungano sino verso la columella, gli altri alternano ed in alcune sezioni si scorgono fusi coi principali non molto lungi dalla teca, per modo che chi li enumera intorno alla columella ne riscontra generalmente 19.

Non ho potuto discernere chiaramente il setto principale o primario del Kunth (*Hauptseptum*). I setti ingrossando verso l'interno non rendono molto profondo il calice. In una sezione longitudinale non ho trovato nè traverse, nè tavole; anzi vi ho scorto caratteri che non contraddicono alla determinazione proposta.

Ho confrontato gli esemplari con quelli di Tournai riscontrando moltissima similitudine e mi sono convinto che non si deve fare con nessuna forma affine alla presente, nè con la *C. cynodon* Rafinisque e Clifford (Milne Edwards ed Haime, *Pol. foss. des terr. paléoz.*, pag. 321, tav. I, fig. 4, 4*a*); nè con la *C. Konincki* E. H. (de Koninck, op. cit., pag. 112, tav. XI, fig. 3). La prima si allontana specialmente per le maggiori dimensioni e per le specie che ne guarniscono l'epiteca specialmente nella parte superiore; la seconda per essere di forma tozza e pel maggior numero di setti.

Calcare carbonifero di Tournai e di Ath; Inghilterra, Derbyshire, Kental nel Westmoreland. In Irlanda nelle vicinanze di Fermanagh.

Loc. Nassfeld. (Coll. Ist. tecn. di Udine, esemplari raccolti dal prof. Taramelli.)

BRYOZOA

20. *Fenestella Veneris* Fisch. sp.

1837. Fischer, *Oryctographie de Moscou*, pag. 165, t. XXXIX, fig. 1 (*Retepora*).
1845. Lonsdale, M. V. K., t. I, pag. 630.
1860. d'Eichwald, *Lethaea rossica*, t. I *a*, pag. 365.
1876. Trautschold H., *Die Kalkbrüche von Mjatschkowa*, pag. 91, tav. X, fig. 12, 13; tav. XI, fig. 1.
1888. Stuckenberg, *Anth. und Bryoz. der oberen Mittelrussischen Kohlenkalks*, pag. 31, tav. III, fig. 39, 40, 41.
1890. Parona, loc. cit., pag. 67.
1894. Stuckenberg, *Korallen und Bryoz. des Steinkohlenablagerungen des Ural.* ecc., pag. 137.

Questa forma è già citata dal prof. Parona (loc. cit.) nei calcoschisti del Monte Pizzúl. L'esemplare che riferisco, senza dubbio, alla specie credo che sia quello stesso che ha determinato il nominato professore. I caratteri specifici si riscontrano perfet-

tamente per essere l' esemplare in parte conservato, in parte eroso sino a far vedere l' interno e la superficie inferiore modellata nella roccia. Tutte le particolarità si riscontranc somiglianti alle figure citate. Nell' esemplare si scorge solo la superficie anteriore (superficie zoeciale) che in alcune parti somiglia molto alla fig. 1, della tav. XI del Trautschold (1876). Un altro esemplare della stessa località, appartenente all' Università di Pavia, mostra solamente la superficie dorsale che ci offre tutti i caratteri che gli autori hanno attribuito a questa specie. In tal modo viene confermata pienamente la determinazione. Se le maglie si mostrassero un pochino più allungate avrei attribuito gli avanzi alla *F. virgosa* d'Eick. (*Leth. rossica*, I, pag. 358, tav. 23, fig. 9 *a*, *b*). Infatti è questo l' unico carattere per cui si possono tenere separate le due forme, che, per alcune particolarità che si rilevano dai nostri esemplari, potrebbonsi senz' altro fondere insieme. Seguito però a tenerle distinte come fa lo Stuckenberg nell' ultimo suo lavoro. Del resto anche questa forma si trova nel Carbonifero superiore. È inutile che ripeta le dimensioni dei nostri esemplari che in tutto corrispondono a quelle che lo Trautschold (loc. cit.) riporta per gli esemplari da lui studiati. Nel Carbonifero di Stretinsk a sud-est di Koungour nei Monti Urali; a Petschora (Eickwald).

Loc. Monte Pizzúl, Calceschisti. (Raccolto dal prof. Taramelli; R. Istituto tecnico di Udine, R. Università di Pavia.)

21. *Fenestella* cfr. *plaebeja* M'Coy.

1843. Portlock, *Rep. on the geol. of the Coumty of Londond Ferman, and Tyrone,* p. 324, tav. XXII, fig. 1; tav. XXII *a*, fig. 4 (*F. flabellata*).
(1844), 1862. M'Coy, *Sinopsis of the Carbon Fossils of Ireland,* pag. 203, tav. XXIX, fig. 3.
1861-63. Ludwig, *Palaeontogr.*, pag. 224, tav. XXXVII, fig. 2 *a*.
1867. Genitz, *Carbonformation und Dyas von Nebraska,* pag. 68, tav. V, fig. 8.
1873. de Koninck, *Monogr. fos. carbonif. de Bleinberg en Carinthie,* pag. 1, tav. I, fig. 3 *a*, *b* (con lunga sinonimia).
1885. Stache, *Fragm. ein afrikanisch. Kohlenkalkfauna,* pag. 40, tav. VII, fig. 28 *a*, *b*, *c*.
1888. Stuckenberg, *Anth. Bryoz.....* pag. 33, tav. III, fig. 48, 49.

Riferisco, con qualche esitazione, a questa forma parecchi esemplari da me raccolti nel calceschisto del Monte Pizzúl. Tutti presentano la superficie inferiore; di alcuni si ha appena una cattiva impressione.

Dove la conservazione è migliore si riconoscono le strie che ornano quasi insensibilmente la superficie inferiore. Dove si ha la sola impressione è difficile riconoscere tale carattere. Le dimensioni dei rami primari rispetto ai secondari, la relativa distanza fra di loro corrispondono abbastanza bene alle descrizioni ed alle figure dei citati autori.

Un primo esame porterebbe al riferimento della *F. virgosa* Eickwald, ma la presenza delle strie e delle irregolarità nella superficie inferiore ci fa riconoscere cattiva tale denominazione, se col de Koninck non vogliamo riunire le due forme.

Questa specie già trovata dal de Koninck nel Bleiberg riunisce ancora una volta cronologicamente i due giacimenti.

Impressioni che potrebbero riportarsi, con molto dubbio, alla stessa specie si riscontrano in due campioni di arenaria del Monte Pizzúl, campioni ricchi di negative, ottimamente conservate, di Entrochi.

Il de Koninck (op. cit.) riferisce i caratteri distintivi dalle altre forme affini come: *F. antiqua* Phil., *F. devonica* Semenow ed altre.

Frequente nei calcari del Carbonifero superiore di Cork, di Dublin, di Glasgow; di Derbyshire e di Yorkshire. Sembra rara nel Bleiberg, come a Visè e negli Urali (de Koninck). Lo Stuckenberg non la trovò poi tanto rara negli Urali. Il Frech la cita nelle Alpi Carniche.

Loc. Monte Pizzúl nei calceschisti. (Museo geol. r. Università di Roma; raccogl. de Angelis.)

22. *Polypora kolvae* Stuck.

1894. Stuckenberg, A., *Kor. und Bryoz. Steinnkohlen...*, pag. 163, tav. XXIII, fig. 4 *a, b, c*.

Non credo di andare molto lungi dal giusto coll' ascrivere a questa specie un avanzo, non molto ben conservato, proveniente dai calceschisti di Monte Pizzúl. L' esemplare raggiunge considerevoli dimensioni, lungo mm. 35, largo mm. 28. È rivolto dalla parte della superficie zoeciale che non è in tutte le parti conservata, scorgendosi appena le traccie ben delineate sopra la roccia. La mancanza della carena, il grande numero degli orifici esclude subito il riferimento al gen. *Fenestella*, come potrebbesi fare ad un sommario esame. Attentamente osservando là dove meglio è conservato ben presto si convince che l' apparenza di carena è prodotta dalla serie allineata degli orifici. La descrizione e le figure che lo Stuckenberg riporta nella citata opera calzano completamente col nostro fossile per quanto lo permetta il cattivo stato di conservazione.

La forma generale e ventagliforme ed un poco ricurva dalla parte della superficie dorsale. I rami principali si dividono abbastanza frequentemente misurando in genere mm. 0,5; maggiori dimensioni si hanno prima delle divisioni. Varia altresì la reciproca loro distanza senza però mai superare un millimetro, tanto che se ne contano 7 od 8 lungo 10 mm. Sottili sono i rami trasversali, circa 0,3 di mm., sempre un pochino obbliqui rispetto ai principali, formando maglie angolose piuttosto allungate di varie lunghezze che oscillano tra i mm. 1-3. In genere sono più lunghe le più giovani sorpassando la lunghezza stabilita. Si scorgono parecchi orifici che sono disposti a scacchiera in 4 e più ordini. La superficie dorsale, congetturando dall' impressione lasciata nella roccia, doveva essere liscia.

Fu trovata e descritta per la prima volta nel calcare del Carbonifero superiore dei Monti Urali (Stuckenberg).

Loc. Monte Pizzúl. (Raccolto dal prof. Taramelli. Gabinetto r. Università di Pavia.)

23. *Polypora* sp.

Appartiene certamente a questo genere un esemplare raccolto nel Vogelbach. Lo stato di conservazione è pessimo; solo fa scorgere in qualche punto l' asse cilindrico con gli orifici che sono rilevati, disposti obbliquamente in numero di 3 o 4. Dove l' ero-

sione non è stata completa scorgiamo abbastanza chiaramente l'interna struttura anatomica. I rami primari non sono dello stesso spessore, e sembra che si assottiglino coll'elevarsi; non raggiungono mai mm. 0,5. Le maglie sono disuguali, allungate, non angolose, di diversa lunghezza: in media se ne contano 4 per un centimetro in senso della lunghezza; 5 per centm. 0,5 nel senso della larghezza, per modo che sono lunghe quasi il doppio della larghezza. La rete non si svolge nè in un piano, nè in superficie regolare. Se le dimensioni non fossero molto diverse, si potrebbe riferire alla *Polypora fastuosa* de Koninck sp. (1) per tutti i caratteri che si riscontrano. Molto meglio però si assomiglia alla *P. thamniscoides* Stuck (*Koral. und Bryoz. der Steinkohlen* ...., pag. 238, tav. XXII, fig. 7, 7 *a*). Se ne allontana anche da questa forma per le dimensioni specialmente per quelle che riguardano il diametro degli assi principali in rapporto con il diametro trasverso delle maglie e per non presentarci appariscente le ondulazioni dalla superficie esterna.

Loc. Vogelbach. (Raccolto dal prof. Taramelli. Museo r. Università di Pavia.)

Penniretepora d'Orbigny 1860.

24. *Penniretepora pulcherrima* M'Coy.

1844. (1862) M'Coy, *Synopsis carbon. foss. of Ireland*, pag. 199, tav. CXXVIII, fig. 4. (*Glauconoma*).
1860. Eichwald, *Lethaea Rossica*. Anc. per V, p. I^a, pag. 385, tav. XXIV, fig, 2, *a-b* (*Acanthocladia clavata*).
1888. Stuckenkberg, *Anthoz. und Bryoz. des oberen Mittelrus, Kohlenkalks;* pag. 37, tav. IV, fig. 16-17.
1895. idem. idem. pag. 171.

L'esemplare che riporto a questa specie trovasi isolato dall'erosione meteorica sopra una piccola lastra del calceschisto di Monte Pizzúl. I caratteri che presenta quasi indubbiamente lo fanno riferire alla presente forma, quantunque il briozoario non sia ottimamente conservato e ci presenti il lato non zoecifero. I piccoli rami si dipartono dall'asse centrale facendo un angolo abbastanza acuto da non poter ritenere che s'abbia a fare con la *P. grandis* dello stesso autore. I rami sono piuttosto lunghi: questi però si osservano soltanto che da un lato essendo quelli dell'altra parte immersi ancora nella roccia. La caratteristica e sottile striatura si distingue ottimamente dalla parte dorsale. Le caratteristiche tutte citate dal Eickwald e dallo Stuckenberg sono facilmente riscontrabili, come il perfetto raccordo con tutte le figure citate, sia per le dimensioni, come per i caratteri anatomici.

Sopra le superfici della roccia erose dall'azione meteorica si scorgono moltissimi frammenti di residui fossili, alcuni dei quali si potrebbero riportare a questo genere,

(1) De Koninck, *Description des Anim. foss. de la Belgique*, 1844, pag. 7, tav. A, fig. 5 *a, b* (*Gorgonia*). — *Description of some Fossils from India*, pag. 5. tav. I, fig. 4, 4 *a* (Quart. Journ. Geol. Soc. Lond., 1863).

ma il pessimo loro stato di conservazione non permettono neppure una classificazione generica.

Erroneamente questo piccolo esemplare portava in collezione (Istituto Tecnico di Udine) il nome di *Syringopora.*

Calcare carbonifero di Saraninsk (Eickwald.);

Loc. Monte Pizzúl. (Ist. tecn. di Udine.)

Geinitzella Vaagen et Venzel 1887.

25. *Geinitzella crassa* Lonsdale. sp.

1845. Lonsdale in Murch. *Vern. et Keys. Russ. and Ural.* t. I, pag. 632, tav. A, fig. 12 (*Stenopora*)
1846. Keyserling, *Reise in Petschora,* pag. 183 *(Stenopora).*
1851. Milne Edwards ed Haime. *Pol. fos. des terr. pal.,* pag. 273, *(Chaetetes).*
1354. Keyserling, Schrenk, *Reise,* Bd. II, pag. 66, tav. I, fig. 7, 8 (*Stenopora*).
1860. Eickwald, *Laeth. Ros.,* pag. 416 (*Stenopora columnaris*).
1861. Geinitz, *Dyas* (Part.), pag. 113, tav. XXI, fig. 20 (*idem).*
1875. Toula, *Kohlenkalk.* (Part., *Faun. du Barents-Inseln.* pag 583 *(S. columnaris* var. *ramosa).*
1887. Waagen, *Salt-Rang, fos.* etc.; pag. 884, tav. CXIV, fig. 1, 2, 3. (*Geinitzella*).
1888. Stuckenberg, *Anth. und Bryoz. des oberen Mittelrussichen Kohlenkalks* (*Orbipora*), pag. 40, tav. IV, fig. 38-43.
1895. Stuckenberg. id. pag. 120, tav. XXIV, fig. 8 (*Geinitzella*).

Due pessimi esemplari li riferisco a questa specie per la perfetta corrispondenza dei caratteri anatomici che presentano, sia per la subìta erosione, come per le sezioni da me praticatevi, con quelli rappresentati dallo Stuckenberg nel lav. cit. Le dimensioni dei nostri petrefatti sono molto più piccole; essi non addimostrano le ramificazioni e le tuberosità figurate per l' estrema loro brevità. Del resto questi caratteri esterni godono sempre di un valore molto limitato. Perfetta è la similitudine con la figura della sezione longitudinale (fig. 42), e con la trasversale (fig. 43), specialmente con la longitudinale a causa della migliore conservazione del polipajo nelle pareti esterne. Gli esemplari però sono mal conservati perchè il calcare includente è molto sabbioso ed è raro in tale sorta di roccia trovare fossili ben conservati. Gli altri caratteri distintivi si possono abbastanza facilmente riconoscere, ma non sempre chiaramente.

Russia, calcare carbonifero (Stuckenberg).

Calcare di Monte Pizzùl. (De Angelis R. Università di Roma.)

25. *? Archaeopora nexilis* Koninck (de)

1873. Koninck (de) *Foss. carbon., de Bleiberg.* pag. 10, tav. 1, fig. 4, 4 *a* (La spiegazione della tavola è errata).

L' esemplare del Monte Pizzúl presenta tutti i caratteri descritti dal de Koninck per i fossili del Bleiberg e di Glasgow. La piccola colonia è incrostante, formata da

maglie piuttosto ovali, che non differiscono di molto le une dalle altre. Presentano degli orifici ed il contorno interno alquanto irregolare. Le dimensioni, più che altro, allontanano questa forma dalla *A. radians* Eickw. (Lethaea rossica, I A, pag. 408, tav. XXIV, fig. 20 *a*, 20 *b*. Nell' ultima figura non sono rappresentate le crenulature che differenziano ottimamente la specie). La nostra specie ha pure caratteri d' affinità colla *A. acerosa* Eickw. (loc. cit., pag. 409, tav. XXVI, fig. 4 *a*, 4 *b*.); cui si differenzia specialmente per le relative dimensioni.

È tuttora incerta la posizione di questo genere. Infatti lo Zittel (*Traité de Paléontologie*, pag. 626), crede che il genere *Archaeopora* Eickw. debba essere riunito al genere *Ceramopora* Hall; che il Lindström, con giusti argomenti, dimostra essere fondato sopra giovani esemplari di *Monticulipora*. Altri invece avvicinano il gen. *Ceramopora* al gen. *Berenicea* nella fam. delle *Diastoporidae*.

Disgraziatamente la non buona conservazione dell' unico esemplare incrostante sopra una lamina, che non saprei a quale organismo si possa riferire, non mi permette di dire nulla intorno alla dubbia posizione del genere; quantunque si possa, abbastanza sicuramente, riunire il fossile alla presente specie.

Calcare carbonifero superiore di Bleiberg, di Glasgow (de Koninck). È ricordata dal Frech nelle Alpi Carniche.

Loc. Calcari neri di Monte Pizzúl. (Raccolse De Angelis. Museo geologico R. Univ. di Roma.)

CONCLUSIONE

Tutte le forme citate sono state trovate nel Carbonifero europeo, americano, africano ed asiatico, specialmente in quellò extralpino. La maggior parte designano il livello superiore della formazione, di cui parecchie, come si è accennato nelle singole descrizioni, ne sono caratteristiche, cito fra le altre il *Lophophyllum proliferum* M' Chesney. Non mancano specie già rinvenute nella parte inferiore del Carbonifero, come lo dimostrano quelle comuni col celebre giacimento di Tournai. Alcuna infine ha i rappresentanti sino negli strati superiori del Devoniano e negli inferiori del Permiano.

La ben diversa distribuzione delle forme nelle tre località fossilifere carniche non depone in favore di tre piani cronologicamente distinti, perchè le ricerche non furono ugualmente ripetute nelle località e ne è identico il materiale sedimentario, il quale quantunque di formazione isomesica, ed isotopica, pure accenna ad eteropicità.

Degno di essere notato, a tale riguardo, è il fatto che i Briozoi furono quasi esclusivamente trovati al Monte Pizzúl, se facciamo astrazione di un esemplare di *Polypora*, di forma indeterminabile, trovato nel Vogel B., presso Pontafel.

Sono quì appresso riassunte le ubicazioni delle singole specie:

	Alpi Carniche			
	M. Pizzúl	Bombasch Nassfeld	Vogel B.	
Monilipora macrostoma Roemer	+	...	...	Louisville presso Ohio.
Monticulipora tumida Phil. . .	...	+	...	Tournai, Perm, Mosca (Calcare a Crinoidi).
Syringopora reticulata Gold. .	+	...	+	Tournai, Soignies, Fond-deForêt, Bristol, Derbyshire ecc.
Zaphrentis Omaliusi E. H. . .	...	+	...	Tournai.
Lophophyllum proliferum M' Chesney	...	+	...	Carb. sup. America, China, Alpi Carniche.
Lophophyllum tortuosum Mich. .	...	...	+	Tournai.
Lophophyllum breve Konick . .	...	...	+	Etroeung (Belgio).
Lophophyllum Dumonti E. H. .	...	+	...	Mosca. Tournai.
Cyathophyllum Konincki E. H.	+	...	...	Visè (rarissima).
Caninia Kokskarowi Stuck . .	+	...	...	Monti Urali.
Campophyllum compressum Ludw.	...	+	...	Hausdorf (Germ.).
Lithostrotion junceum Flem. .	...	+	...	Kendel, Bristol, Rutherglen, Visè, Karowa, Hausdorf ecc. ecc.
Lithostrotion irregulare Phill. .	...	...	+	Corwen, Oswestry, Bristol, Dabry, Mosca, Visè ecc.
Clisiophyllum Pironai n. sp. .	...	...	+	
Aulophyllum fungites Flem. .	...	+	...	Derbyshire, Northumberland, Aryshire, Hausdorf ecc.
Petraja Benediniana Konick. .	...	...	+	Tournai.
Cyathaxonia cornu Mich. . .	...	+	...	Tournai, Derbyshire, Kendal, Fermanagh.
Fenestella Veneris Fisch. . .	+	...	...	Stretinsk, Monti Urali, Petshora ecc. (Carb. sup.)
Fenestella plebeja M' Coy . . .	+	...	...	Cork, Dublin, Glasgow, Bleiberg, Visè, Urali ecc.
Polypora Kolvae Stuck . . .	+	...	...	Monti Urali (Carbonifero sup.).
Penniretepora pulcherrima M'Coy	+	...	...	Saranisk.
Geinitzella crassa Lonsd. . .	+	...	...	Russia.
Archeopora nexilis Konick . .	+	...	...	Bleiberg, Glasgow.

Nel Monte Pizzúl abbondano le forme di Briozoi, di cui due più delle altre caratteristiche finora del Carbonifero superiore: *Fenestella Veneris*, *Polypora Kolvae;* frequenti poi sono gli individui dei gen. *Caninia* e *Syringopora.*

Al Nassfeld e nel Bombasch quantunque siano stati rinvenuti pochi esemplari, pure è molto interessante la presenza del *Lophophyllum proliferum*, dell'*Aulophyllum fungites*, della *Cyathaxonia cornu* e della *Monticulipora. n. sp.*.

Finalmente nel Vogel B. fu trovata la *Syringopora reticulata* identica alla specie del Monte Pizzúl e con altre forme la nuova *Clisiophyllum Pironai.*

Non va dimenticato il fatto dell' associazione quasi continua della *Fusulina cylindrica* essendosi sopra di essa stabilito un orizzonte cronologico abbastanza costante.

La presente fauna, insieme a quelle già descritte dallo Stache, Unger, C. F. Parona, Tommasi, Schellwien, Taramelli, Frech ecc., nonchè alla flora descritta dal Bozzi ecc., viene a confermare la pertinenza degli strati che conservano i Coralli ed i Briozoi studiati al Carbonifero superiore.

Strettissimi sono i rapporti cronologici della nostra fauna con quella di Bleiberg e Glasgow.

In tal modo rimane dimostrata la pochissima attendibilità della carta geologica dello Schellwien; mentre deve ritenersi per più giusta quella del Frech, quantunque nel bacino del Vogel B. non venga segnalato il Carbonifero. La carta geologica del prof. Taramelli, quantunque in scala più piccola e più antica, pure è finora la più esatta riguardo alle località citate.

RELAZIONE

letta dal Socio E. Beltrami, a nome del Socio L. Cremona, nella seduta del 6 giugno 1896, sulla Memoria del professore G. Ricci, intitolata: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.*

« La Memoria del prof. Ricci *Sui sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* è un molto esteso lavoro, in cui l'Autore istituisce uno studio sistematico degli enti geometrici, che nella geometria differenziale degli iperspazî fanno riscontro ai sistemi ortogonali di linee e di superficie dello spazio ordinario. Egli ottiene così equazioni e formule che rappresentano nel modo più generale gli elementi essenziali della questione. Insieme a parecchie parti nuove, questo lavoro ne contiene altre in cui si riassumono, o si ripigliano in forma più regolare o più completa, ricerche, che l'Autore aveva già esposto in precedenti pubblicazioni inserite negli Atti di quest'Accademia o negli Annali di Matematica. Il metodo analitico, di cui egli si vale, è quello, ch'egli vorrebbe designare col nome di Calcolo differenziale assoluto, e che consta d'un insieme di formole e di risultati sussistenti sempre sotto l'identica forma, qualunque sia il sistema delle variabili indipendenti, di cui si fa uso, e collegati soltanto colla natura dell'elemento lineare d'una varietà assunta come fondamentale. Questi procedimenti furono già esposti dall'Autore in precedenti lavori ed applicati a diverse ricerche, ma essi vengono qui largamente riassunti in una Introduzione, nella quale il lettore trova la spiegazione di tutti i simboli usati e gli enunciati dei teoremi fondamentali invocati ad ogni passo nella Memoria. In questa Introduzione l'Autore dimostra altresì coi proprî metodi, i teoremi contenenti i criteri per riconoscere se una forma quadratica differenziale ad n variabili possa provenire da un'altra ad n o ad $n+1$ variabili, con coefficienti costanti ».

Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.
Memoria del prof. GREGORIO RICCI.

I metodi, di cui mi valgo da qualche tempo, e di cui mi varrò pure nel lavoro, che mi onoro di presentare a codesta illustre Accademia, costituiscono nel loro insieme un calcolo differenziale, le cui formole e risultati valgono sempre sotto la identica forma per qualunque sistema di variabili indipendenti e sono collegati soltanto colla natura dell' elemento lineare di una varietà assunta come fondamentale. Essi sembrano quindi darci quel qualche cosa di più *essenziale, semplice e completo* rispetto alle formole del calcolo differenziale ordinario, che fu intravisto dal Lamé [1] nei parametri differenziali; e che può designarsi col nome di *Calcolo differenziale assoluto.*

Nella Introduzione esporrò sommariamente questi metodi per risparmiare al lettore la pena di cercare altrove il significato delle notazioni e gli enunciati dei teoremi fondamentali, dei quali farò poi uso continuo. Chi desideri maggiori sviluppi potrà trovarli in altri miei lavori e segnatamente in un Riassunto pubblicato nel fascicolo di giugno 1892 del *Bulletin* dei signori Darboux e Tannery; e in una Memoria, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata*, comparsa in una Raccolta edita dall' Università di Padova in occasione dell' VIII Centenario di quella di Bologna.

Sebbene ne siano affatto indipendenti, queste ricerche costituiscono la naturale estensione di altre, che ho esposto in alcuni lavori pubblicati nel Rendiconto del R. Istituto Veneto [2] e che si riferiscono al calcolo differenziale assoluto ed alla teoria delle superficie. In esse ho trovato molto opportuna per lo studio dei sistemi di linee la loro rappresentazione mediante equazioni differenziali ridotte ad una forma, che può dirsi *canonica,* ed il considerare insieme due sistemi ortogonali. Applicherò ora un procedimento affatto analogo allo studio dei sistemi di linee tracciate in una varietà di quante si vogliano dimensioni, i quali possono dirsi *congruenze,* in quanto per ogni punto della varietà passa una ed una sola linea del sistema. Tale procedimento non è nuovo, giacchè qua e là nella Geometria differenziale si incontrano formole e teoremi, che ad esso si possono riferire; ed una Nota pubblicata dal prof. Beltrami fin dal 1872 [3] contiene in gran parte per lo spazio euclideo ed

(1) *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* § XV.

(2) Serie VII, tomi IV, V e VI.

(3) *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie VII, vol. V).

in coordinate cartesiane ortogonali le formole ed i risultati fondamentali, ai quali si giunge nel § I del presente studio per una varietà qualunque ed in coordinate generali. Il vantaggio di questo modo di rappresentare le congruenze di linee dipende da ciò che esso, a differenza dell' altro, che fa uso delle equazioni in termini finiti, contiene ciò, che occorre per la rappresentazione e nulla di più; ed è già messo in evidenza dalle formole dell' illustre geometra citato, eleganti per semplicità e simmetria. Però, come spero sia per risultare a chi vorrà seguirmi nelle ricerche, che sto per esporre, i pregi della rappresentazione, di cui si tratta, sono essenzialmente collegati coi metodi del calcolo differenziale assoluto, il che dà forse ragione del non essere essa stata fin qui più largamente adoperata.

Nella Introduzione si troveranno ancora dimostrati i teoremi, che contengono i criterî per riconoscere se una forma differenziale quadratica positiva ad n variabile, $x_1, x_2, \dots x_n$ può provenire da altra a coefficienti costanti ad n o ad $n+1$ variabili, esprimendo queste opportunamente in funzione della x. Trattandosi di teoremi fondamentali, ho creduto opportuno il presentarne delle nuove dimostrazioni, le quali hanno sulle già note grandi vantaggi di semplicità dovuti ai metodi, di cui qui si fa uso.

Nel § I sono sviluppate le formole generali relative ai sistemi ortogonali di congruenze in una varietà qualunque ad n dimensioni. Esse conducono naturalmente a considerare $\frac{n^2(n-1)}{2}$ invarianti indipendenti dalla varietà fondamentale, in un senso, che verrà precisato, e che permette di darne una interpretazione cinematica riferendosi in vece che alla varietà fondamentale considerata, ad una varietà piana qualunque, in cui essa sia immersa. Se in un sistema ortogonale dato si considerano tre congruenze, e le loro linee si proiettano nello spazio piano a tre dimensioni determinato dalle tangenti ad esse condotte per un punto P qualunque, gli invarianti, di cui si tratta, rappresentano per le diverse terne di congruenze le rotazioni intorno alle direzioni iniziali dei suoi spigoli del triedro formato dalle tangenti a quelle proiezioni per uno spostamento infinitesimo del punto P lungo una qualunque di esse. In particolare gli invarianti con due soli indici distinti rappresentano le flessioni delle linee di due congruenze passanti per uno stesso punto e proiettate sul piano delle loro tangenti in quel punto.

Si stabiliscono poi con grande facilità e sotto forma molto semplice le equazioni delle congruenze geodetiche, e se ne deduce la proprietà geometrica caratteristica consistente in ciò che le loro proiezioni sui piani formati dalle tangenti in uno stesso punto ad una linea della congruenza data ed a quelle di $n-1$ congruenze formanti con essa un sistema ortogonale abbiano nulle le flessioni in quel punto. Viene così naturale la estensione del concetto di curvatura geodetica e la sua rappresentazione mediante un vettore perpendicolare in ogni punto alla linea della congruenza. Con eguale facilità si riconosce che la proprietà caratteristica delle congruenze normali consiste in ciò che quelli tra i triedri sopra indicati, un cui spigolo è tangente alla linea della congruenza, per ispostamenti infinitesimi dei loro vertici lungo uno qualunque degli altri due spigoli subiscano rotazioni, le cui componenti prese sempre secondo l' asse di spostamento siano eguali. Infine, supposto che una data

congruenza sia normale e con essa considerando altre $n-1$ congruenze ortogonali ad essa e fra di loro due a due, per mezzo dei soliti invarianti si esprimono le condizioni di isotermia del sistema di superficie ad essa ortogonale e le formole che, soddisfatte queste, ne dànno i parametri termometrici.

Il § II ha per oggetto lo studio di certi sistemi di congruenze ortogonali, che godono di proprietà speciali rispetto ad una di esse detta fondamentale. Per esempio, se questa è normale e la varietà fondamentale è piana, le altre sono costituite dalle linee di curvatura delle superficie ad essa ortogonali. Gli stessi sistemi mi si erano già presentati nello studio dei sistemi di integrali ortogonali delle equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1.° ordine, ma le considerazioni svolte nel § I mi hanno di più condotto a riconoscere la loro proprietà cinematica caratteristica la quale sta in ciò che quelli tra i triedri più volte ricordati, un cui spigolo è tangente alla linea della congruenza fondamentale, per ispostamenti infinitesimi dei loro vertici lungo l' uno o l' altro degli altri due spigoli subiscano rotazioni, le cui componenti prese sempre secondo l' asse di spostamento, siano eguali e di segni opposti [1]. Si riconosce pure che ogni radice della equazione algebrica di grado $n-1$, che si incontra nella determinazione delle congruenze, di cui si tratta, non è che la flessione della proiezione della linea appartenente ad una di tali congruenze sul piano determinato dalle tangenti ad essa ed alla linea della congruenza fondamentale; mentre le flessioni delle proiezioni di questa sui medesimi piani sono rappresentate da altre incognite, che compaiono nei sistemi di equazioni lineari, che conviene risolvere per stabilire le equazioni differenziali canoniche di dette congruenze.

Nel § IV si deducono dai risultati generali del § III speciali conseguenze per il caso delle varietà a tre dimensioni. Per la esistenza di due sistemi di superficie, che si taglino ad angolo retto lungo le linee di una congruenza data, si ha allora una sola condizione rappresentata da due equazioni, che si equivalgono, ciascuna delle quali contiene una radice di una equazione di 2.° grado. Nel caso che la varietà fondamentale sia piana e che la congruenza fondamentale sia normale, il Weingarten riescì ad eliminare quella irrazionalità; e ciò ho fatto io pure in questo paragrafo, qualunque siano la varietà e la congruenza fondamentali.

Nel § V vengono stabilite le equazioni fondamentali della teoria delle *superficie ad n dimensioni* intese nel senso da me indicato altra volta, cioè delle varietà ad n dimensioni contenute in una varietà euclidea ad $n+1$ dimensioni. Le formole, a cui si giunge, sono la naturale estensione di quelle di Gauss e di Mainardi e Codazzi e scendono direttamente da quelle, che stabilii altrove [2], e che riguardano le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma sia di 1ª classe; delle quali ho data nella Introduzione una nuova dimostrazione diretta. Queste formole assieme ad altre del § 1, le quali provengono pure direttamente dalle formole fondamentali del calcolo diffe-

[1] Si veda la mia Memoria, *Sui sistemi di integrali indipendenti* ecc. nel tomo V della serie 2ª degli Annali di matematica pura ed applicatta.

[2] *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (Annali di matematica pura ed applicata, serie 2ª, tomo XII).

renziale assoluto e sono la naturale generalizzazione di quella ben nota di Liouville per la curvatura totale delle superficie, furono già date dal prof. Cesàro limitatamente al caso, in cui le n congruenze di riferimento risultino dalle intersezioni ad $n-1$ ad $n-1$ di altrettanti sistemi di varietà ad $n-1$ dimensioni: il che suppone che la varietà fondamentale sia dotata di sistemi n^{upli} ortogonali.

INTRODUZIONE

1. Si abbia una forma differenziale quadratica ad n variabili

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_s\, dx_s,$$

il cui discriminante a sia diverso da o, ed alle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ si sostituiscano n nuove variabili indipendenti $y_1, y_2, \dots y_n$. Scrivendo $x_r^{(p)}$ ed $y_r^{(p)}$ rispettivamente in vece di $\frac{\partial x_r}{\partial y_p}$ e di $\frac{\partial y_r}{\partial x_p}$, tra i coefficienti di φ e quelli (a_{pq}) della sua trasformata nelle y hanno luogo le relazioni

$$(a_{pq}) = \sum_{rs} a_{rs}\, x_r^{(p)}\, x_s^{(q)}. \tag{1}$$

Se si indicano rispettivamente con $a^{(rs)}$ ed $(a^{(pq)})$ i coefficienti delle forme reciproche a φ ed alla trasformata valgono pure le formole

$$(a^{(pq)}) = \sum_{rs} a^{(rs)}\, y_p^{(r)}\, y_q^{(s)}.$$

In generale i significati attribuiti ai simboli, dei quali farò uso, pel caso delle variabili indipendenti x, varranno per gli stessi simboli racchiusi tra parentesi nel caso delle variabili y: per esempio (a) rappresenterà il discriminante della forma trasformata, come a rappresenta quello di φ.

Porrò le

$$2\, a_{rs,t} = \frac{da_{rt}}{dx_s} + \frac{da_{st}}{dx_r} - \frac{da_{rs}}{dx_t},$$

che equivalgono alle

$$\frac{da_{rs}}{dx_t} = a_{rt,s} + a_{st,r};$$

e le

$$a_{rt,su} = \frac{da_{rs,t}}{dx_u} - \frac{da_{ru,t}}{dx_s} + \sum_{hk} a^{(hk)} \left(a_{ru,h}\, a_{st,k} - a_{rs,h}\, a_{tu,k}\right).$$

I simboli $a_{rs,t}$ sono notissimi sotto il nome di *simboli di Christoffel*. Sono pure noti i simboli $a_{rs,tu}$, che si incontrano nella *Commentatio mathematica* di Riemann, e

che chiamerò per questa ragione *simboli di Riemann.* Tra questi hanno luogo le relazioni identiche

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{rt,su} = a_{su,rt} \; ; \quad a_{rt,su} + a_{tr,su} = 0 \\ a_{rt,su} + a_{ru,ts} + a_{rs,ut} = 0 \; ; \end{cases}$$

per le quali il numero di quelli indipendenti fra di loro si riduce ad $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Per i simboli di Riemann valgono le formole di trasformazione

$$(3) \qquad (a_{lp,mq}) = \sum\nolimits_{rstu} a_{rs,tu} x_r^{(l)} x_s^{(p)} x_t^{(m)} x_u^{(q)} .$$

In particolare per $n = 2$ i simboli di Riemann essenzialmente distinti si riducono ad uno solo, cioè al simbolo $a_{12,12}$ e, posto

$$(4) \qquad a \,.\, G = a_{12,12} \; ,$$

le (3) si riducono pure ad una sola, la quale ci dice che G è un invariante. Esso verrà qui designato col nome di *invariante di Gauss.*

Per $n = 3$ i simboli di Riemann fra loro indipendenti si riducono a sei; e, se si conviene di riguardare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3 e si pone

$$(5) \qquad a\,\alpha^{(rs)} = a_{r+1\,r+2,s+1\,s+2} \; ,$$

si possono in loro vece considerare i simboli $\alpha^{(rs)}$. Le formole (3) sono allora sostituite dalle

$$(6) \qquad (\alpha^{(pq)}) = \sum\nolimits_{rs} \alpha^{(rs)} y_p^{(r)} y_q^{(s)} .$$

2. Chiamo *sistema m^{uplo}* o *di ordine m* ad n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ l' insieme di tutte le n^m funzioni, distinte o no, di queste variabili, che possono rappresentarsi con uno stesso simbolo ad m indici, ciascuno dei quali può assumere i valori $1, 2 \dots n$; per esempio col simbolo $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$. Per generalizzazione si può riguardare una funzione considerata isolatamente come un sistema di ordine o. Le funzioni, che costituiscono un sistema, si diranno *elementi* del sistema; e questo si dirà *simmetrico* se saranno identici gli elementi corrispondenti ad una stessa combinazione con ripetizione della classe m degli indici $1, 2, \dots n$.

Un sistema può dirsi *invariabile,* se i suoi elementi non variano al variare del sistema delle variabili indipendenti, se non in quanto alle antiche si sostituiscono le loro espressioni per le nuove variabili. Si dirà invece che un sistema è *variabile* se, sostituendosi ad un sistema di variabili x un nuovo sistema di variabili y, non soltanto in ogni elemento del sistema alle x si sostituiscono le loro espressioni per le y; ma sugli elementi stessi si eseguisce una determinata sostituzione. Per definire un sistema variabile è dunque necessario non soltanto darne gli elementi per un determinato sistema di variabili indipendenti; ma stabilire altresì la sostituzione da eseguirsi sugli elementi in dipendenza da ogni sostituzione eseguita sulle variabili. Definito poi in tal modo un sistema, esso dovrà riguardarsi come qualche cosa di assoluto, cioè come dotato di un carattere indipendente dalla scelta delle variabili.

La sostituzione da eseguire sugli elementi di un sistema variabile può riguardarsi come arbitraria, purchè data per ogni cambiamento di variabili indipendenti. Però essa è in generale determinata dal significato analitico, geometrico, fisico ecc. degli elementi del sistema, se tale significato deve rimanere inalterato di fronte a qualunque sostituzione eseguita sulle variabili. Se, per esempio, un sistema semplice è definito come avente per elementi le derivate prime di una funzione U rispetto alle variabili indipendenti, qualunque del resto queste siano, e se alle variabili x si sostituiscono le y, sugli elementi $U_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}$ dovrà in pari tempo eseguirsi la sostituzione

$$(U_p) = \sum_r U_r \, x_r^{(p)} .$$

Del pari, se un sistema è costituito in ogni caso dai coefficienti delle U_r nella forma lineare

$$\sum_r X^{(r)} \, U_r ,$$

sui suoi elementi dovrà eseguirsi la sostituzione

$$(X^{(p)}) = \sum_r X^{(r)} \, y_p^{(r)} .$$

Se, t essendo un parametro qualunque, dal quale le variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ dipendono, si pongono le $\frac{dx_r}{dt} = \lambda^{(r)}$, sulle $\lambda^{(r)}$ dovrà eseguirsi la stessa sostituzione che sulle $X^{(r)}$, cioè la sostituzione

$$(\lambda^{(p)}) = \sum_r \lambda^{(r)} \, y_p^{(r)} .$$

Del pari, se si considerano i sistemi doppî simmetrici, che hanno per elementi i coefficienti della forma differenziale φ e quelli della reciproca, le sostituzioni da eseguirsi sui loro elementi per la sostituzione di nuove variabili y alle x saranno quelle assegnate dalle formole (1) e (2); per il sistema quadruplo costituito dai simboli di Riemann tale sostituzione è invece data dalle (3).

3. I sistemi citati sopra come esempî di sistemi variabili appartengono all'uno od all'altro di due tipi, ai quali limiterò in seguito le mie considerazioni. Il primo tipo è quello dei sistemi *covarianti* rispetto alla forma φ, cioè di quei sistemi di ordine qualunque m, sui cui elementi $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, per la sostituzione delle variabili y alle x, si eseguisce la sostituzione

$$(X_{p_1 p_2 \ldots p_m}) = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_m} X_{r_1 r_2 \ldots r_m} \, x_{r_1}^{(p_1)} \, x_{r_2}^{(p_2)} \ldots x_{r_m}^{(p_m)} . \tag{I}$$

A questo tipo appartengono i sistemi semplici, che risultano delle derivate prime di una funzione, il sistema doppio, che risulta dei coefficienti di una forma differenziale quadratica, ed il sistema di 4.° ordine, che ha per elementi i simboli di Riemann. Per gli elementi dei sistemi covarianti farò sempre uso di simboli cogli indici in basso.

Il secondo tipo è quello dei sistemi *controvarianti* di ordine qualunque m, cioè di quei sistemi, i cui elementi $Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$, per la sostituzione delle variabili y alle x vengono sostituiti dagli elementi

$$(II) \qquad (Y^{(p_1 p_2 \dots p_m)}) = \sum_{r_1 r_2 \dots r_m} Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} y_{p_1}^{(r_1)} y_{p_2}^{(r_2)} \dots y_{p_m}^{(r_m)} .$$

Per esempio sono sistemi controvarianti il sistema semplice, che risulta delle derivate prime delle variabili indipendenti rispetto ad un parametro; quello, che risulta dei coefficienti delle derivate prime di una funzione arbitraria delle variabili indipendenti in una espressione lineare ed omogenea nelle derivate stesse; il sistema doppio, che ha per elementi i coefficienti della forma reciproca ad una forma differenziale quadratica; e, nel caso di $n = 3$, il sistema doppio simmetrico, i cui elementi $\alpha^{(rs)}$ sono definiti dalle (5). I sistemi di ordine o in questa teoria sono propriamente *invarianti*, ma possono essere considerati tanto come covarianti, quanto come controvarianti, perchè la sostituzione identica $(U) = U$ rientra tanto nel tipo (I), quanto nel tipo (II).

Si osservi ancora che:

1.° Se gli elementi di un sistema covariante o controvariante sono identicamente nulli per un sistema di variabili indipendenti, come risulta dalle (I) e dalle (II), lo sono per qualunque sistema. Da ciò dipende anzi in gran parte la importanza dei metodi di calcolo differenziale assoluto, poichè, come si vedrà, per la proprietà accennata, le equazioni stabilite con tali metodi valgono per variabili affatto generali. Si dirà *identicamente nullo* un sistema covariante o controvariante, se lo sono tutti i suoi elementi.

2.° Se gli elementi di un sistema S, covariante o controvariante, per un certo sistema di variabili indipendenti si possono riguardare come ottenuti sommando gli elementi di eguali indici di p sistemi di uno stesso ordine m, S_1, S_2, ... S_p, tutti della stessa natura covariante o controvariante, ciò avviene per un qualunque sistema di variabili. Il sistema S, che è esso pure di ordine m, e rispettivamente covariante o controvariante, si dirà allora *somma* dei p sistemi S_1, S_2, ... S_p.

3.° Se gli elementi di un sistema S per un certo sistema di variabili indipendenti si possono riguardare come ottenuti moltiplicando fra di loro gli elementi generici di p sistemi S_1, S_2, ... S_p di egual natura covariante o controvariante, rispettivamente degli ordini q_1, q_2, ... q_p, la stessa cosa avviene per qualunque sistema di variabili. Il sistema S è esso pure covariante o controvariante e di ordine $q_1 + q_2 + \dots + q_p$, e si dirà *prodotto* dei p sistemi S_1, S_2, ... S_p. In particolare il prodotto di un sistema covariante o controvariante di ordine m per una funzione invariante è un sistema dello stesso ordine e della stessa natura

4.° Se si hanno un sistema covariante di ordine m, $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, ed un sistema controvariante di ordine p, $Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)}$, ed è $m \geq p$, il sistema di ordine $m - p$ e di elementi

$$Z_{r_{p+1} \dots r_m} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_p} Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m}$$

è covariante; in particolare esso è un invariante nel caso di $m=p$. Se invece è $m<p$, il sistema di ordine $p-m$ e di elementi

$$Z^{(r_{m+1}\dots r_p)}=\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} Y^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}\dots r_p)} \; X_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

è controvariante. L'uno o l'altro dei due sistemi di elementi $Z_{r_{p+1}\dots r_m}$, $Z^{(r_{m+1}\dots r_p)}$ si dice *composto* dei due sistemi $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)}$.

4. In seguito i sistemi covarianti o controvarianti, che si avranno a considerare, si riguarderanno come associati ad una forma differenziale quadratica positiva, che si dirà *fondamentale*. Sia questa la forma φ considerata sopra: se un sistema covariante di ordine m, $X_{p_1 p_2 \dots p_m}$, si compone con quello controvariante di ordine $2m$, che si ottiene moltiplicando per sè stesso m sistemi doppi identici tutti a quello costituito dai coefficienti della forma reciproca a φ, si ottiene un sistema controvariante di ordine m

$$\text{(A)} \qquad X^{(q_1 q_2 \dots q_m)}=\sum_{p_1 p_2 \dots p_m} a^{(p_1 q_1)} \, a^{(p_2 q_2)} \dots a^{(p_m q_m)} X_{p_1 p_2 \dots p_m}.$$

Reciprocamente il sistema $X_{p_1 p_2 \dots p_m}$ si può riguardare come composto del sistema $X^{(q_1 q_2 \dots q_m)}$ e del sistema covariante di ordine $2m$ prodotto di m sistemi identici a quello dei coefficienti della forma fondamentale, poichè dalle (A) si traggono le

$$\text{(B)} \qquad X_{p_1 p_2 \dots p_m}=\sum_{q_1 q_2 \dots q_m} a_{p_1 q_1} \, a_{p_2 q_2} \dots a_{p_m q_m} \, X^{(q_1 q_2 \dots q_m)},$$

come da queste si potrebbe ritornare a quelle. Si diranno *reciproci* rispetto alla forma fondamentale φ due sistemi dello stesso ordine m legati fra di loro dalle relazioni (A) o (B) e quindi tali che, se uno di essi è covariante, l'altro è controvariante. Sono reciproci, per esempio, i coefficienti della forma fondamentale e quelli della reciproca. Si ha poi che

« Se di due sistemi reciproci uno è simmetrico, lo è pure l'altro ».

Per convenzione si stabilisce che:

« Una stessa lettera munita di m indici rappresenti un sistema covariante « di ordine m od il suo reciproco controvariante, secondo che gli indici sono collocati « in basso od in alto ».

È facile riconoscere che, dati due sistemi covarianti dello stesso ordine m, $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ ed $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$, l'invariante, che si ottiene componendo il primo col reciproco del secondo è identico a quello, che si ottiene componendo il secondo col reciproco del primo, che cioè si ha

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m}=\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \, Y_{r_1 r_2 \dots r_m},$$

5. « Se un sistema di ordine m e di elementi $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ è covariante, è pure tale « il sistema di ordine $m+1$, i cui elementi $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ si hanno ponendo

$$(\alpha) \qquad X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} = \frac{dX_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{dx_{r_{m+1}}} - \sum_{rs} a^{(rs)} \sum_{1}^{m}{}_h\, a_{r_h r_{m+1}, r}\, X_{r_1 \ldots r_{h-1} s r_{h+1} \ldots r_m} \ (^1).$$

Coll' aiuto della forma fondamentale φ si passa dunque da un sistema covariante di ordine m ad un altro sistema della stessa natura di ordine $m+1$ e ciò mediante le operazioni (α) da eseguirsi contemporaneamente su tutti gli elementi di un sistema ed il cui insieme può riguardarsi come *una operazione da eseguirsi sul sistema proposto*. Questa operazione si dirà *derivazione covariante secondo la forma fondamentale* φ ed il sistema $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ *sistema derivato secondo la forma fondamentale* dal sistema $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$. In particolare se il sistema proposto è di ordine o, cioè risulta di una sola funzione U, il sistema di 1° ordine, che se ne ottiene colla derivazione covariante secondo una forma fondamentale qualunque, ha per elementi le derivate prime della funzione U. Per un sistema di 1° ordine di elementi X_r gli elementi del sistema derivato secondo la forma fondamentale φ sono dati dalle formole

$$(\alpha_1) \qquad X_{rs} = \frac{dX_r}{dx_s} - \sum_p a_{rs,p} X^{(p)}.$$

Si osservi poi che, se la forma φ espressa per le variabili x risulta a coefficienti costanti, gli elementi del sistema derivato da un sistema qualunque mediante la derivazione covariante secondo φ per le variabili stesse coincidono colle derivate degli elementi del sistema primitivo.

« In generale gli elementi del sistema derivato da un sistema $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ si designeranno aggiungendo un nuovo indice in basso al simbolo, con cui si rappresentano « gli elementi del sistema primitivo ».

Partendo dalle formole (α) si dimostrano poi facilmente i seguenti teoremi:

1.° « La derivazione covariante secondo una forma fondamentale qualunque è ope- « razione distributiva ».

2.° « Il sistema derivato secondo una forma fondamentale dal prodotto di p « sistemi è eguale alla somma di p sistemi, ciascuno dei quali è il prodotto di $p-1$ dei sistemi fattori per il sistema derivato dal fattore omesso ».

3.° « Il sistema derivato da un sistema simmetrico di ordine m è simmetrico ri- « spetto ai suoi primi m indici ».

4.° « Il sistema derivato secondo una forma fondamentale qualunque dal sistema « dei suoi coefficienti è identicamente nullo ».

Come da un sistema covariante di ordine m per mezzo della derivazione covariante secondo una forma fondamentale si trae un primo sistema derivato covariante

(1) Questo teorema fondamentale sul calcolo differenziale assoluto fu dimostrato la prima volta dal Christoffel nella sua Memoria *Ueber Die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Giornale di Borchardt, vol. 70°), come sussidio alla teoria della trasformazione delle forme differenziali quadratiche.

d'ordine $m+1$, così da questo se ne può trarre uno di ordine $m+2$, che si dirà *secondo sistema derivato* dal sistema proposto secondo la forma fondamentale e così di seguito, fino ad ottenere un p^{simo} sistema derivato, che sarà pure covariante e d'ordine $m+p$.

Ora si dimostra che

5.° « Perchè un sistema d'ordine $m+1$, $X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$, possa riguardarsi come « derivato secondo la forma fondamentale φ da un sistema di ordine m è necessario « e basta che gli elementi $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ di questo possano determinarsi in modo da soddisfare identicamente alle equazioni

$$(\delta) \quad « \; X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = \sum\nolimits_{rs} a^{(rs)} \sum_1^m{}_l \, a_{r r_l, r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots r_m} .$$

« In particolare per $m=1$ queste formole diventano

$$(\delta_1) \qquad « \; X_{rst} - X_{rts} = \sum\nolimits_p X^{(p)} a_{pr,st} \; ».$$

Supponendo invece $m=0$, si ha che

« Perchè un sistema semplice risulti delle derivate di una funzione rispetto alle « variabili indipendenti, è necessario e basta che il sistema derivato da esso mediante « la derivazione covariante secondo una forma fondamentale qualunque sia simmetrico ».

6. « Se un sistema di ordine m e di elementi $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ è controvariante, è pure « tale il sistema di ordine $m+1$, i cui elementi si hanno ponendo

$$(\beta) \quad « \; X^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})} = \sum\nolimits_r a^{(r r_{m+1})} \left(\frac{dX^{(r_1 r_2 \dots r_m)}}{dx_r} + \sum\nolimits_{pq} a_{rp,q} \sum_1^m{}_h \, a^{(q r_h)} X^{(r_1 \dots r_{h+1} q r_{h+1} \dots r_m)} \right) ».$$

Dunque per mezzo di una forma fondamentale φ si può passare da un sistema controvariante di ordine m ad un nuovo sistema della stessa natura di ordine $m+1$ e ciò mediante le operazioni (β), che prese insieme possono considerarsi costituire un'unica operazione da eseguirsi sul sistema primitivo $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$. Una tale operazione si dirà *derivazione controvariante* secondo la forma fondamentale φ ed il sistema di elementi $X^{(r_1 r_2 \dots r_{m+1})}$ *sistema derivato dal primitivo secondo la forma stessa.*

« In generale gli elementi del sistema derivato si rappresenteranno cogli stessi « simboli, che valgono per qualli del primitivo, aggiuntovi un nuovo indice in alto ».

Anche la derivazione controvariante applicata p volte di seguito conduce da un sistema primitivo controvariante di ordine m ad un sistema della stessa natura di un ordine qualunque $m+p$.

Si hanno poi i seguenti teoremi:

1.° « Se un sistema $Z_{r_1 r \dots r_m}$ è composto di un sistema controvariante « $Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ e di un covariante $X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m}$; se cioè si hanno le

$$« \; Z_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m} ,$$

« valgono pure le

$$« \ Z_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$$

$$+ \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p s_{p+1}} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p s_{p+1})} a_{s_{p+1} r_{m+1}} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m} \ ».$$

2.° « I primi sistemi derivati secondo una forma fondamentale da due sistemi « reciproci rispetto ad essa sono essi pure reciproci ».

Questo teorema si deduce con facilità dal precedente ricordando la definizione data sopra pei sistemi reciproci ed i teoremi 2.° e 4.° del n. 5.

3.° « Se Z è un invariante composto di due sistemi dello stesso ordine, di cui « uno sia covariante e l' altro controvariante, se cioè si ha

$$« \ Z = \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p},$$

« per le derivate prime di Z valgono le espressioni

$$\frac{dZ}{dx_r} = \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p} (Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r} + X^{(s_1 s_2 \dots s_p)} Y_{s_1 s_2 \dots s_p r}) \ ».$$

La dimostrazione di questo teorema si deduce dal 1.° per $m = 0$ e dal 2.°.

Il teorema 2.° è importante perchè permette di sostituire alla considerazione dei sistemi controvarianti quella dei sistemi covarianti reciproci, e riconduce la derivazione controvariante alla covariante. Esso di più stabilisce una specie di dualità fra gli uni e gli altri sistemi, la quale permette di dedurre da ogni teorema un teorema reciproco col solo scambio delle parole *covariante* e *controvariante* e di ogni sistema col reciproco. Quindi ogni sistema di formole è suscettibile di due diverse espressioni, le quali si ottengono l' una dall' altra col semplice trasporto degli indici dal basso all' alto e viceversa.

Così assieme ai teoremi dimostrati nel n. 5 pei sistemi covarianti valgono pure i loro reciproci pei sistemi controvarianti. Per esempio ai teoremi 4.° e 5.° corrispondono i seguenti reciproci:

4.° « Il primo sistema derivato secondo una forma fondamentale dal sistema « dei coefficienti della sua reciproca è identicamente nullo ».

5.° « Perchè un sistema di ordine $m + 1$, $X^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})}$, possa riguardasi come « derivato da un sistema di ordine m, $X^{(r_1 r_2 \dots r_m}$, è necessario e basta che gli elementi di « questo possano determinarsi in modo che risultino identicamente soddisfatte le « equazioni

$$X^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2})} - X^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1})} = \sum\nolimits_{rs} a_{rs} \sum_1^m{}_l a^{(r r_l, r_{m+1} r_{m+2})} X^{(r_1 \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots r_m)}.$$

Il sistema reciproco delle derivate di una funzione qualunque U rispetto alle variabili indipendenti, cioè il sistema di elementi

$$U^{(r)} = \sum_s a^{(rs)} \frac{dU}{dx_s},$$

può riguardarsi come derivato per derivazione controvariante secondo φ dal sistema di ordine o U. Dal teorema 5.° si ha dunque come caso particolare il seguente:

« Affinchè un sistema $U^{(r)}$ possa riguardarsi come derivato da una funzione U « secondo una forma fondamentale φ è necessario e basta che il sistema derivato da « esso secondo φ sia simmetrico ».

7. Perchè una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

possa trasformansi nella

$$\psi = \sum_1^n {}_h\, dy^2{}_h ,$$

è necessario e basta che si possano determinare n funzioni y_1, y_2, y_n, di $x_1, x_2, \ldots x_n$, le quali soddisfacciano al sistema di equazioni a derivate parziali di 1° ordine

$$(7) \qquad \sum_h y_{h/r}\, y_{h/s} = a_{rs} ,$$

nelle quali si è scritto $y_{h/r}$ invece di $\dfrac{dy_h}{dx_r}$. Se a questo si applica la derivazione covariante secondo φ, ricordando i teoremi del n. 5, si giunge immediatamente alle

$$\sum_h y_{h/r}\, y_{h/st} + \sum_h y_{h/s}\, y_{h/rt} = 0 .$$

Queste combinate colle $y_{h/st} = y_{h/ts}$ dànno le

$$(8) \qquad \sum_h y_{h/r}\, y_{h/st} = 0 ,$$

ovvero le

$$(7_1) \qquad y_{h/st} = 0 ,$$

poichè, per le (7), il determinante del sistema (8), in cui le $y_{h/st}$ si riguardino come incognite, è eguale a $\sqrt{a}$. Se ora si suppone che per la forma φ il sistema dei simboli di Riemann sia identicamente nullo, le equazioni (δ_1) assumono la forma

$$X_{rst} = X_{rts} ,$$

e, dalle (7_1) ricavandosi con una ulteriore derivazione covariante secondo φ le

$$y_{h/stu} = 0 ,$$

risultano soddisfatte dalle $y_{h/rs}$, se queste soddisfanno alle (7_1). Nella ipotesi fatta il sistema di equazioni differenziali, che comprende le (7) e (7_1), è dunque illimitatamente integrabile, ed il suo sistema integrale generale ammette n costanti additive ed $\dfrac{n(n-1)}{2}$ costanti non additive, per le quali, come sarebbe facile riconoscere, possono assumersi le costanti arbitrarie di una sostituzione ortogonale ad n variabili.

Così risulta dimostrato che l' annullarsi identicamente dei simboli di Riemann è condizione sufficiente per la trasformabilità della forma φ nella ψ. Che essa sia

necessaria risulta dal fatto che i simboli di Riemann costituiscono un sistema covariante e sono identicamente nulli per la ψ.

8. Dimostrerò ora il seguente teorema:

« Perchè una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

« possa dedursi dalla

$$\psi = \sum_1^{n+1}{}_h\, dy_h^2 \;,$$

« ponendovi per le y_h certe funzioni delle $x_1, x_2, \ldots x_n$, è necessario e basta che si « possa determinare una nuova forma

$$\chi = \sum_{rs} b_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

« tale che: 1°) i minori di 2.° ordine ottenuti dal suo discriminante conservando le « righe di posti r e t e le colonne di posti s ed u coincidano coi simboli di Riemann « $a_{rt,su}$ relativi alla forma φ; 2°) il sistema derivato mediante derivazione covariante « secondo φ da quello di elementi b_{rs} sia simmetrico ».

Evidentemente si tratta di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per la integrabilità del sistema di equazioni a derivate parziali di 1.° ordine

$$\sum_1^{n+1}{}_h\, y_{h/r}\, y_{h/s} = a_{rs} \;. \tag{9}$$

Come nel caso considerato sopra, mediante la derivazione covariante secondo φ da queste si traggono le

$$\sum_1^{n+1}{}_h\, y_{h/r}\, y_{h/st} = 0 \,. \tag{10}$$

Se ora si osserva che il quadrato della matrice del sistema di equazioni algebriche

$$\sum_1^{n+1}{}_h\, y_{h/r}\, z_h = 0 \tag{11}$$

è uguale ad a e quindi non è identicamente nullo, se ne conclude che esso ammette una ed una sola soluzione indipendente. Indicando con A_h il minore, che si ottiene dalla detta matrice sopprimendo la colonna di posto h, possiamo prendere per tale soluzione

$$z_h = \frac{(1-1)^{h-1} A h}{\sqrt{a}} \;; \tag{12}$$

e dalle (10) segue che le $y_{h/rs}$ debbono avere espressioni della forma

$$y_{h/rs} = z_h\, b_{rs} \,, \tag{9$_1$}$$

rappresentando con b_{rs} gli elementi di un sistema doppio simmetrico, il quale risul-

terà covariante, perchè tale è il sistema $y_{h/rs}$ e, come è facile riconoscere, le z_h sono invarianti assoluti. Dalle (12) si trae la

$$\sum_1^{n+1} {}_h z_h^2 = 1, \tag{13}$$

e da questa le

$$\sum_1^{n+1} {}_h z_h z_{h/s} = 0. \tag{14}$$

Applicando poi la derivazione covariante alle identità, che si traggono dalle (11) sostituendovi per le z_h i valori (12), e ricorrendo alle (9_1), si ottengono le

$$\sum_1^{n+1} {}_h y_{h/r} z_{h/s} = - b_{rs}.$$

Risolvendo queste e le (13) sispetto alle $z_{h/s}$ troviamo per queste le espressioni

$$z_{h/s} = - \sum {}_p y_h^{(p)} b_{pt}. \tag{15}$$

Se ora si derivano ancora covariantemente secondo φ le (9_1) e per le derivate delle z_h si sostituiscono le espressioni testè determinate si giunge alle

$$y_{h/rst} = z_h b_{rst} - b_{rs} \sum {}_p y_h^{(p)} b_{pt}.$$

Se nelle (δ_1) alle X_{rs} si sostituiscono le $y_{h/rs}$, esse assumono quindi la forma

$$z_h (b_{rst} - b_{rts}) = \sum {}_p y_h^{(p)} (a_{pr,st} + b_{pt} b_{rs} - b_{ps} b_{rt}).$$

Queste poi per le (11) e (13) non possono essere soddisfatte se non lo sono separatamente le

$$b_{ps} b_{rt} - b_{pt} b_{rs} = a_{pr,st} \tag{G}$$

$$b_{rst} = b_{rts}. \tag{C}$$

Perchè il sistema, che risulta delle (9) e (9_1), sia integrabile è dunque necessario e sufficiente che il sistema doppio simmetrico di elementi b_{rs} si possa determinare in modo da soddisfare insieme alle equazioni (G) e (C); e in ciò sta la dimostrazione del teorema enunciato [1]. Verificate poi queste condizioni, quel sistema è illimitatamente integrabile e il suo sistema integrale generale contiene $n+1$ costanti arbitrarie additive ed $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti non additive, per le quali si possono assumere quelle, che sono contenute in una sostituzione ortogonale qualunque ad $n+1$ variabili. Si riconosce infatti facilmente che, se $y_1^{(0)} y_2^{(0)} \dots y_{n+1}^{(0)}$ è un sistema integrale particolare del sistema di equazioni differenziali, di cui si tratta, e con α_{hk} si designano i coefficienti di una sostituzione ortogonale arbitraria ad $n+1$ variabili, con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+1}$ $n+1$ costanti qualunque, lo stesso sistema è soddisfatto ponendo

$$y_h = \sum_1^{n+1} {}_k \alpha_{hk} y_k^{(0)} + \alpha_h.$$

[1] Questo teorema fu da me dimostrato nella Memoria *Sui principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche,* pubblicata nel tomo XII della Serie 2ª degli Annali di matematica pura ed applicata.

§ I.

Generalità sui sistemi ortogonali di congruenze in una varietà fondamentale qualunque.

1. Assunta come fondamentale una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

si chiami *varietà fondamentale* una qualunque varietà, il cui elemento lineare sia espresso da $\sqrt{\varphi}$. Siano poi $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ gli elementi di un sistema semplice da riguardarsi come covariante, e tra essi abbia luogo la relazione identica

$$\sum_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1\,. \tag{1}$$

Se con $\sqrt{\varphi}$ si designa il valore assoluto di questo radicale, le equazioni

$$dx_r = \sqrt{\varphi}\; \lambda^{(r)} \tag{2}$$

rappresentano un sistema $n-1$ volte infinito di linee tracciate nella varietà fondamentale; sistema, che chiamerò *congruenza di linee*, poichè esso è tale che per ogni punto della varietà fondamentale passa una ed una sola linea del sistema. Dalle (2) ogni linea della congruenza è determinata per ogni punto della detta varietà anche quanto alla sua direzione positiva.

Reciprocamente ogni congruenza di linee tracciate nella varietà fondamentale e determinate per ogni punto anche quanto al loro senso positivo potrà, come è chiaro, considerarsi come rappresentata da un sistema di equazioni (2), in cui le $\lambda^{(r)}$ siano funzioni note di $x_1, x_2, \dots x_n$ legate fra loro dalla relazione (1). Chiamerò il sistema $\lambda^{(r)}$ *sistema coordinato controvariante* della congruenza rappresentata dalle equazioni (2), e *sistema coordinato covariante* della congruenza stessa il sistema λ_r reciproco a quello rispetto alla forma fondamentale. Spesso per brevità chiamerò congruenza λ_r (o $\lambda^{(r)}$) quella rappresentata dalle equazioni (2); la quale non è che la congruenza delle *caratteristiche* della equazione a derivate parziali

$$\sum_r \lambda^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0$$

nella varietà fondamentale.

Siano $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due o, come dirò, costituenti un *sistema ortogonale* nella varietà fondamentale. Varranno le identità

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk}\,, \tag{3}$$

il simbolo ε_{hk} rappresentando lo *zero* o *l'unità*, secondo che gli indici h e k sono

distinti o coincidono. Se con $c_{hk} = c_{kh}$ si indicano $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti da determinarsi mediante le equazioni

$$\sum_{hk} c_{hk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s} = a_{rs} \ ,$$

dalle (3) seguono le $c_{hk} = \varepsilon_{hk}$, per le quali abbiamo dunque le

$$(3') \qquad \sum_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} = a_{rs}$$

equivalenti alle (3).

2. Indicherò con $\lambda_{h/rs}$ gli elementi del primo sistema covariante derivato dal sistema $\lambda_{h/r}$ secondo la forma fondamentale e farò le posizioni

$$(4) \qquad \gamma_{hij} = \sum_{rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_{h/rs} \, ,$$

o le equivalenti

$$(4') \qquad \lambda_{h/rs} = \sum_{ij} \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} \, .$$

Dalle (3), per derivazione covariante secondo la forma fondamentale, scendono le

$$\sum_r \lambda_k^{(r)} \lambda_{k/rs} + \sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} = 0 \ ,$$

cioè le

$$(5) \qquad \gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0 \, ;$$

e in particolare le

$$(5') \qquad \gamma_{hhj} = 0 \, .$$

Dalle (4) rileviamo che le γ_{hkj} sono invarianti assoluti, e dalle (5) che soltanto $\frac{n^2(n-1)}{2}$ tra esse sono linearmente indipendenti.

Se si derivano le (4′) covariantemente secondo φ e per mezzo delle stesse formole si eliminano dai secondi membri le $\lambda_{i/rt}$ si giunge alle

$$\lambda_{h/rst} = \sum_{ij} \gamma_{hij/t} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} + \sum_{ijkl} (\gamma_{hij} \gamma_{jkl} - \gamma_{jhk} \gamma_{jil}) \lambda_{i/r} \lambda_{k/s} \lambda_{l/t} \, .$$

Dal confronto di queste colle formole [1]

$$\lambda_{h/rst} - \lambda_{h/rts} = \sum_p \lambda_h^{(p)} a_{pr,st} \ ,$$

indicando con ds_i l' elemento lineare delle linee delle congruenze $\lambda_{i/r}$ e ponendo

$$(6) \qquad \gamma_{hi,kl} = \frac{d\gamma_{hik}}{ds_l} - \frac{d\gamma_{hil}}{ds_k} + \sum_i \left\{ \gamma_{hij} (\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \gamma_{jhl} \gamma_{jik} - \gamma_{jhk} \gamma_{jil} \right\}$$ [2],

[1] Introduzione (formole δ_1).

[2] Se λ_r è il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee, il cui elemento lineare sia ds, ed f è una funzione qualunque di $x_1, x_2, \dots x_n$ dalle (2) risulta

$$\Sigma_r \lambda^{(r)} \frac{df}{dx_r} = \Sigma_r \frac{df}{dx_r} \frac{dx_r}{ds} = \frac{df}{ds} .$$

Di questa osservazione mi valgo qui e mi varrò spesso in seguito.

si traggono le

$$(7) \qquad \gamma_{hi,kl} = \sum_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st} .$$

Tenendo conto delle note relazioni [1], che legano fra di loro i simboli di Riemann, dalle (7) si traggono le

$$(7_1) \qquad \gamma_{hi,kl} = \gamma_{kl,hi}$$

$$(7_2) \qquad \gamma_{hi,kl} + \gamma_{hl,ik} + \gamma_{hk,li} + 0$$

Le equazioni (7), che sono in numero di $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ si scompongono così in due gruppi, di cui uno comprende le (7_1) e (7_2) indipendenti dai simboli di Riemann ed in numero di $\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$, mentre l'altro risulta di $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ equazioni dipendenti da questi simboli.

Nel caso di $n=2$ gli invarianti γ_{hij} fra loro indipendenti sono due soltanto e cioè γ_{121}, γ_{212}, e rappresentano le curvature geodetiche delle linee delle congruenze $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ in una superficie qualunque di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$. Le formole (7) poi si riducono ad una sola, la quale, indicando con G l' invariante di Gauss per la forma φ, assume la forma

$$\frac{d\gamma_{121}}{ds_2} + \frac{d\gamma_{212}}{ds_1} = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 + G$$

e coincide colla nota espressione di Liouville per G in coordinate ortogonali [2].

Per $n=3$, se si conviene di considerare come equivalenti gli indici, che differiscono per un multiplo di 3, e si fanno le posizioni

$$a \, . \, \alpha^{(rs)} = a_{r+1r+2,s+1s+2}$$

$$\gamma_{hk} = \gamma_{h+1h+2,k+1k+2} \, ,$$

le (7) assumono la forma

$$\gamma_{hk} = \sum_{rs} \alpha^{(rs)} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s} \, .$$

Da queste si traggono le

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh} \, ,$$

che corrispondono alle (7_1), e sono le sole che non contengono le $\alpha^{(rs)}$.

3. Si supponga la varietà fondamentale immersa in una varietà ad $n+m$ dimensioni, i cui punti, almeno in un intorno C della varietà stessa, possano determinarsi mediante le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ e mediante altre m coordinate $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}$, le quali

[1] Introduzione (formole (2)).

[2] Tutto ciò risulterà dalle considerazioni generali, che si faranno al n. 4, come risulta pure dalla mia Memoria col titolo *Di alcune applicazioni del Calcolo Differenziale assoluto* (Atti del R. Istituto veneto, serie VII, tomo IV), a proposito della quale però è da avvertire che, secondo le abituali notazioni, la curvatura geodetica del sistema $\overline{\lambda_r}$ è rappresentata dall' invariante $-(\gamma)$ anzichè da (γ).

nella varietà fondamentale assumeranno valori costanti, che potremo supporre eguali a o. Il quadrato dell'elemento lineare di C avrà una espressione della forma

$$\psi = \sum_{1}^{n+m}{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s \ ,$$

per r ed s non maggiori di n e per $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots x_{n+m} = 0$ valendo le identità

(8) $$b_{rs} \equiv a_{rs} \ .$$

Se nella varietà fondamentale si ha un sistema di congruenze ortogonali $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n/r}$, le equazioni

(9) $$\begin{cases} \mu_h^{(r)} = \lambda_h^{(r)} & (r = 1, 2, \ldots n) \\ \mu_h^{(n+r)} = 0 & (r = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

per $h = 1, 2, \ldots n$ definiscono nella varietà C i sistemi coordinati di n congruenze ortogonali fra di loro due a due, le quali coincidono pei punti della varietà fondamentale colle date. È poi facile riconoscere che ad esse se ne possono aggiungere altre m ortogonali fra di loro due a due ed alle precedenti nalla varietà C. Se

$$\mu^{(r)}{}_{n+1}, \mu^{(r)}{}_{n+2}, \ldots \mu^{(r)}{}_{n+m}$$

sono i sistemi coordinati covarianti di queste ultime ed i sistemi $\mu_h^{(r)}$ (h ed r assumendo tutti i valori da 1 fino ad $n + m$) si considerano come associati alla forma fondamentale ψ, dalle (9), per h ed r non maggiori di n, si traggono le

$$\mu_{h/r} = \sum_{1}^{n+m}{}_{s}\, b_{rs}\, \mu_h^{(s)} = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, b_{rs}\, \lambda_h^{(s)}$$

e quindi, avendo presenti le (8), per h ed r non maggiori di n, e nella varietà fondamentale valgono le

$$\mu_{h/r} = \lambda_{h/r} \ .$$

Indicando poi con $b_{rs,p}$ i simboli di Christoffel relativi alla forma ψ, abbiamo le formole

$$\mu_{h/rs} = \frac{d\mu_{h/r}}{dx_s} - \sum_{1}^{n+m}{}_{p}\, b_{rs,p}\, \mu_h^{(p)}$$

e quindi per h, r ed s non maggiori di n le

(10) $$\mu_{h/rs} = \lambda_{h/rs} \ .$$

In fine se, analogamente alle (4), poniamo

$$\gamma'_{hij} = \sum_{1}^{n+m}{}_{rs}\, \mu_i^{(r)}\, \mu_j^{(s)}\, \mu_{h/rs} \ ,$$

dalle (4), (9) e (10), per i, h k non superiori ad n e per i punti della varietà di elemento lineare φ si traggono le

$$\gamma'_{hij} = \gamma_{hij} \ ,$$

nelle quali si legge che

« Gli invarianti γ_{hij} sono indipendenti dal numero delle dimensioni della forma « fondamentale φ, in quanto essi non cambiano valore se le congruenze $\lambda_{h/r}$ si con- « siderano come appartenenti in vece che alla varietà fondamentale, ad una varietà « qualunque ad $n+m$ dimensioni, in cui questa sia immersa ».

4. Per passare ora a stabilire il significato cinematico degli invarianti γ_{hij}, si supponga dapprima la varietà fondamentale piana e che le congruenze $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$, ... $\lambda_{n/r}$ risultino di linee rette parallele. Se si suppone ancora che $x_1, x_2, \ldots x_n$ siano coordinate cartesiane ortogonali, le $\lambda_{h/r}$ risultano costanti e le $\lambda_{h/rs}$ nulle perchè eguali alle derivate delle $\lambda_{h/r}$ rispetto alle x_s. Sono quindi nulli anche gli invarianti γ_{hij} definiti dalle formole (4).

Siano ora $x_1, x_2, \ldots x_n$ coordinate generali; $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n/r}$; $\mu_{1/r}, \mu_{2/r}, \ldots \mu_{n/r}$ due sistemi ortogonali qualunque di congruenze di linee tracciate nella varietà fondamentale. Tra i sistemi $\lambda_{h/r}$ e $\mu_{k/r}$ avranno luogo delle relazioni della forma

$$\lambda_{h/r} = \sum\nolimits_k \alpha_{hk}\, \mu_{k/r} \ , \tag{11}$$

il simbolo α_{hk} rappresentando il coseno dell'angolo, che le linee $\lambda_{h/r}$ fanno colle $\mu_{k/r}$, per modo che i coefficienti α_{hk} saranno quelli di una sostituzione ortogonale ad n variabili. Se, analogamente alle (4), poniamo

$$\gamma'_{kij} = \sum\nolimits_{rs} \mu_i^{(r)}\, \mu_j^{(s)}\, \mu_{k/rs} \ ,$$

dalle (11) ricaviamo le

$$\lambda_{h/rs} = \sum\nolimits_k \mu_{k/r}\, \alpha_{hk/s} + \sum\nolimits_{kij} \gamma'_{kij}\, \alpha_{hk}\, \mu_{i/r}\, \mu_{j/s} \ . \tag{4''}$$

Indicando con $\delta_j f$ la variazione di una funzione qualunque f di $x_1, x_2, \ldots x_n$ per uno spostamento infinitesimo lungo la linea della congruenza $\lambda_{j/r}$ e ponendo

$$\varrho_{hij}\, ds_j = \sum\nolimits_l \alpha_{il}\, \delta_j\, \alpha_{hl} \ , \tag{12}$$

dalle (4) e (4'') si traggono le

$$\gamma_{hij} = \varrho_{hij} + \sum\nolimits_{kgl} \gamma'_{kgl}\, \alpha_{hk}\, \alpha_{ig}\, \alpha_{jl} \ .$$

Queste si riducono alle

$$\gamma_{hij} = \varrho_{hij} \ , \tag{12'}$$

se, come ora faremo, si suppongono le congruenze risultanti di rette parallele e quindi le γ'_{kgl} nulle.

In seguito indicherò con T_{hik} il triedro formato dalle tangenti in uno stesso punto P alle linee di tre congruenze $\lambda_{h/r}$, $\lambda_{i/r}$, $\lambda_{k/r}$ prese nei loro sensi positivi, e pel piano formato da due spigoli riguarderò come positiva la faccia, che si volge verso la direzione positiva del 3.° spigolo. Per istabilire il senso positivo delle rota-

zioni intorno ad uno dei tre spigoli (k) dirò, per esempio, che questo va da uno spigolo (h) verso l'altro (i), riferendomi sempre alla faccia positiva del piano formato da questi spigoli, alle loro direzioni positive ed allo spazio angolare di novanta gradi tra essi interposto.

Se si suppone dapprima $n=3$ e con (hik) si rappresenta una permutazione qualunque degli indici 1, 2, 3, con j uno qualunque di questi indici, dalle (12) risulta che l'invariante γ_{hij} rappresenta la componente secondo lo spigolo (k) della rotazione che il triedro T_{123} subisce per uno spostamento positivo infinitesimo del suo vertice P lungo lo spigolo (j), assunta come direzione positiva di tale rotazione quella, che va dallo spigolo (h) verso lo spigolo (i).

Per $n>3$ si rappresenti con (hik) una qualunque disposizione semplice degli indici 1, 2,... n tre a tre, con j uno qualunque degli indici h, i, k e si chiami spazio T_{hik} lo spazio piano a tre dimensioni definito dal triedro T_{hik}. Se le rette delle congruenze $\mu_{h/r}$, $\mu_{i/r}$, e $\mu_{k/r}$ si suppongono parallele a questo spazio, nel punto P si annullano tutte le α_{il} per l differente da h, i e k; mentre per uno qualunque di questi valori le α_{il}, α_{hl} ed α_{kl} coincidono rispettivamente coi coseni degli angoli, che le proiezioni delle linee $\lambda_{i/r}$, $\lambda_{h/r}$, λ_{kr} nello spazio T_{hik} fanno colle rette $\mu_{l/r}$. È poi facile convincersi che il triedro formato dalle tangenti a queste proiezioni si mantiene trirettangolo anche dopo uno spostamento infinitesimo del punto P lungo la linea $\lambda_{j/r}$, dacchè i coseni di direzione di tali tangenti rispetto alle rette $\mu_{i/r}$, $\mu_{h/r}$ e $\mu_{k/r}$ subiscono per tale spostamento variazioni uguali a quelle subìte dalle α_{il}, α_{hl} ed α_{kl}. Ne segue che il significato cinematico stabilito per gli invarianti γ_{hij} nel caso di $n=3$, vale anche per $n>3$ sempre che la varietà fondamentale sia piana e purchè in vece delle linee delle congruenze $\lambda_{h/r}$, $\lambda_{i/r}$ e $\lambda_{k/r}$ se ne considerino le proiezioni nello spazio piano a tre dimensioni determinato dalle tangenti ad esse nel punto P.

In fine se la varietà fondamentale non è piana basterà riferirsi, in vece che ad essa, ad una varietà piana C, nella quale sia immersa, fondandoci per ciò sul teorema dimostrato al n. 3 e sulla nota osservazione di Schläfli, secondo cui ogni varietà può riguardarsi come immersa in uno spazio piano con un sufficiente numero di dimensioni. In conclusione, se la varietà fondamentale è immersa in una varietà piana C, si consideri lo spazio piano determinato dalle tangenti in P condotte nella varietà C alle linee di tre congruenze $\lambda_{h/r}$, $\lambda_{i/r}$ e $\lambda_{k/r}$ e su questo spazio si proiettino le linee di queste congruenze passanti pel punto P. Il triedro T_{hik} formato dalle tangenti condotte nella varietà C pel punto P a queste proiezioni si conserva trirettangolo anche se dal punto P si passa al punto vicinissimo situato sulla proiezione di una qualunque delle tre linee considerate e l'invariante γ_{hij} rappresenta la componente secondo la tangente alla linea della congruenza $\lambda_{k/r}$ in P della rotazione del triedro dovuta ad uno spostamento positivo infinitesimo del suo vertice lungo la proiezione alla linea $\lambda_{j/r}$. Perciò il senso delle rotazioni positive intorno alla tangente alla linea $\lambda_{k/r}$ deve andare dalle linee $\lambda_{h/r}$ alle $\lambda_{i/r}$. In particolare l'invariante γ_{hih} rappresenterà la flessione nel punto P della proiezione della linea della congruenza $\lambda_{h/r}$ passante per quel punto sul piano delle tangenti in P alla linea stessa ed a quella della congruenza $\lambda_{i/r}$ condotte nello spazio C.

5. Stabilito il significato dagli invarianti γ_{hij} introdotti colle posizioni (4) mi occuperò ora di risolvere alcune questioni fondamentali nella teoria delle congruenze considerate come definite dalle loro equazioni differenziali

$$\frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)} .$$

Si ricerchino dapprima le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee rappresentate da queste equazioni, cioè appartenenti alla congruenza di sistema coordinate controvariante $\lambda^{(r)}$, siano geodetiche nella varietà fondamentale; o, come dirò brevemente, perchè la congruenea λ_r sia *geodetica.* Per uniformarmi alle notazioni già introdotte porrò $\lambda_r = \lambda_{n/r}$ e designerò con $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \lambda_{n-1/r}$ i sistemi coordinati covarianti di altre n—1 congruenze ortogonali fra di loro due a due ed alla congruenza λ_r nella varietà fondamentale. Lungo le linee λ_r si considerino le variabili x_r come funzioni di una sola variabile indipendente qualunque t e si facciano le posizioni

$$s' = \frac{ds}{dt} , \quad x_r' = \frac{dx_r}{dt} .$$

Si avrà

$$s'^2 = \sum_{rs} a_{rs} x'_r x'_s ,$$

e le (2) assumeranno la forma

$$x'_r = s' \lambda^{(r)} .$$

Si indichi con $\delta s'$ la variazione prima di s'. Dalla espressione riportata sopra per s'^2 si ricaverà per questa la espressione

$$\delta s' = \sum_r \lambda_r \, \delta x'_r + s' \sum_r \delta x_r \sum_{st} a_{rs,t} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} .$$

Posto

$$s = \int_{t_0}^{t_1} s' \, \delta \, t ,$$

si ha poi per la variazione δs di s la espressione

$$\delta s = - \int_{t_0}^{t_1} ds \sum_r \delta x_r \sum_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} ,$$

e ne segue che le equazioni

$$\sum_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = 0 \tag{13}$$

dànno le condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi identicamente della variazione prima di s. Esse sono quindi le equazioni delle congruenze geodetiche in una varietà qualunque e, per le (h'), equivalgono alle

$$\gamma_{nin} = 0 , \tag{13'}$$

che, per le $(5')$, sono in numero di n—1.

Indicando con c una costante arbitraria, ricerchiamo ora le condizioni, cui deve soddisfare una funzione $f(x_1\, x_2 \dots x_n\, \lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ perchè la equazione

$$f\,(x_1\, x_2 \dots x_n\, \lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_n) = c\,,$$

sia, come si dice, un integrale primo delle equazioni delle geodetiche. In questa ipotesi indicando con f_s la derivata di f rispetto ad x_s presa considerando le λ_r come costanti, dovranno aversi le

$$f_s + \sum_r \frac{df}{d\lambda_r}\frac{d\lambda_r}{dx_s} = 0\,,$$

ovvero [1] le

$$f_s + \sum_r \frac{df}{d\lambda_r}\lambda_{rs} + \sum_{pq} a_{qs,p}\, \lambda^{(p)} \frac{df}{d\lambda_q} = 0\,;$$

che, tenuto conto delle (13), assumono la forma

$$\sum_s \lambda^{(s)} \left\{ f_s + \sum_{qr} a_{rs,q}\, \lambda^{(q)} \frac{df}{d\lambda_r} \right\} = 0\,. \tag{14}$$

Si assuma

$$f = \sum_{r_1 r_2 \dots r_m} c^{(r_1 r_2 \dots r_m)}\, \lambda_{r_1}\, \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_m}\,,$$

riguardando il sistema $c^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ come contravariante e quindi f come invariante. Sarà

$$f_s = \sum_{r_1 r_2 r_m} \frac{dc^{(r_1 r_2 \dots r_m)}}{dx_s}\, \lambda_{r_1}\, \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_m}$$

e, poichè le formole (β) della introduzione dànno le

$$\frac{dc^{(r_1 r_2 r_m)}}{dx_s} = \sum_{r_{m+1}} a_{sr_{m+1}}\, c^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})} - \sum_l^m \sum_{qr} a^{(qr_l)}\, a_{rs,q}\, c^{(r_1 \dots r_{l-1} r r_{l+1} \dots r_m)}\,,$$

risulterà

$$\sum_s \lambda^{(s)} f_s = \sum_{r_1 r_2 r \dots r_{m+1}} c^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})}\, \lambda_{r_1}\, \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_{m+1}}$$

$$- m \sum_{r_1 r_2 \dots r_{m-1} r} c^{(r_1 r_2 \dots r_{m-1} r)} \sum_{qs} \lambda^{(q)}\, \lambda^{(s)}\, a_{qr,s}\,.$$

Avendosi poi anche

$$\frac{df}{d\lambda_r} = m \sum_{r_1 r_2 r \dots r_{m-1}} c^{(r_1 r_2 \dots r_{m-1} r)}\, \lambda_{r_1}\, \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_{m-1}}\,,$$

la (14) assume la forma

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} c^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})}\, \lambda_{r_1}\, \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_m}\, \lambda_{r_{m+1}} = 0\,.$$

Chiamo *emisimmetrico* un sistema, se è identicamente nullo il sistema simmetrico, i cui elementi si ottengono sommando tutti gli elementi del sistema dato corrispondenti a diverse permutazioni degli stessi indici. Possiamo dunque concludere che

[1] Si vedano le formole (α_1) della Introduzione.

« Perchè una equazione della forma

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} c^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} \dots \lambda_{r_m} = c ,$$

« c essendo una costante arbitraria, ci dia un integrale primo per le equazioni delle geodetiche nella varietà fondamentale considerata, è necessario e basta che il sistema « derivato secondo φ dal sistema controvariante $c^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ (o dal suo reciproco rispetto « a φ, $c_{r_1 r_2 \dots r_m}$) sia emisimmetrico » (¹).

6. Se una congruenza λ_r non è geodetica, si ponga

$$\gamma^2 = \sum_i \gamma^2_{nin} ,$$

assumendo per γ il valore positivo, che soddisfa a questa equazione, e di più

$$\gamma \lambda'_r = \sum_i \gamma_{nin} \lambda_{i|r} .$$

Le λ'_r saranno gli elementi del sistema coordinato covariante di una congruenza di linee ortogonale alla congruenza λ_r. Si concepisca uno spazio piano S, in cui la varietà fondamentale sia immersa, e per un punto qualunque P di questa si conduca nello spazio S un vettore di lunghezza γ e la cui direzione coincida colla direzione positiva della linea λ'_r passante per P. Chiamerò questo vettore *curvatura geodetica* della congruenza λ_r nel punto P, e si avrà

a) Che l'annullarsi identicamente della curvatura geodetica di una congruenza costituisce la condizione necessaria e sufficiente perchè questa sia geodetica;

b) che per una congruenza non geodetica la curvatura geodetica è rappresentata in un punto qualunque P da un vettore normale alla linea della congruenza, che passa per P;

c) che la proiezione della curvatura geodetica di una congruenza in un punto P sopra una retta qualunque r non parallela alla linea della congruenza passante per P dà la flessione della proiezione di questa linea sul piano condotto per la sua tangente parallelamente alla direzione r.

7. In secondo luogo mi propongo di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè una congruenza λ_r sia normale; o, ciò che equivale, perchè gli elementi λ_r del sistema coordinato covariante della congruenza data siano proporzionali alle derivate di una funzione rispetto alle variabili indipendenti.

Mantenendo le convenzioni e notazioni stabilite sopra, le condizioni di cui si tratta, equivalgono a quelle necessarie e sufficienti perchè il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n-1)$$

sia completo e sono quindi rappresentate dalle equazioni

$$\sum_r \lambda^{(r)} \sum_s (\lambda_k^{(s)} \lambda_{h|rs} - \lambda_h^{(s)} \lambda_{k|rs}) = 0 ,$$

(¹) Questo teorema fu da me dimostrato per la equazione delle geodetiche sulle superficie a due dimensioni nella citata Memoria *Sulla teoria delle linee geodetiche* ecc. Il dott. Levi-Civita mi ha avvertito che esso può estendersi senza difficoltà alle varietà di quante si vogliano dimensioni.

le quali, per le (4) e (5), assumono la forma

(15) $$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh} \qquad (h\,, k = 1\,, 2\,, \ldots n - 1)$$

Per quanto si vide al n. 4, queste equazioni dànno luogo alla seguente interpretazione cinematica:

« Sia data una congruenza di linee λ_r in una varietà fondamentale ad n dimensioni, es- « sendo $n \geq 3$, e assieme ad essa si considerino altre $n-1$ congruenze $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$, ...$\lambda_{n-1/r}$ « ortogonali fra di loro due a due ed ortogonali alla congruenza λ_r. Sia S uno spazio piano, « in cui la varietà fondamentale si trovi immersa, T_{hk} lo spazio piano a tre dimensioni « determinato dalle tangenti alle linee λ_r, $\lambda_{h/r}$ e $\lambda_{k/r}$ passanti per uno stesso punto « P, e queste linee si proiettino appunto nello spazio T_{hk}. Perchè la congruenza λ_r « sia normale, o, in altri termini, perchè gli elementi λ_r siano proporzionali alle de- « rivate di una funzione rispetto alle variabili indipendenti x_r, è necessario e basta « che il triedro formato dalle tangenti a quelle proiezioni ruoti di angoli eguali « intorno agli assi di spostamento, quando il suo vertice si sposti infinitamente poco « lungo la tangente all' una od all' altra delle linee $\lambda_{h/r}$ o $\lambda_{k/r}$; sempre che gli spo- « stamenti avvengano nel senso positivo di queste e come sensi positivi delle rota- « zioni si assumano quelli, pei quali si passa dalle linee $\lambda_{k/r}$ o $\lambda_{h/r}$ alle linee λ_r ».

È ben inteso che le condizioni del precedente enunciato debbono essere soddisfatte in ogni punto P della varietà φ e per tutti gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ triedri, che si possono considerare; e verificate per questi lo saranno poi per ogni triedro costituito dalle tangenti in P alla congruenza λ_r e ad altre due congruenze ortogonali a questa e fra di loro nella varietà φ e del resto qualunque. — In particolare poi vale per lo spazio piano a tre dimensioni il seguente teorema.

« Siano λ_r, $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ tre congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due « nello spazio piano a tre dimensioni. Perchè la congruenza λ_r sia normale, è ne- « cessario e basta che le rotazioni del triedro formato dalle tangenti alle linee delle « tre congruenze passanti per uno stesso punto qualunque dovute ad uno spostamento « positivo infinitesimo di questo lungo l' una o l' altra delle linee $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ intorno « all'asse di spostamento siano eguali, sempre che come sensi positivi delle rotazioni « si assumano quelli, pei quali si passa dalle linee $\lambda_{2/r}$ o $\lambda_{1/r}$ alle linee λ_r ».

Si osservi che, verificate le (15), dalle (4'), per $h = n$, si traggono le

(16) $$\lambda_{rs} - \lambda_{sr} = \sum_i \gamma_{inn} (\lambda_r \lambda_{i/s} - \lambda_s \lambda_{i/r})\,.$$

Se poi la congruenza λ_r è insieme geodetica e normale, per le (13'), queste assumono la forma

$$\lambda_{rs} = \lambda_{sr}$$

e ci dicono che gli elementi λ_r sono le derivate rispetto alle x_r di una funzione λ. Indicando con s l' arco delle linee λ_r, la (1) assume allora la forma

$$\frac{d\lambda}{ds} = 1\ ,$$

e ci dice che le superficie di parametro λ sono geodeticamente parallele e che il parametro λ misura la distanza di una qualunque di esse dalla superficie $\lambda = 0$.

8. Si suppongano ora soddisfatte le (15), cioè si supponga che le λ_r siano proporzionali alle derivate di una funzione ϱ rispetto alle variabili indipendenti x_r e si cerchino le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di superficie di parametro ϱ sia isotermo nella varietà fondamentale. In tal caso potremo assumere per ϱ il parametro termometrico del sistema e, posto

$$\varrho_r = \mu\lambda_r ,$$

si tratterà di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè la funzione μ possa determinarsi in modo da soddisfare in pari tempo alle equazioni

$$\varrho_{rs} = \varrho_{sr} , \quad \sum_{rs} a^{(rs)} \varrho_{rs} = 0 .$$

Per le ϱ_{rs} avendosi le espressioni

$$\varrho_{rs} = \mu_s \lambda_r + \mu \lambda_{rs} ,$$

posto

$$\psi = \log \mu , \quad \nu = \sum_i \gamma_{ivi}$$

le precedenti equazioni assumono la forma

$$\psi_r = \nu\lambda_r + \sum_i \gamma_{nin} \gamma_{i/r} .$$

Stabilendo in fine le condizioni di integrabilità di queste, e tenendo conto delle (4′) e delle (16), si trovano le condizioni cercate espresse dalle seguenti equazioni, in cui h e k debbono assumere tutti i valori $1, 2, \ldots n-1$;

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{d\nu}{ds_h} + \frac{d\gamma_{nhn}}{ds_n} + \nu\gamma_{nhn} + \sum_i \gamma_{nin} (\gamma_{ihn} - \gamma_{inh}) = 0 \\ & \frac{d\gamma_{hnn}}{ds_k} + \sum_i \gamma_{inn} \gamma_{ihk} = \frac{d\gamma_{knn}}{ds_h} + \sum_i \gamma_{inn} \gamma_{ikh} . \end{aligned} \right.$$

Si può dunque concludere che, se λ_r è il sistema coordinato covariante di una congruenza normale e $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$ sono i sistemi coordinati covarianti di altre $n-1$ congruenze formanti con quella un sistema ortogonale, le equazioni (17) in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di superficie sia isotermo. Verificate le (17), il sistema di elementi

$$(18) \qquad \psi_r = \sum_i (\gamma_{ini} \lambda_r + \gamma_{nin} \lambda_{i/r})$$

risulta delle derivate di una funzione ψ rispetto alle variabili indipendenti x_r; e così pure il sistema di elementi

$$\varrho_r = e^{\psi} . \lambda_r .$$

Indicando poi con C e c delle costanti arbitrarie, e con ϱ un integrale qualunque di questo sistema $C\varrho + c$ è la espressione generale di tutti i parametri termometrici del sistema di superficie di cui si tratta.

Osserverò poi che, se le linee λ_r sono geodetiche e quindi le superficie del sistema ϱ sono geodeticamente parallele, per le (13'), le (17) si riducono ad $n-1$ soltanto, le quali assumono la forma

$$\frac{d\nu}{ds_h}=0 \qquad (h=1,2,\dots n-1).$$

Anche le (18) assumono in questo caso la forma più semplice

$$\psi_r=\lambda_r \sum\nolimits_i \gamma_{ini}.$$

Per $n=2$ le equazioni (17) si riducono ad una sola cioè alla

$$\frac{d\gamma_{121}}{ds_1}=\frac{d\gamma_{212}}{ds_2}$$ [1]

§ II.

Dei sistemi di congruenze canonici ortogonali rispetto ad una congruenza data.

9. Sia ancora λ_r il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee tracciate nella varietà fondamentale e si ponga

$$2\,X_{rs}=\lambda_{rs}+\lambda_{sr}. \tag{1}$$

Chiamerò *equazione algebrica caratteristica* della congruenza λ_r nella varietà fondamentale la equazione di grado $n-1$ in ω

$$(\Omega)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & X_{11}+\omega a_{11} & X_{12}+\omega a_{12} & \dots & X_{1n}+\omega a_{1n} \\ \lambda_2 & X_{21}+\omega a_{21} & X_{22}+\omega a_{22} & \dots & X_{2n}+\omega a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n & X_{n1}+\omega a_{n1} & X_{n2}+\omega a_{n2} & \dots & X_{nn}+\omega a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

Per ogni radice ω_h di questa equazione esiste una soluzione con valori non tutti nulli delle incognite $x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(n)}$ e ξ pel sistema di $n+1$ equazioni lineari ed omogenee

$$\sum\nolimits_s \chi^{(s)}\lambda_s=0 \tag{I}$$

$$\sum_1 \chi^{(s)}(X_{rs}+\omega a_{rs})-\xi\lambda_r=0, \tag{II}$$

nelle quali sia posto $\omega=\omega_h$. Una tale soluzione sia data dai valori

$$\chi^{(r)}=\lambda_h^{(r)}, \qquad \xi=\xi_h$$

[1] Si veda la mia Memoria *Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto* già citata [formola (26')].

delle incognite supposti, come è permesso, scelti in modo che si abbia identicamente

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{h/r} = 1 .$$

Considerando due radici distinte ω_h ed ω_k della equazione (Ω), come è facile riconoscere, varranno le identità

$$\omega_h \sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \omega_k \sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = -\sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} X_{rs} ,$$

dalle quali si traggono le

$$\sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} X_{rs} = 0 , \tag{3}$$

in cui h e k debbono essere distinti ed assumere i valori $1, 2, \ldots n-1$. Dalle (2) si conclude con considerazioni note che ω_h ed ω_k non possono essere numeri complessi coniugati e quindi che le radici della equazione (Ω) sono tutte reali. Con altre considerazioni pure note si dimostra che affinchè ω_h sia radice multipla di ordine m_h di questa equazione è necessario e basta che per $\omega = \omega_h$ la caratteristica del determinante, che ne costituisce il primo membro, risulti eguale ad $n+1-m_h$; dal che segue che per $\omega = \omega_h$ il sistema di equazioni (I, II) ammette m_h e non più soluzioni indipendenti.

Siano $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ tutte le radici distinte della equazione (Ω) ed $m_1, m_2, \ldots m_p$ i loro rispettivi ordini di multiplicità. Dalle cose dette risulta che il sistema di equazioni (Ω, I, II) conduce a determinare nella varietà fondamentale $n-1$ congruenze di linee, i cui sistemi coordinati controvarianti sono fra loro linearmente indipendenti e che si ripartiscono in p gruppi $C_1, C_2, \ldots C_p$, il gruppo C_h contenendo in generale le m_h congruenze, i cui sistemi controvarianti sono dati dalle equazioni (I, II) ponendovi $\omega = \omega_h$. Dalla (I) e dalle (2) risulta che ognuna di tali congruenze è ortogonale alla congruenza λ_r e che due congruenze appartenenti a due gruppi distinti sono ortogonali fra di loro nella varietà fondamentale; ed è poi chiaro che le congruenze di ciascun gruppo possono scegliersi in modo che siano ortogonali fra di loro due a due.

Così, partendo da una congruenza *fondamentale* λ_r, otteniamo uno o più sistemi speciali di $n-1$ congruenze ortogonali fra di loro due a due ed ortogonali alla congruenza fondamentale nella varietà considerata. Chiamerò tali sistemi *canonici ortogonali* rispetto a quest' ultima congruenza. Risulta di più che:

1.° Se la equazione algebrica caratteristica della congruenza fondamentale nella varietà pure fondamentale ha tutte le radici distinte, il sistema canonico ortogonale è unico e determinato.

2.° Se la equazione stessa ha tutte le radici eguali, ogni sistema di $n-1$ congruenze ortogonali fra di loro ed alla congruenza fondamentale costituisce un sistema canonico ortogonale rispetto a questa.

3.° In generale, se le radici della equazione algebrica caratteristica non sono tutte distinte, il sistema canonico ortogonale alla congruenza fondamentale è suscettibile di infinite determinazioni; ed il determinare le espressioni generali per i sistemi coordinati di un tale sistema è questione puramente algebrica.

Poniamo ancora $\lambda_r = \lambda_{n/r}$ e serviamoci delle notazioni stabilite colle formole (4) del § I. Avremo le identità

(4) $$\sum_s \lambda_h^{(s)} (X_{rs} + \omega_h a_{rs}) - \xi_h \lambda_r = 0 \ ,$$

le quali assumeranno la forma

$$\sum_i (\gamma_{nih} + \gamma_{nhi}) \lambda_{i/r} + 2\omega_h \lambda_{h/r} - 2\xi_h \lambda_r = 0 \ .$$

Queste equivalgono alle

(5) $$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \qquad (h > k\,,\, h\,,\, k = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\, n-1)$$

(6) $$\omega_h = \gamma_{hnh}\ , \qquad 2\xi_h = \gamma_{nhn} \qquad (h = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\, n-1)\ .$$

Mentre le (6) ci dànno i significati geometrici dei simboli ω_h e ξ_h, le (5) rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti perchè le congruenze $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$ costituiscano un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza λ_r nella varietà fondamentale. Le (5) poi dànno luogo alla seguente interpretazione cinematica:

« In una varietà fondamentale ad n dimensioni immersa in uno spazio « piano S sia dato un sistema ortogonale di congruenze $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n/r}$. Perchè le « prime $n-1$ tra queste costituiscano un sistema canonico ortogonale rispetto all' ul- « tima considerata come fondamentale, è necessario e basta che, scelte due qualunque « di esse ad arbitrio $\lambda_{h/r}$ e $\lambda_{k/r}$, e proiettate le linee di queste congruenze e della « congruenza $\lambda_{n/r}$ passanti per uno stesso punto P della varietà fondamentale sullo « spazio piano a tre dimensioni determinato dalle tangenti in P a quelle linee con- « dotte nello spazio S, la rotazione del triedro formato dalle tangenti alle proiezioni « intorno alla tangente alla linea $\lambda_{h/r}$ per uno spostamento infinitesimo positivo del « suo vertice lungo questa stessa linea sia eguale e di segno opposto a quella in- « torno alla tangente alla linea $\lambda_{k/r}$ determinata da uno spostamento analogo lungo « questa linea; sempre che i sensi positivi di tali rotazioni vadano dalla linea $\lambda_{k/r}$ « o $\lambda_{h/r}$ alla linea $\lambda_{n/r}$ ».

In particolare supponendo che la varietà fondamentale sia piana ed a tre dimensioni si ha che:

« Date tre congruenze $\lambda_r, \lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}$, perchè le due ultime costituiscano un sistema « canonico ortogonale rispetto alla prima è necessario e basta che il triedro formato « dalle tangenti alle linee delle tre congruenze in uno stesso punto P per uno spo- « stamento infinitesimo positivo di questo lungo la linea $\lambda_{1/r}$ ruoti intorno alla tan- « gente a questa di un angolo eguale ma di segno opposto a quello, di cui ruota « intorno alla tangente alla linea $\lambda_{2/r}$ per uno spostamento analogo lungo la linea « stessa ».

Supponendo di nuovo n qualunque e combinando le (5) di questo paragrafo colle (14) del § I si giunge alle

$$\gamma_{nhk} = 0 \ ,$$

che dovranno valere per h e k diverse fra loro e da n quando la congruenza $\lambda_{n/r}$ sia normale e le $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$ costituiscano per essa un sistema canonico ortogonale nella varietà fondamentale. In altri termini abbiamo che:

« Se le congruenze $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$ costituiscono un sistema canonico orto-
« gonale rispetto ad una congruenza fondamentale λ_r, perchè questa sia normale
« è necessario e basta che, scelte ad arbitrio due congruenze $\lambda_{h/r}$ e $\lambda_{k/r}$ del sistema
« proposto e proiettate le linee di queste e della congruenza λ_r passanti per un
« punto P qualunque nello spazio piano a tre dimensioni determinato dalle tangenti
« ad esse in P, la rotazione del triedro formato dalle tangenti alle proiezioni intorno
« alla tangente ad una qualunque delle linee $\lambda_{h/r}$ o $\lambda_{k/r}$ nel punto P, per uno sposta-
« mento infinitesimo del suo vertice nella direzione positiva di questa, sia nulla. Re-
« ciprocamente, se si sa che la congruenza λ_r è normale, e le condizioni testè
« indicate sono soddisfatte, se ne potrà concludere che le congruenze $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$
« costituiscono un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r ».

Per le (1), (5) e (6) le identità (4) assumono la forma

$$\sum_s \lambda_h^{(s)} (\lambda_{rs} + \lambda_{sr}) + 2\, \gamma_{hnh}\, \lambda_{h/r} = \gamma_{nhn}\, \lambda_r$$

e nel caso che la congruenza fondamentale λ_r risulti di linee geodetiche, l'altra più semplice

$$\sum_s \lambda_h^{(s)} (X_{rs} + \gamma_{hnh}\, a_{rs}) = 0 . \tag{4'}$$

Siccome di più le equazioni (13) del § I, che valgono in questo caso, possono essere sostituite dalle

$$\sum_s \lambda^{(s)} X_{rs} = 0$$

e l'essere soddisfatte le (4') significa che le γ_{nhn} sono nulle, cioè che le linee λ_r sono geodetiche, si conclude che:

« Perchè la congruenza λ_r risulti di linee geodetiche è necessario e basta che
« la equazione

$$\begin{vmatrix} X_{11} + \omega a_{11} & X_{12} + \omega a_{12} \ldots & X_{1n} + \omega a_{1n} \\ X_{21} + \omega a_{21} & X_{22} + \omega a_{22} \ldots & X_{2n} + \omega a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_{n1} + \omega a_{n1} & X_{n2} + \omega a_{n2} \ldots & X_{nn} + \omega a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

« ammetta tutte le radici della equazione algebrica caratteristica della congruenza λ_r
« nella varietà fondamentale. Verificata questa condizione, la equazione stessa am-
« mette inoltre la radice $\omega = 0$ ».

10. Sempre nella ipotesi che le congruenze $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n-1/r}$ costituiscano un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r, ed in vista di ulteriori applicazioni di questa teoria, stabilirò ora alcune nuove formole relative alle rotazioni γ_{ihk}. Per comodità mi varrò ancora dei simboli ω_h e ξ_h, attribuendo loro i significati, che risultano dalle (6). Dalle (1) e dalle (4') scendono le

$$\begin{cases} \sum_{rs} \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)}\, X_{rs} = 0 \\ \sum_{rs} \lambda_h^{(r)}\, \lambda_h^{(s)}\, X_{rs} = -\,\omega_h\, . \end{cases} \tag{7}$$

Facendo le posizioni

$$P_r = \sum_s \lambda^{(s)} X_{sr}\, , \tag{8}$$

dalle (4) si traggono pure le

$$\xi_h = \sum_r \lambda_h^{(r)} P_r$$

e da queste, ricordando le (3') del § I, le

$$(8') \qquad P_r = \sum_h \xi_h \lambda_{h/r} \; .$$

Ponendo ancora

$$X_{rs} = \sum_{hk} \mu_{hk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s} \, ,$$

per le (3), (7) ed (8) abbiamo quindi

$$\mu_{hh} = -\omega_h \;, \quad \mu_{hn} = \mu_{nh} = \xi_h \;, \quad \mu_{nn} = 0 \;, \quad \mu_{hk} = 0 \;,$$

nelle quali h e k debbono essere differenti, ma possono assumere tutti i valori 1, 2, ... $n-1$. Abbiamo dunque per le X_{rs} le espressioni

$$(9) \qquad X_{rs} = -\sum_1^{n-1}{}_h \, \omega_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} + P_r \lambda_s + P_s \lambda_r \; .$$

Le (4) del § I combinate colle (4') di questo dànno le

$$(10) \qquad \begin{aligned} \xi_k \gamma_{inh} - \omega_k \gamma_{ikh} &= \sum_{qrs} X^{(rq)} \lambda_h^{(s)} \lambda_{i/rs} \lambda_{k/q} \\ \xi_k \gamma_{ihn} - \omega_k \gamma_{ihk} &= \sum_{qrs} X^{(rq)} \lambda_h^{(s)} \lambda_{i/sr} \lambda_{k/q} \;, \end{aligned}$$

nelle quali deve essere $k < n$. In particolare, ricordando le (6), si hanno le

$$\begin{aligned} \omega_k \gamma_{kin} &= \sum_{qrs} X^{(rq)} \lambda^{(s)} \lambda_{i/rs} \lambda_{k/q} + 2 \xi_i \xi_k \\ \omega_k \gamma_{nik} &= \sum_{qrs} X^{(rq)} \lambda^{(s)} \lambda_{i/sr} \lambda_{k/q} + 2 \xi_i \xi_k \end{aligned}$$

e quindi le

$$\omega_k (\gamma_{ikn} + \gamma_{nik}) = \sum_{qrs} X^{(qr)} \lambda^{(s)} \lambda_{k/q} (\lambda_{i/sr} - \lambda_{i/rs}) \;,$$

nelle quali k può assumere soltanto i valori 1, 2, 3, ... $n-1$. Le equazioni (3), che valgono per $\omega_h \lesseqgtr \omega_k$, derivate dànno le

$$\sum_{pq} X^{(pq)} (\lambda_{h/p} \lambda_{k/qr} + \lambda_{k/p} \lambda_{h/qr}) + \sum_{pq} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)} X_{pqr} = 0 \,,$$

e però in questo caso le precedenti dànno luogo alle

$$\begin{aligned} \omega_k (\gamma_{hkn} + \gamma_{nhk}) = \sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \left(\sum_q \lambda^{(q)} X_{rsq} - \sum_{pq} a^{(pq)} \lambda_{rp} X_{sq}\right) \\ + \sum_{qrs} X^{(qr)} \lambda^{(s)} \lambda_{h/q} \lambda_{k/rs} \; . \end{aligned}$$

Ricordando ancora le (5), aggiungendo alla precedente quella, che se ne ottiene scambiando gli indici h e k e ponendo

$$(11) \qquad Y_{rs} = \sum_q \lambda^{(q)} X_{rsq} - \sum_{pq} a^{(pq)} (\lambda_{rp} X_{sq} + \lambda_{sp} X_{rq})$$

si perviene alle

$$(12) \qquad (\omega_k - \omega_h)(\gamma_{hkn} + \gamma_{nhk}) = \sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} Y_{rs} ,$$

che varranno quando h e k assumano valori distinti fra loro e da n e sempre che le radici ω_h ed ω_k siano distinte.

Si derivino ora le (4) poste sotto la forma equivalente

$$\omega_h \lambda_{h/r} = \xi_h \lambda_r - \sum_q \lambda_h^{(q)} X_{rq} .$$

Se ne trarranno le

$$\omega_h \lambda_{h/rs} + \omega_{h/s} \lambda_{h/r} = \xi_{h/s} \lambda_r + \xi_h \lambda_{rs} - \sum_q \lambda_h^{(q)} X_{rqs} - \sum_{pq} a^{(pq)} X_{rq} \lambda_{h/ps} ,$$

e quindi per le (4) del § I e per k ed h diversi fra loro e da n le

$$\omega_h \gamma_{khl} = \sum_{qrs} (\lambda_h^{(q)} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} X_{qrs} + X^{(qr)} \lambda_l^{(s)} \lambda_{k/q} \lambda_{h/rs}) - \xi_h \gamma_{nkl} .$$

Queste in fine combinate colle (10) dànno le

$$(\omega_h - \omega_k) \gamma_{hkl} = \xi_h \gamma_{nkl} + \xi_h \gamma_{nhl} - \sum_{qrs} \lambda_h^{(q)} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} X_{qrs} ,$$

le quali varranno esse pure per h e k diversi fra loro e da n.

§ III.

Dei sistemi ortogonali di superficie, che si tagliano secondo le linee di una congruenza data.

11. Data una congruenza di linee, chiamerò superficie della congruenza nella varietà fondamentale le superficie intese nel senso di Poincaré, che sono immerse in questa varietà e possono riguardarsi generate da linee della congruenza data. Mi propongo dapprima di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè tra i sistemi semplicemente infiniti di superficie di una congruenza data λ_r ne esista uno ortogonale nella varietà fondamentale ad altri $n-2$ sistemi di superficie della congruenza stessa.

Posto

$$(1) \qquad X(f) = \sum_r \lambda^{(r)} \frac{df}{dx_r} ,$$

in linguaggio analitico si tratta di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè, scelto opportunamente un integrale ϱ della equazione

$$(E) \qquad X(f) = 0 ,$$

se ne possano determinare altri $n-2$, i quali soddisfacciano in pari tempo alla equazione

$$(\varepsilon) \qquad P(f) = 0 ,$$

posto

$$P(f) = \sum_r \varrho^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,; \tag{2}$$

in altri termini perchè le due equazioni (E) ed (ε) costituiscano un sistema completo.

Dalle formole di derivazione controvariante si traggono le

$$\frac{d\lambda^{(r)}}{dx_s} = \sum_p a_{ps}\, \lambda^{(pr)} - \sum_{pq} a^{(rp)}\, \lambda^{(q)}\, a_{qs,p}\,.$$

Valgono quindi anche le

$$\sum_s \varrho^{(s)} \frac{d\lambda^{(r)}}{dx_s} = \sum_p \varrho_p\, \lambda^{(pr)} - \sum_{pqs} a^{(pr)}\, \lambda^{(q)}\, \varrho^{(s)}\, a_{qs,p}$$

$$\sum_s \lambda^{(s)} \frac{d\varrho^{(r)}}{dx_s} = \sum_p \lambda_p\, \varrho^{(pr)} - \sum_{pq} a^{(pr)}\, \lambda^{(q)}\, \varrho^{(s)}\, a_{qs,p}\,,$$

e quindi le

$$X\{P(f)\} - P\{X(f)\} = \sum_r \frac{df}{dx_r} \sum_p (\lambda_p\, \varrho^{(pr)} - \varrho_p\, \lambda^{(rp)})\,.$$

Poichè, per ipotesi, ϱ è un integrale della equazione (E), si avrà

$$\sum_p \lambda_p\, \varrho^{(pr)} = - \sum_p \varrho_p\, \lambda^{(pr)}$$

e quindi

$$P\{X(f)\} - X\{P(f)\} = 2 \sum_r \frac{df}{dx_r} \sum_p X^{(pr)}\, \varrho_p\,. \tag{3}$$

Indicando con $\lambda_{1/s}$ il sistema coordinato covariante della congruenza costituita dalle traiettorie ortogonali alle superficie di parametro ϱ, cioè ponendo

$$\Delta_1\, \varrho\,.\, \lambda_{1/s} = \varrho_s\ ,$$

le condizioni perchè le equazioni (E) ed (ε) costituiscano un sistema completo, come risulta dalle (1) (2) e (3), consistono in ciò che si possano determinare due coefficienti ω_1 e ξ_1, pei quali valgano le identità

$$\sum_s \lambda_1^{(s)}\, X_{rs} = \xi_1\, \lambda_r - \omega_1\, \lambda_{1/r}\ ;$$

le quali ci dicono che il sistema $\lambda_{1/r}$ deve appartenere ad un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza λ_r considerata come fondamentale (§ II). Possiamo dunque concludere che

« Perchè tra i sistemi semplicemente infiniti di superficie di una congruenza « data λ_r ne esista uno ortogonale nella varietà fondamentale ad altri $n-2$ sistemi « di superficie della congruenza stessa, è necessario e sufficiente che tra le congruenze « appartenenti ai sistemi canonici ortogonali alla proposta ve ne sia una, che risulti « delle traiettorie ortogonali ad un sistema di superficie S. Se ciò avviene, il sistema S « soddisfa appunto alla condizione voluta ».

12. Si ricerchino ora le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee caratteristiche della equazione (E) nella varietà fondamentale risultino come intersezioni delle superficie di $n-1$ sistemi ortogonali fra di loro due a due nella varietà stessa. In linguaggio analitico si cerchino le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (E) ammetta $n-1$ integrali $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$ legati fra loro due a due dalle relazioni

$$\sum\nolimits_r \varrho_h^{(r)} \varrho_{k/r} = 0 . \quad (h \lesseqgtr k, h, k = 1, 2 \dots n-1) .$$

Questo caso verificandosi, dirò che $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$ costituiscono nella varietà fondamentale considerata un *sistema fondamentale ortogonale* di integrali per la equazione (E).

È chiaro che, se un tale sistema esiste, i sistemi di superficie di parametri $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$, appartenenti perciò alla congruenza λ_r, sono tali che ciascuno di essi è ortogonale ad altri $n-2$ sistemi di superficie della congruenza stessa. Da quanto abbiamo già stabilito risulta quindi che

1.° « Se le linee caratteristiche della equazione (E) nella varietà φ risultano « dalle intersezioni delle superficie di $n-1$ sistemi ortogonali fra di loro due a due « nella varietà stessa, le congruenze costituite dalle traiettorie ortogonali di questi « sistemi dànno un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza λ_r considerata « come fondamentale ».

2.° « Perchè le linee caratteristiche della equazione (E) nella varietà fonda- « mentale risultino dalle intersezioni delle superficie di $n-1$ sistemi ortogonali fra « di loro due a due nella varietà stessa, è necessario e basta che tra i sistemi « canonici ortogonali rispetto alla congruenza λ_r ne esista uno costituito da con- « gruenze normali. Se questa condizione è soddisfatta, gli $n-1$ sistemi di superficie, « le cui traiettorie ortogonali costituiscono un sistema canonico ortogonale rispetto alla « congruenza λ_r, hanno per comuni intersezioni le linee di questa congruenza e si « tagliano due a due sotto angolo retto ».

Se la equazione algebrica caratteristica della congruenza λ_r nella varietà fondamentale ha tutte le radici distinte, è facile dedurre dalle cose dimostrate sopra le espressioni analitiche delle condizioni, che sono state ora stabilite geometricamente. In questo caso infatti esiste, come abbiamo visto, un unico e determinato sistema di congruenze canonico ortogonale nella varietà fondamentale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r; e le condizioni, di cui si tratta, coincideranno con quelle necessarie e sufficienti perchè ciascuna delle congruenze, di cui tale sistema risulta, sia normale. Queste poi, conservando le notazioni stabilite nel § I, sono date, secondo le (15) del § I, dalle equazioni

$$\gamma_{ihk} = \gamma_{ikh} ,$$

nelle quali i deve assumere tutti i valori $1, 2, \dots n-1$; mentre ad h e k basterà attribuire tutti i valori differenti fra loro scelti tra i numeri $1, 2, 3, \dots n$, eccettuato i.

È opportuno dividere queste equazioni in due gruppi, comprendendo in un primo gruppo tutte quelle, in cui uno dei due indici h e k assume il valore n; in un secondo gruppo le rimanenti. Le equazioni del primo gruppo sono dunque le

$$\gamma_{nkh} + \gamma_{khn} = 0 ,$$

gli indici h e k essendo distinti l' uno dall' altro e da n. Per le (12) del § II esse assumono la forma

$$\text{(A)} \qquad \sum_{rs} Y_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} = 0 ,$$

essendo

$$Y_{rs} = \sum_q \lambda^{(q)} X_{rsq} - \sum_{pq} a^{(pq)} (X_{sp} \lambda_{rq} + X_{rq} \lambda_{sp}) .$$

In esse (hk) rappresenta una combinazione qualunque semplice di 2ª classe dei numeri $1, 2, \ldots n-1$, ed $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ è quindi il loro numero. Le equazioni del secondo gruppo possono esser messe sotto la forma

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{kih} = 0 ,$$

gli indici i, h, k essendo tutti distinti fra di loro e da n. Esse equivalgono [1] alle

$$\gamma_{ihk} = 0$$

e per le (13) del § II possono essere sostituite dalle

$$\text{(B)} \qquad 2 \sum_{rst} \lambda_k^{(r)} \lambda_h^{(s)} \lambda_i^{(t)} X_{rst} = \gamma_{nhn} \gamma_{nki} + \gamma_{nkn} \gamma_{nhi} .$$

In queste (hik) rappresenta una qualunque disposizione a tre a tre degli indici $1, 2, 3, \ldots n-1$. Il loro numero è $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$, come si vede tenendo conto delle (5) del § I. Se le linee della congruenza λ_r sono geodetiche, le γ_{nhn} sono nulle e le (B) assumono la forma più semplice

$$\sum_{rst} \lambda_k^{(r)} \lambda_h^{(s)} \lambda_i^{(t)} X_{rst} = 0 .$$

13. Mi propongo ora di stabilire le espressioni analitiche delle condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (E) ammetta nella varietà fondamentale un sistema fondamentale ortogonale di integrali, quando la equazione algebrica caratteristica della congruenza λ_r nella varietà stessa non abbia tutte le radici distinte. Come nel § I, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ siano tutte le radici distinte di questa equazione; $m_1, m_2, \ldots m_p$ i loro rispettivi ordini di multiplicità; $C_1, C_2, \ldots C_p$ i gruppi corrispondenti, in cui si ripartiscono le congruenze appartenenti ai sistemi canonici ortogonali rispetto alla congruenza fondamentale λ_r. Se $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ costituiscono per la equazione (E)

[1] Per convincersi di ciò basta considerare insieme le tre equazioni

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{kih} = 0 , \quad \gamma_{kih} + \gamma_{hki} = 0 , \quad \gamma_{hki} + \gamma_{ihk} = 0$$

lineari omogenee a tre incognite; il cui determinante risulta eguale a 2.

nella varietà fondamentale un sistema fondamentale ortogonale di integrali, come fu dimostrato, le congruenze delle traiettorie ortogonali alle superficie dei sistemi di parametri $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$ devono tutte appartenere ad un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r. Gli integrali $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$, dovranno quindi ripartirsi in p gruppi $I_1, I_2, \dots I_p$ corrispondenti ai gruppi di congruenze $C_1, C_2, \dots C_p$ per guisa che il gruppo I_k contenga tutti e soltanto i parametri di quei sistemi di superficie, le cui traiettorie ortogonali formano delle congruenze appartenenti al gruppo C_k. E poichè la somma $m_1 + m_2 + \dots + m_p$ è eguale ad $n - 1$ cioè al numero degli integrali, di cui si tratta, ogni gruppo I_h ne conterrà precisamente m_h. Ne segue che, se con $\lambda_{h_1}{}^{(r)}, \lambda_{h_2}{}^{(r)}, \dots \lambda_{h_{m_h}}^{(r)}$ si indicano i sistemi coordinati controvarianti di m_h congruenze fra loro indipendenti del gruppo C_h e con G_k il sistema di $n - m_k$ equazioni indipendenti, che si ottengono associando alla equazione (E) tutti i sistemi

$$(g_h) \qquad A_h \equiv \sum_r \lambda_h^{(r)} f_r = 0 \qquad (h = h_1, h_2, \dots h_{m_h}),$$

eccettuato il solo sistema (g_k), il sistema G_k ammetterà come integrali gli m_k integrali del gruppo I_k e sarà quindi completo.

Dimostrerò ora che, reciprocamente, se tutti i sistemi $G_1, G_2, \dots G_p$ sono completi, esistono dei sistemi fondamentali di integrali ortogonali per la equazione (E); o, in altri termini, che si possono determinare nella varietà fondamentale $n - 1$ sistemi di superficie della congruenza λ_r ortogonali fra di loro due a due. Poichè ogni sistema G_k è, per ipotesi, completo, esso ammetterà m_k integrali indipendenti; i quali, appunto perchè soddisfanno alle equazioni del sistema G_k, sono tali che le loro derivate prime soddisfanno allo stesso sistema di $n - m_k$ equazioni algebriche lineari ed omogeneo indipendenti, cui soddisfanno gli elementi dei sistemi coordinati covarianti delle congruenze del gruppo C_k. Quelle derivate si esprimeranno quindi linearmente per questi elementi, dal che, ricordando (§ II) che le congruenze di due gruppi distinti sono ortogonali fra di loro, si conclude che tali sono pure gli integrali appartenenti a due gruppi distinti. Così risulta senz'altro dimostrato quanto mi sono proposto nel caso già considerato, in cui le radici della equazione algebrica caratteristica della congruenza λ_r nella varietà fondamentale siano tutte distinte; nel qual caso i gruppi C_k sono in numero di $n - 1$ e, come si è visto, il sistema fondamentale ortogonale di integrali della equazione (E), se esiste, è unico e determinato.

Nel caso generale si deve ancora dimostrare che, se è $m_k > 1$, gli integrali del sistema G_k si possono scegliere in modo che due qualunque di essi risultino ortogonali fra di loro. Per ciò si osservi che, se ϱ_1 è un integrale qualunque del sistema G_k, le sue derivate $\varrho_{1/r}$ essendo funzioni lineari ed omogenee degli elementi dei sistemi coordinati covarianti delle congruenze del gruppo G_k, le traiettorie ortogonali del sistema di superficie di parametro ϱ_1 faranno parte di un sistema canonico ortogonale alla congruenza λ_r. Esisteranno quindi (§ II) altri $n - 2$ integrali della equazione (E) ortogonali a ϱ_1 e cioè, oltre agli integrali appartenenti ai gruppi $I_1, I_2, \dots I_{k-1}, I_{k+1} \dots I_p$, che sono in numero di $n - m_k - 1$, ne esisteranno altri $m_k - 1$ indipendenti da questi

e che possono riguardarsi come funzioni degli integrali del gruppo I_k (¹). Questi integrali appartengono dunque tanto al sistema di equazioni G_k quanto alla equazione

$$\sum_r \varrho_1^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,,$$

e però tutte queste equazioni in numero di $n - m_k + 1$ costituiscono un sistema completo. Se si sceglie un integrale di questo sistema come secondo integrale ϱ_2 del gruppo G_k, esso sarà evidentemente ortogonale all' integrale ϱ_1. Si riconosce poi con ragionamento analogo a quello ora esposto che, se è $m_k > 2$, il sistema di equazioni testè considerato rimane completo anche se vi si aggiunge la equazione

$$\sum_r \varrho_2^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,;$$

e se ne conclude che, scegliendo come terzo integrale del gruppo G_k un integrale ϱ_3 di questo nuovo sistema, gli integrali $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ saranno ortogonali fra di loro due a due. Analogamente per $m_k > 3$ si dimostrerebbe la esistenza di un quarto integrale del gruppo I_k ortogonale ai tre già determinati; e, in generale, la esistenza di m_k integrali del gruppo stesso ortogonali fra di loro due a due.

Per esprimere analiticamente le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza di sistemi fondamentali ortogonali di integrali della equazione (E), che sono state ora stabilite, sia $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n-1/r}$ un sistema di congruenze canonico ortogonale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r; e in particolare $\lambda_{h_1/r}, \lambda_{h_2/r}, \dots \lambda_{h_{m_h}/r}$ siano quelle del gruppo G_h, e si ponga

$$A_i = \sum_r \lambda_i^{(r)} \frac{df}{dx_r} \qquad (i = 1, 2, \dots n-1)$$

$$A_n = \sum_r \lambda_n^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,.$$

Risultano le

$$A_h(A_j) - A_j(A_h) = \sum_r f^{(r)} \sum_s (\lambda_h^{(s)} \lambda_{j/rs} - \lambda_j^{(s)} \lambda_{h/rs})$$

(¹) Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m\, \varphi_{m+1} \dots \varphi_{n-1}$ sono integrali indipendenti di una equazione

$$\Sigma_r X^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,,$$

e, essendo $p < n - m - 1$, $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_p$ sono integrali della equazione stessa indipendenti fra di loro e da $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$, si avranno per le ψ delle espressioni

$$\psi_h = \psi_h(\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_m\, \varphi_{m+1} \dots \varphi_{n-1})\,,$$

da cui sarà impossibile eliminare le $\varphi_{m+1} \dots \varphi_{n-1}$, poichè altrimenti, contro la ipotesi, si perverrebbe a delle relazioni tra $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$ e $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_p$. Le $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_p$ costituiranno quindi un sistema di integrali indipendenti della equazione (α) anche se nelle loro espressioni (β) le $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$ si intendono sostituite da costanti arbitrarie, rimanendo così le ψ funzioni delle sole $\varphi_{m+1} \dots \varphi_{n-1}$.

cioè, posto

$$\alpha_{hj}^{(r)} = \sum_i (\gamma_{ihj} - \gamma_{ijh}) \lambda_i^{(r)},$$

$$A_h (A_j) - A_j (A_h) = \sum_r \alpha_{hj}^{(r)} \frac{df}{dx_r}.$$

Perchè uno qualunque dei sistemi G_k sia completo, sarà dunque necessario e sufficiente che i coefficienti $\alpha_{hj}^{(r)}$ si esprimano linearmente per le $\lambda^{(r)}$ e per le $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)} \dots \lambda_{n-1}^{(r)}$, escluse le $\lambda_k^{(r)}$ per $k = k_1, k_2, \dots k_{m_k}$, cioè che siano soddisfatte le equazioni

$$\sum_r \alpha_{hj}^{(r)} \lambda_{k/r} = 0,$$

o, sott' altra forma, le

$$\gamma_{khj} = \gamma_{kjh}, \tag{4}$$

nelle quali k deve assumere tutti i valori da 1 fino ad $n - 1$; mentre, se G_k è il gruppo di congruenze, cui appartiene la congruenza $\lambda_{k/r}$, e quindi a k si attribuisce uno dei valori $k_1, k_2, \dots k_{m_k}$, h e j debbono assumere tutti i valori $1, 2, \dots n$, esclusi però quelli ora indicati.

Le equazioni (4) si dividono dapprima in due gruppi, come nel caso in cui è $p = n - 1$, ascrivendo ad un primo gruppo quelle, in cui uno degli indici j ed h è uguale ad n, ad un secondo gruppo tutte le altre. Quelle del primo gruppo assumono, come nel caso citato, la forma (A), purchè si intenda che gli indici h e k contrassegnino due congruenze appartenenti a gruppi distinti di un sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza fondamentale λ_r; in altri termini purchè le radici ω_h ed ω_k si intendano distinte. Questo primo gruppo contiene quindi un numero di equazioni eguale alla somma dei prodotti due a due dei numeri $m_1, m_2, \dots m_p$.

Le equazioni del secondo gruppo si suddividono in vece in due nuovi gruppi, appartenendo al primo quelle, per cui le radici ω_h ed ω_j sono distinte; al secondo quelle, per cui è $\omega_h = \omega_j$. Le prime assumono ancora la forma (B), purchè le radici ω_i, ω_h ed ω_k si suppongano tutte distinte; ed il loro numero è eguale a tre volte la somma dei prodotti tre a tre dei numeri $m_1, m_2, \dots m_p$. Le altre, per le (13) del § II, assumono la forma

$$\sum_{qrs} \lambda_k^{(q)} \lambda_h^{(r)} \lambda_j^{(s)} (X_{qrs} - X_{qsr}) = 2\xi_k \gamma_{nhj} + \xi_h \gamma_{nkj} + \xi_j \gamma_{nhk}; \tag{C}$$

e queste dovranno essere soddisfatte per h, k, j differenti fra loro e da n e per ω_h ed ω_j eguali fra di loro ma distinte da ω_k. Il loro numero è dato dalla somma dei prodotti della forma $m_k\, m_h \left(\frac{m_h + m_k}{2} - 1\right)$ corrispondenti alle diverse combinazioni due a due delle radici $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_p$.

Le equazioni (A), (B) e (C) intese nel modo esposto sopra ci dànno dunque le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (E) ammetta dei sistemi fondamentali ortogonali di integrali nella varietà fondamentale; e dalle considerazioni

svolte risulta pure la via da seguire per la effettiva determinazione di questi sistemi nel caso che le condizioni stesse siano soddisfatte. In particolare si ha che

« Se la equazione algebrica caratteristica della congruenza λ_r nella varietà fon- « damentale ha tutte le radici eguali, la equazione (E) è tale che ogni suo integrale « fa parte di un sistema fondamentale di integrali ortogonali ».

Indicando poi con ϱ_1 un integrale qualunque della equazione (E) e considerando assieme ad essa la equazione

$$\sum_r \varrho_1^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0 \ ,$$

si ottiene un sistema completo, che indicherò con S_1. Se ϱ_2 è un integrale qualunque del sistema S_1, è pure completo il sistema S_2, che si ottiene associando al sistema S_1 la equazione

$$\sum_r \varrho_2^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0 \ .$$

Procedendo con analoghe considerazioni e determinando successivamente un integrale particolare qualunque per ciascuno dei sistemi completi $S_1, S_2, \ldots S_{n-2}$ si giunge alla determinazione di un sistema fondamentale ortogonale di integrali per la equazione (E).

14. Sempre che la parola superficie si intenda nel senso attribuitole dal Poincaré, il problema dei sistemi n^{upli} di superficie ortogonali in una varietà ad n dimensioni coincide con quello, di cui mi sono occupato in questo paragrafo, se si suppone che le λ_r siano proporzionali alle derivate di una funzione ϱ rispetto alle variabili indipendenti x_r. Posto

$$\lambda_r = \mu \varrho_r \ ,$$

si hanno allora le

$$\lambda_{rs} = \mu \varrho_{rs} + \mu_s \varrho_r$$

ed anche le

$$X_{rs} = \mu \varrho_{rs} + \tfrac{1}{2} (\mu_r \varrho_s + \mu_s \varrho_r) \ .$$

Si riconosce quindi facilmente che il sistema di equazioni $(\Omega, \mathrm{I}, \mathrm{II})$ del § II può essere sostituito dal sistema

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_n \\ \varrho_1 & \varrho_{11} + \zeta a_{11} & \varrho_{12} + \zeta a_{12} & \cdots & \varrho_{1n} + \zeta a_{1n} \\ \varrho_2 & \varrho_{21} + \zeta a_{21} & \varrho_{22} + \zeta a_{22} & \cdots & \varrho_{2n} + \zeta a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_n & \varrho_{n1} + \zeta a_{n1} & \varrho_{n2} + \zeta a_{n2} & \cdots & \varrho_{nn} + \zeta a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\sum_s \chi^{(s)} \varrho_s = 0$$

$$\sum_s \chi^{(s)} (\varrho_{rs} + \zeta a_{rs}) - \mu \varrho_r = 0 \ .$$

Con facili trasformazioni, ricordando dal § II che in questo caso le γ_{nhk}, quando

gli indici h e k siano differenti l'uno dall'altro e da n, sono tutte nulle, ed osservando ancora che le (3) del § II dànno nel nostro caso

$$\sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \varrho_{rs} = 0 \ ,$$

si riconosce che le (A), (B) e (C) assumono rispettivamente la forma

$$(A_1) \qquad \sum_{qrs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \varrho^{(q)} \varrho_{rsq} = 2 \sum_{rspq} a^{(pq)} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \varrho_{rp} \lambda_{sq}$$

$$(B_1) \qquad \sum_{qrs} \lambda_i^{(q)} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \varrho_{qrs} = 0$$

$$(C_1) \qquad \sum_{qrs} \lambda_i^{(q)} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} (\varrho_{qrs} - \varrho_{qsr}) = 0 \ .$$

Queste equazioni, che debbono essere soddisfatte nei casi stessi, in cui lo debbono le (A), (B) e (C), esprimono quindi le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema di superficie di parametro ϱ nella varietà φ faccia parte di un sistema n^{uplo} ortogonale. Esse sono di 3.° ordine e, se le radici della equazione (P) sono tutte distinte, il loro numero, come risulta dalle cose esposte sopra, è $\dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}$.

Si osservi ancora che, dato un sistema di congruenze ortogonali, $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$,.. $\lambda_{n/r}$, e riferendoci alle notazioni del § I, le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista un sistema m^{uplo} ortogonale di superficie, le cui intersezioni ad $n-1$ ad $n-1$ coincidano colle linee di quelle congruenze sono date dalle equazioni

$$\gamma_{ihk} = 0 \ ,$$

nella quale $(i\, h\, k)$ è una disposizione semplice degli indici 1, 2,... n affatto qualunque. Esse ci dicono che il triedro T_{ihk} per uno spostamento del suo vertice lungo uno qualunque dei suoi spigoli ruota intorno ad un asse, che è situato nel piano degli altri due.

Se si suppone $n=3$ da questa osservazione, come ha notato il Beltrami, scende una dimostrazione cinematica assai semplice del teorema di Dupin: è però facile dedurne anche la dimostrazione del teorema più generale dovuto a Darboux. Siano $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ due congruenze normali, e le linee $\lambda_{3/r}$ intersezioni dei due sistemi di superficie ortogonali alle linee di quelle congruenze siano linee di curvatura per le une e per le altre. Dal § I e dalla ipotesi fatta, secondo cui le $\lambda_{1/r}$ e le $\lambda_{2/r}$ sono le traiettorie ortogonali di due sistemi di superficie, possiamo intanto concludere che si avranno le identità

$$\gamma_{123} = \gamma_{132} \ , \quad \gamma_{231} = \gamma_{213} \ .$$

Poichè le linee $\lambda_{3/r}$ sono linee di curvatura tanto per le superficie di traiettorie ortogonali $\lambda_{1/r}$, quanto per quelle di traiettorie ortogonali $\lambda_{2/r}$ è chiaro che, per uno spostamento infinitesimo lungo quelle linee, il triedro T_{123} ruota in modo che restano fermi un punto della tangente alla linea $\lambda_{1/r}$ ed uno della tangente alla linea $\lambda_{2/r}$. Esso ruota dunque intorno alla retta, che congiunge questi due punti e però è nulla la γ_{123} e quindi anche la γ_{132} e la γ_{321}; e la congruenza $\lambda_{3/r}$ è essa pure normale.

§ IV.

CONSIDERAZIONI SPECIALI SUI SISTEMI DI CONGRUENZE ORTOGONALI NELLE VARIETÀ A TRE DIMENSIONI.

15. Mi occuperò ora in modo speciale dei sistemi di congruenze ortogonali nelle varietà a tre dimensioni per dedurre dalle considerazioni generali dei paragrafi precedenti alcune speciali conseguenze valevoli in questo caso. In questo paragrafo quindi si supporrà $n = 3$ e gli indici, ai quali non sia attribuito nessun valore speciale, si intenderanno dovere assumere tutti i valori $1, 2, 3$; e agli stessi valori dovranno estendersi le sommatorie rispetto a ciascun loro indice, sempre che nulla di contrario sia espressamente indicato. Converremo di più di considerare come equivalenti gli indici, che differiscono per un multiplo di 3.

Sia ancora

$$\varphi = \sum_{rs} a^{(rs)}\, dx_r\, dx_s$$

la forma fondamentale e a questa si associ la equazione

$$\text{(E)} \qquad \sum_r \lambda^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\,;$$

essendo $\lambda^{(r)}$ il sistema coordinato controvariante di una congruenza di linee nella varietà fondamentale. Mantenendo per questo caso speciale le notazioni generali stabilite nei paragrafi precedenti, porremo ancora

$$N = \sum_{rs} a^{(rs)}\, X_{rs}$$

$$a \,.\, M = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \lambda_2 & X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ \lambda_3 & X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}.$$

La equazione algebrica caratteristica (Ω) della congruenza λ_r nella varietà fondamentale assume così la forma

$$(\Omega) \qquad \omega^2 + N\omega = M\,.$$

Le formole (9) del § II, posto

$$\delta = \omega_1 - \omega_2\,,$$

coll'aiuto delle (3′) del § I si riducono facilmente alla forma

$$(1) \qquad \delta\, \lambda_{1/r}\, \lambda_{1/s} = X_{rs} + \omega_2\,(a_{rs} - \lambda_r\, \lambda_s) - \lambda_r\, P_s - \lambda_s\, P_r\,,$$

e se ne deduce prima di tutto che le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione (Ω) abbia le radici eguali sono rappresentate dalle equazioni

$$(2) \qquad X_{rs} = \lambda_r P_s + \lambda_s P_r - \omega (a_{rs} - \lambda_r \lambda_s) \,,$$

nelle quali ω e le P_r sono indeterminate, queste ultime però legate dalla relazione

$$\sum_r \lambda^{(r)} P_r = 0 \;.$$

Come si potrebbe dedurre dalle (2), e come risulta immediatamente dai teoremi dei §§ II e III, si può asserire che

« Data nello spazio piano a tre dimensioni una congruenza fondamentale λ_r, e « $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ essendo altre due congruenze formanti con essa un sistema ortogonale « qualunque, se si assumono come sensi positivi delle rotazioni intorno alle tangenti « alle linee $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ quelli, pei quali occorre descrivere un angolo retto onde pas- « sare dalle direzioni positive delle linee $\lambda_{2/r}$ e $\lambda_{1/r}$ a quella delle λ_r, affinchè esi- « stano infiniti sistemi di congruenze canonici ortogonali rispetto alla congruenza « fondamentale e quindi questa possa in infiniti modi riguardarsi come risultante « delle intersezioni di due sistemi ortogonali di superficie, è necessario e basta siano « soddisfatte le seguenti condizioni:

1.° « Che il triedro formato dalle tangenti alle linee delle tre congruenze « considerate in uno stesso punto qualunque P per uno spostamento infinitesimo del « suo vertice lungo le linee delle congruenze $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ subisca rotazioni eguali nei « valori assoluti, ma di segni opposti, intorno agli assi, secondo i quali avvengono « gli spostamenti ».

2.° « Che siano in vece eguali la rotazione intorno alla tangente alla linea $\lambda_{2/r}$ » dovuta ad uno spostamento del punto P lungo la linea $\lambda_{1/r}$; e quella intorno alla « tangente a quest' ultima linea dovuta ad uno spostamento dello stesso punto lungo « la prima ».

« Lo stesso teorema vale per una varietà fondamentale a tre dimensioni di na- « tura qualunque, purchè essa si consideri immersa in uno spazio piano S ed invece « del triedro delle tangenti alle linee delle congruenze λ_r, $\lambda_{1/r}$ e $\lambda_{2/r}$ si consideri « quello delle tangenti alle proiezioni delle linee stesse nello spazio piano a tre di- « mensioni determinato in S dalle tangenti a quelle linee in un punto qualunque P « della varietà fondamentale ».

16. Se le radici della equazione (Ω) sono distinte, le (1) si riducono facilmente alla forma

$$(1') \qquad \delta \lambda_{1/r} \lambda_{1/s} = \lambda_{rs} - \omega_2 a_{rs} + L_r \lambda_s + Q (\lambda_{2/r} \lambda_{1/s} - \lambda_{2/s} \lambda_{1/r}) \,,$$

facendo le posizioni

$$(3) \qquad L_r = \omega_2 L_r - 2 P_r \,;$$

$$(4) \qquad 2\sqrt{a}\, Q = \sum_r \lambda_r (\lambda_{r+1\, r+2} - \lambda_{r+2\, r+1}) \,.$$

Supporrò scelti gli indici delle $\lambda_{h/r}$ in modo che il determinante $|\lambda_{r/r}|$ (il cui quadrato è a come risulta dalle (3′) del § I) riesca eguale al valore assoluto di $\sqrt{a}$. È fa-

cile riconoscere che il determinante di termine principale $\lambda_1^{(1)}\ \lambda_2^{(2)}\ \lambda_3^{(3)}$ è eguale ad $\frac{1}{\sqrt{a}}$, rappresentando sempre con $\sqrt{a}$ il suo valor positivo; e che i due determinanti sono tali che dividendo per uno di essi un suo elemento qualunque si ha l'elemento di egual posto dell'altro. Questa osservazione facilita molte delle trasformazioni, che si incontreranno in questo paragrafo. Per essa intanto passiamo successivamente dalle (1′) alle

$$\sqrt{a}\,\delta\,\lambda_{1/r}\,\lambda_2^{(s)} = \omega_2\,(a_{rs+1}\,\lambda_{s+2} - a_{rs+2}\,\lambda_{s+1}) + \lambda_{s+1}\,\lambda_{rs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{rs+1} + \sqrt{a}\,Q\,(\lambda_{1/r}\lambda_1^{(s)} + \lambda_{2/r}\,\lambda_2^{(s)}),$$

ed alle

$$(1'')\qquad \delta\,\lambda_1^{(r)}\,\lambda_2^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum\nolimits_q a^{(qr)}\,(\lambda_{s+1}\,\lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{qs+1}) + Q\,(a^{(rs)} - \lambda^{(r)}\,\lambda^{(s)}) + \omega_2\,(\lambda_2^{(r)}\,\lambda_1^{(s)} - \lambda_2^{(s)}\,\lambda_1^{(r)}).$$

Di più dalla (4) di questo e dalle (4) del § I si trae

$$2\,Q = \gamma_{312} - \gamma_{321}\ .$$

Le (8′) del § II, posti per le ξ_h i valori dati dalle (6) del § stesso, e derivate dànno le

$$2\,P_{rs} = \sum\nolimits_i \gamma_{i33/s}\,\lambda_{i/r} + \sum\nolimits_{ihk} \gamma_{i33}\,\gamma_{ihk}\,\lambda_{h/r}\,\lambda_{k/s}\,;$$

e quindi la

$$2\sum\nolimits_{rs} P^{(rs)}\,(\lambda_{2/r}\,\lambda_{1/s} - \lambda_{2/s}\,\lambda_{1/r}) = \frac{d\gamma_{323}}{ds_1} - \frac{d\gamma_{313}}{ds_2} + \sum\nolimits_i \gamma_{3i3}\,(\gamma_{i21} - \gamma_{i12})\,.$$

Poichè le (7) del § I dànno

$$\frac{d\gamma_{313}}{ds_2} - \frac{d\gamma_{323}}{ds_1} + \sum\nolimits_i \gamma_{3i3}\,(\gamma_{i12} - \gamma_{i21}) = 2\,\frac{dQ}{ds} + NQ\,,$$

si avrà ancora

$$2\sum\nolimits_{rs} P^{(rs)}\,(\lambda_{2/r}\,\lambda_{1/s} - \lambda_{2/s}\,\lambda_{1/r}) = 2\,\frac{dQ}{ds} - NQ\,.$$

Di più dalla

$$\sum\nolimits_r \lambda^{(r)}\,P_r = 0\,,$$

che vale anche in questo caso, scendono successivamente le

$$\sum\nolimits_r \lambda^{(r)}\,P_{rs} = -\sum\nolimits_r P^{(r)}\,\lambda_{rs}$$
$$\sum\nolimits_{rs} \lambda^{(r)}\,\lambda^{(s)}\,P_{rs} = -2\sum\nolimits_r P^{(r)}\,P_r\,.$$

Dalle (1″) si trae per conseguenza la

$$-2\,\delta\sum\nolimits_{rs} P^{(rs)}\,\lambda_{1/r}\,\lambda_{2/s} = \frac{2}{\sqrt{a}}\sum\nolimits_{qrs} a^{(qr)}\,P_{rs}\,(\lambda_{s+1}\,\lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{qs+1}) + 2\,Q\sum\nolimits_{rs} a^{(rs)}\,P_{rs} + 4\,Q\,(\sum\nolimits_r P^{(r)}\,P_r)^2 - (2\,\frac{dQ}{ds} + NQ)\,\omega_2\ .$$

Derivando le (1′) covariantemente secondo φ e ponendo per brevità

$$\vartheta_{rs} = \lambda_{2/r}\,\lambda_{1/s} - \lambda_{2/s}\,\lambda_{1/r}\,,$$

dalle (1′) si trae la

$$\begin{aligned} -\delta \sum_s \lambda_{1/s}\,(\lambda_{1/s+1\,s+2} - \lambda_{1/s+2\,s+1}) &= \sum_{prs} a_{pr,s+1\,s+2}\,\lambda^{(p)}\,\lambda_1{}^{(r)}\,\lambda^{(s)} \\ &- 2\sum_r \mathrm{P}^{(r)}\,\lambda_{1/r} \sum_s \lambda_{1/s}\,(\lambda_{s+1\,s+2} - \lambda_{s+2\,s+1}) \\ &- \sqrt{a}\,(\sum_{rs} \mathrm{L}^{(rs)}\,\lambda_{1/r}\,\lambda_{2/s} + \sum_r \mathrm{Q}^{(r)}\,\lambda_r - \mathrm{Q}\omega_2)\,. \end{aligned}$$

Essendo poi, come è facile riconoscere,

$$\begin{aligned} &\sum_s \lambda_{1/s}\,(\lambda_{s+1\,s+2} - \lambda_{s+2\,s+1}) = 2\sqrt{a}\sum_s \lambda_2{}^{(s)}\,\mathrm{P}_s \\ &\sum_{rs} \mathrm{L}^{(rs)}\,\lambda_{1/r}\,\lambda_{2/s} = -\,\omega_2\,\mathrm{Q} - 2\sum_{rs} \mathrm{P}^{(rs)}\,\lambda_{1/r}\,\lambda_{2/s} \\ &\sum_{pr} a_{pr,s+1\,s+2}\,\lambda^{(p)}\,\lambda_1{}^{(r)} = \sqrt{a}\sum_r \alpha^{(rs)}\,\lambda_{2/r} \quad [1] \\ &\sum_s \lambda_{1/s}\,(\lambda_{1/s+1\,s+2} - \lambda_{1/s+2\,s+1}) = \sqrt{a}\,(\gamma_{312} + \gamma_{123}) \end{aligned}$$

avremo anche

$$-\delta\,(\gamma_{312} + \gamma_{123}) = \sum_{rs} \lambda_1{}^{(r)}\,\lambda_2{}^{(s)}\,(\alpha_{rs} + 2\,\mathrm{P}_{rs} - 4\,\mathrm{P}_r\,\mathrm{P}_s) + 2\,\omega_2\,\mathrm{Q} - \frac{d\mathrm{Q}}{ds}$$

e per le (1″) e per le (4)

$$\begin{aligned} \delta^2\,(\gamma_{312} + \gamma_{132}) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{qrs} a^{(qr)}\,(\lambda_{s+1}\,\lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{qs+1})\,(\alpha_{rs} + 2\,\mathrm{P}_{rs} - 4\,\mathrm{P}_r\,\mathrm{P}_s) \\ &+ \mathrm{Q}\,\Big\{\sum_{rs} a^{(rs)}\,(2\,\mathrm{P}_{rs} + \alpha_{rs}) - \sum_{rs} \alpha^{(rs)}\,\lambda_r\,\lambda_s + 4\,\mathrm{M}\Big\} - \mathrm{N}\,\frac{d\mathrm{Q}}{ds}\,. \end{aligned}$$

Secondo il § III l'annullarsi del primo membro di questa equazione dà la condizione necessaria e sufficiente per la esistenza di un sistema di integrali ortogonali della equazione (E) e però la condizione stessa può anche essere espressa dalla equazione

$$(\Omega_1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{qrs} a^{(qr)}\,(\lambda_{s+1}\,\lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{qs+1})\,(\alpha_{rs} + 2\,\mathrm{P}_{rs} - 4\,\mathrm{P}_r\,\mathrm{P}_s) = \\ &\qquad \mathrm{Q}\,\Big\{\sum_{rs} a^{(rs)}\,(2\,\mathrm{P}_{rs} + \alpha_{rs}) - \sum_{rs} \alpha^{(rs)}\,\lambda_r\,\lambda_s + 4\,\mathrm{M}\Big\} - \mathrm{N}\,\frac{d\mathrm{Q}}{ds}\;; \end{aligned} \right.$$

nella quale non apparisce più nè l'una, nè l'altra delle radici della equazione (Ω).

In particolare, se le λ_r sono proporzionali alle derivate di una funzione rispetto alle variabili indipendenti x_r, si ha $\mathrm{Q} = 0$ e la equazione (Ω_1) assume la forma

$$(\Omega')\qquad \sum_{qrs} a^{(qr)}\,(\lambda_{s+1}\,\lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2}\,\lambda_{qs+1})\,(\alpha_{rs} + 2\,\mathrm{P}_{rs} - 4\,\mathrm{P}_r\,\mathrm{P}_s) = 0\;.$$

[1] I simboli $\alpha^{(rs)}$ hanno i significati dati loro nella Introduzione.

Se le linee λ_r sono geodetiche, le P_r sono nulle e la equazione stessa diventa

$$\sum_{rs} \alpha_{rs} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_q a^{(qr)} (\lambda_{s+1} \lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2} \lambda_{qs+1}) + Q (a^{(rs)} - \lambda^{(r)} \lambda^{(s)}) \right\} = N \frac{dQ}{ds} - 4 MQ.$$

Nello spazio euclideo le α_{rs} sono nulle e però, se la congruenza λ_r risulta di linee rette, la equazione (Ω_1) diventa

$$N \frac{dQ}{ds} = 4 MQ .$$

In generale le (Ω') assumono la forma

$$(\Omega_1') \qquad \sum_{qrs} a^{(qr)} (\lambda_{s+1} \lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2} \lambda_{qs+1}) (P_{rs} - 2 P_r P_s) = 0 .$$

Sempre nella ipotesi che le λ_r siano proporzionali alle derivate di una funzione ϱ rispetto alle variabili indipendenti x_r, posto

$$H = \frac{1}{\Delta_1 \varrho},$$

avremo le

$$\lambda_r = H \varrho_r$$

$$(5) \qquad \lambda_{rs} = H_s \varrho_r + H \varrho_{rs} .$$

Si ponga ancora

$$u_s = \sum_r H^{(r)} \lambda_{rs} ,$$

e si avrà

$$u_{s+1 s+2} - u_{s+2 s+1} = \sum_{qr} a^{(qr)} (\lambda_{rs+1} H_{qs+2} - \lambda_{rs+2} H_{qs+1})$$

$$(6) \qquad \sum_s \lambda_s (u_{s+1 s+2} - u_{s+2 s+1}) = \sum_{qrs} a^{(qr)} H_{rs} (\lambda_{s+1} \lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2} \lambda_{qs+1}) .$$

Ricordando le espressioni delle P_s date dalle (8) del § II, dalle (5) ricaviamo le

$$2 P_r = \nu \varrho_r + H \sum_s \lambda^{(s)} \varrho_{rs} ,$$

in cui si è posto

$$\nu = \sum_s \lambda^{(s)} H_r ;$$

e quindi successivamente le

$$H_r = \nu \lambda_r - 2 H P_r$$

$$H_{rs} = \nu \lambda_{rs} + \nu_s \lambda_r - 2 H P_{rs} - 2 \nu P_r \lambda_s + 4 H P_r P_s .$$

La (6) assume quindi la forma

$$\sum_s \lambda_s (u_{s+1 s+2} - u_{s+2 s+1}) = - 2 H \sum_{qrs} a^{(qr)} (P_{rs} - 2 P_r P_s) (\lambda_{s+1} \lambda_{qs+2} - \lambda_{s+2} \lambda_{qs+1}) ;$$

e la equazione (Ω_1) diviene

$$\sum_s \lambda_s (u_{s+1\, s+2} - u_{s+2\, s+1}) = 0 .$$

Nella ipotesi che $x_1\, x_2\, x_3$ siano coordinate cartesiane ortogonali questa coincide colla equazione di condizione pei sistemi, che fanno parte di sistemi tripli ortogonali, sotto la forma datale da Weingarten.

§ V.

Equazioni generali della teoria delle superficie ad n dimensioni.

17. Parlando di superficie ad n dimensioni intenderò qui di parlare di quelle varietà ad n dimensioni, che sono contenute in una varietà euclidea ad $n+1$ dimensioni. Da quanto fu dimostrato nella introduzione risulta che:

1.° Affinchè una forma fondamentale ad n variabili

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

rappresenti una superficie, è necessario e basta che si possa determinare una seconda forma

$$\chi = \sum_{rs} b_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

i cui coefficienti soddisfacciano insieme alle equazioni algebriche

$$\text{(G)} \qquad b_{ps}\, b_{rt} - b_{pt}\, b_{rs} = a_{pr,st}$$

ed alle equazioni simultanee a derivate parziali di 1.° ordine

$$\text{(C)} \qquad b_{rst} = b_{rts}\ .$$

2.° Che per ogni forma χ, la quale soddisfi alle equazioni (C) e (G), esiste una ed una sola superficie determinata di forma, ma libera di moversi comunque rigidamente nello spazio euclideo ad $n+1$ dimensioni, per la quale φ ci dà una espressione del quadrato del suo elemento lineare.

« Le equazioni (G) e (C) tengono rispettivamente il posto della equazione di Gauss « e di quelle di Mainardi-Codazzi nella teoria delle superficie a due dimensioni e « possono riguardarsi come fondamentali nella teoria generale delle superficie ».

18. Per trasformare le equazioni (C) e (G) si esprimano le b_{rs} per gli elementi dei sistemi coordinati $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n/r}$ di n congruenze di linee formanti un sistema ortogonale nella varietà fondamentale, cioè si pongano le

$$\text{(1)} \qquad b_{rs} = \sum_{hk} \omega_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}\,,$$

e si ricordino le (4′) del § I. Le equazioni (G) e (C) assumeranno rispettivamente le forme

$$\text{(G}'\text{)} \qquad \omega_{hk}\, \omega_{ij} - \omega_{hj}\, \omega_{ik} = \sum_{rstu} \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, \lambda_i^{(t)}\, \lambda_j^{(u)}\, a_{rs,tu}$$

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \frac{d\omega_{hl}}{ds_j} - \frac{d\omega_{hj}}{ds_l} = \sum_k \omega_{hk}\,(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \sum_k (\omega_{jk}\,\gamma_{khl} - \omega_{lk}\,\gamma_{khj})\,.$$

Le (G′) combinate colle (7) del § I dànno poi luogo alle

$$\omega_{hk}\,\omega_{ij}-\omega_{hj}\,\omega_{ik}=\frac{d\gamma_{hki}}{ds_j}-\frac{d\gamma_{hkj}}{ds_i}+\sum_l \gamma_{hkl}(\gamma_{lij}-\gamma_{lij})$$

$$+\sum_l(\gamma_{lhj}\,\gamma_{lki}-\gamma_{lhi}\,\gamma_{lkj})\;.$$

19. Indicherò con ξ_{hk} (per $h=1,2,\ldots n$; $k=1,2,\ldots n+1$) il coseno dell'angolo, che la tangente alla linea $\lambda_{h/r}$ in un punto qualunque della superficie fondamentale fa coll'asse delle y_k. Avremo le formole

(2) $$\xi_{hk}=\sum_s \lambda_h^{(s)}\,y_{k/s}$$

o le equivalenti

(B) $$y_{k/r}=\sum_h \xi_{hk}\,\lambda_{h/r}.$$

Le (2) derivate dànno le

$$\xi_{hk/r}=\sum_s \lambda_h^{(s)}\,y_{k/sr}+\sum_s \lambda_{h/sr}\,y_k^{(s)}\;,$$

le quali, tenendo conto delle (β), delle (b), della (B) e delle (4′) del § I, assumono la forma

(A) $$\xi_{hk/r}=\sum_i(\zeta_k\,\omega_{hi}+\sum_j\gamma_{hji}\,\xi_{jk})\,\lambda_{i/r}.$$

Analogamente le (15) dell'Introduzione assumono la forma

(A₁) $$z_{k/r}=-\sum_{ij}\omega_{ij}\,\xi_{ik}\,\lambda_{i/r}\,.$$

Aggiungiamo le equazioni

(A₂) $$z^2{}_k+\sum_1^n{}_k\,\xi^2{}_{hk}=1$$

ed il sistema, che comprende le equazioni (A) (A₁) (A₂) e (B), sarà equivalente al sistema delle equazioni fondamentali (α) e (β) e quindi completo od illimitatamente integrabile. Come nel caso di $n=2$, così nel caso generale, esso offre il vantaggio che per esso si riconosce che ciascuno dei sistemi di funzioni

$$y_k\,,\,\xi_{1k}\,,\,\xi_{2k}\,,\,..\,\xi_{nk}\,,\,z_k$$

(k rappresentando uno qualunque degli indici $1,2,\ldots n+1$) soddisfa allo stesso sistema di equazioni, che è il seguente

$$\xi_{h/r}=\sum_1^n{}_i(\zeta\omega_{hi}+\sum_1^n{}_j\gamma_{hij}\,\xi_j)\,\lambda_{i/r}\quad(h=1,2,\ldots n)$$

$$z_r=-\sum_{ij}\omega_{ij}\,\xi_j\,\lambda_{i/r}$$

$$y_r=\sum_1^n{}_h\,\xi_h\,\lambda_{h/r}$$

$$z^2+\sum_1^n{}_h\,\xi_h^2=1\;.$$

Questo sistema potrebbe servire come punto di partenza per la teoria generale delle superficie ad n dimensioni, come in altro mio lavoro [1] ho fatto vedere pel caso di $n=2$.

[1] *Sulla teoria intrinseca delle superficie* ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, Serie VII, Tomo VI).

20. Dalle (A) si ricavano le

$$(3) \qquad \frac{d\xi_{hk}}{ds_l} = \xi_k \, \omega_{hl} + \sum_1^n {}_j \, \gamma_{hl} \, \xi_{hjk} \, .$$

Si supponga che l'asse delle y_k coincida colla normale alla superficie in un determinato punto P e si indichi con α_h l'angolo, che la tangente alla linea $\lambda_{h/r}$ fa colla normale alla superficie. Le (3) ci dànno pel punto P

$$(4) \qquad \frac{d\,\alpha_h}{ds_l} = -\,\omega_{hl} \, ,$$

dalle quali ricaviamo il significato geometrico degli invarianti ω_{hl}. Nel caso di $n = 2$ [1] $-\omega_{12}$ rappresenta la torsione della geodetica tangente alla linea $\lambda_{1/r}$ e però si ha il teorema:

« Sopra una superficie a due dimensioni la torsione della geodetica tangente ad « una linea in un punto P è eguale al rapporto tra la variazione dell'angolo, che la « tangente alla linea fa colla normale alla superficie in P, variazione corrispondente « ad uno spostamento infinitesimo del punto P lungo la traiettoria ortogonale alla « linea, e lo spostamento stesso ».

Supponendo che due elementi successivi della linea $\lambda_{h/r}$ si trovino in uno stesso piano colla normale alla superficie in P, dalla (4) si ricava pure che l'invariante $-\omega_{hh}$ rappresenta la flessione della linea $\lambda_{h/r}$ nel punto P.

« In ogni caso esso rappresenterà la flessione della sezione fatta nella superficie « col piano determinato dalla normale alla superficie e dalla tangente alla linea $\lambda_{h/r}$ « nel punto P ».

Supponendo $l = h$, dalle (3) si ricava ancora la

$$\sum_1^{n+1} \left(\frac{d\xi_{hk}}{ds_h}\right)^2 = \omega^2{}_{hh} + \sum_1^n {}_i \, \gamma^2{}_{ihh}$$

nella quale si legge il teorema:

« Per una curva qualunque tracciata sopra una superficie ad n dimensioni il « quadrato della flessione in un punto è eguale alla somma dei quadrati della curva- « tura geodetica e della curvatura normale della linea in quel punto ».

Derivando le (1) se ne ricava facilmente la

$$\sum_{rst} b_{rst} \, \lambda_h^{(r)} \, \lambda_h^{(s)} \, \lambda_h^{(t)} = \frac{d\,\omega_{hh}}{ds_h} + 2 \sum_i \omega_{ih} \, \gamma_{ihh} \, ;$$

la quale serve, come nel caso di $n = 2$ [2], a stabilire il significato geometrico della forma cubica $\sum_{rst} b_{rst} \, dx_r \, dx_s \, dx_t$. Quando le dx_r rappresentino gli aumenti, che subiscono le x_r per uno spostamento infinitesimo ds lungo una determinata linea, il rapporto di quella forma cubica al quadrato di ds cambiato di segno rappresenta la variazione corrispondente della curvatura della sezione normale o della geodetica ad essa tangente.

[1] Vedasi il § 5 della mia citata Memoria, *Sulla teoria intrinseca delle superficie.*

[2] Vedasi il § 4 della mia Memoria, *Sulla teoria intrinseca delle superficie.*

RELAZIONE

letta dal Socio G. Ferraris, a nome anche del Socio P. Blaserna, nella seduta del 21 giugno 1896, sulla Memoria dell'ing. F. Lori, intitolata: *Influenza degli sforzi di tensione e di compressione sulle proprietà magnetiche del ferro.*

« La Memoria dell'ing. Lori contiene i risultati di una serie di esperienze, le quali concernono: le variazioni dell'induzione magnetica in un filo di ferro sottoposto ad una forza magnetizzante costante ed a cicli di pressione e di tensione compresi nei limiti di elasticità; la variazione dell'induzione magnetica e del magnetismo residuo in due campioni di ferro sottoposti a sforzi di tensione compresi nei limiti di elasticità e ad incrudimenti prodotti collo stiramento; la variazione della forza coercitiva, dell'area d'isteresi e della forma dei cicli in un terzo campione di ferro in funzione delle stesse sollecitazioni meccaniche. Questi risultati si compendiano essenzialmente nei seguenti: Quando un filo di ferro dolce, incrudito con lo stiramento è sottoposto ad una forza magnetizzante costante ed a cicli elastici di sollecitazioni longitudinali fra due limiti di tensione uguali e di segni contrarî, ossia fra una certa tensione ed una compressione uguale alla medesima, l'induzione magnetica subisce anch'essa un processo ciclico di variazione, il quale diventa stabile dopo alcuni cicli completi. L'influenza degli sforzi di tensione sopra un filo incrudito con lo stiramento dipende dall'allungamento che il filo ha subìto. Dopo i primi allungamenti l'influenza è piccola e disordinata, ma aumentando l'allungamento, essa diventa repentinamente grande e regolare. Prima di un certo allungamento il filo si comporta come un materiale dolce, dopo di quell'allungamento esso perde alcuni caratteri del materiale dolce, ma li riacquista in una certa misura se esso è sottoposto a trazione. Questo raddolcimento magnetico, che si ottiene con la tensione, consiste in una modificazione della curva normale, in un aumento del magnetismo residuo, in una diminuzione di forza coercitiva ed in un aumento di area di isteresi.

« Nella numerosa raccolta di fatti che una valorosa schiera di sperimentatori va accumulando per arrivare alla conoscenza delle proprietà de' corpi magnetici, questo lavoro dell'ing. Lori apporta un modesto, ma lodevole ed utile contributo. Esso non conduce a risultati generali ma allarga e chiarisce nozioni importanti. Perciò i relatori Commissarî propongono che la Memoria venga inserita in esteso negli Atti dell'Accademia ».

Influenza degli sforzi di tensione e di compressione sulle proprietà magnetiche del ferro.
Memoria dell' ing. FERDINANDO LORI.

Lo studio comparativo delle sollecitazioni meccaniche e magnetiche, e la loro mutua influenza, sia quando agiscono contemporaneamente che quando agiscono successivamente, ha offerto argomento a molti lavori sperimentali. Matteucci fu il primo ad osservare che gli sforzi di tensione e compressione alterano il magnetismo indotto nel ferro da una data forza magnetizzante. Wertheim poco dopo si occupò di questa scoperta di Matteucci, ma non ottenne i medesimi risultati. Da tale discordanza colse occasione il Villari per istituire una lunga serie di esperienze intorno all' influenza, che hanno sul magnetismo di fili di ferro, di acciaio e di nikel tutte le sollecitazioni, che si ottengono caricando e scaricando successivamente il filo di un dato peso trattore. Anche le sollecitazioni composte di torsione e di magnetizzazione hanno offerto argomento a studî notevoli, specialmente sul nikel. Ewing, che si è occupato così largamente di tutte le proprietà magnetiche dei corpi, ha studiato le variazioni dell' induzione magnetica e del magnetismo residuo, che si ottengono sottoponendo a sforzi di tensione un filo di ferro già preventivamente incrudito mediante un allungamento permanente prodotto per trazione. Un risultato importante di queste ricerche è un processo ciclico (benchè non chiuso), che si ottiene quando un filo immerso in un campo magnetico costante viene stirato con una forza variabile ciclicamente da zero ad un massimo. Le eleganti ricerche di Cantone sull' isteresi elastica insieme con queste esperienze di Ewing, accrescono il complesso già considerevole delle variazioni cicliche negli stati molecolari dei corpi.

Io non conosco esperienze sull' influenza che hanno gli sforzi di tensione e compressione sopra la forza coercitiva e l' area d' isteresi, nè sull' influenza, che hanno sulle qualità magnetiche gli sforzi di compressione, e perciò ho ripetuto, coll' intendimento di accrescerle, le esperienze già fatte. E, poichè ho ottenuto alcuni risultati, che non ho veduto menzionati fino ad ora, e che mi pare possano portare un piccolo contributo nello studio di argomenti per loro natura così complessi, ho creduto non inopportuno riassumerli brevemente.

Le mie ricerche comprendono:

1°. Uno studio preliminare sulla variazione del peso specifico di un filo di ferro, che abbia subìto un allungamento permanente per tensione.

2°. Uno studio sulle variazioni dell' induzione magnetica in un filo di ferro sottoposto ad una forza magnetizzante costante e a cicli di pressione e tensione compresi nei limiti di elasticità.

3°. Uno studio sulla variazione dell' induzione magnetica e del magnetismo residuo in due campioni di ferro sottoposti a varî sforzi di tensione compresi nei limiti di elasticità e a varî incrudimenti prodotti collo stiramento.

4°. Uno studio sulla variazione della forza coercitiva, dell' area d' isteresi e della forma dei cicli in un terzo campione di ferro parimenti in funzione delle stesse sollecitazioni meccaniche precedenti.

Le esperienze furono fatte nel laboratorio di Fisica tecnica della R. Scuola di Applicazione per gl' ingegneri di Roma.

Il metodo adoperato costantemente è quello del galvanometro balistico, un galvanometro del tipo Siemens a riflessione su specchio piano a quattro bobine con due magneti a campana e due magneti direttori. La corrente era fornita da una batteria di accumulatori del tipo E P S, la forza magnetomotrice nelle varie esperienze da due eliche; l' una lunga 120 cm. del diametro interno di 0,8 cm. con 5578 spire divise in 4 strati, cioè con 46, 48 spire per centimetro di lunghezza; l' altra lunga 30,7 cm. del diametro interno di 5,1 cm. con 644 spire divise in 2 strati, cioè con 20,97 spire per centimetro di lunghezza. Il coefficiente $4\pi n_1$ per la prima è quindi 584,15, e per la seconda 263,36. La corrente magnetizzante era misurata con un amperometro Siemens a torsione e mantenuta costante manovrando un reostato a liquido costituito di due grandi dischi di zinco separati da una colonna di soluzione acquosa di solfato di zinco.

Ogni filo prima di cominciare lo studio era ricotto, portandolo al colore rosso ciliegia per mezzo della corrente elettrica. Volli persuadermi che questa ricottura particolare non influisse sulle proprietà magnetiche, eseguendo alcune misure sopra due pezzi ottenuti tagliando un unico filo, e ricotti l' uno con la corrente elettrica, l' altro con un ordinario fornello a gas. Essi non presentavano differenze notevoli. Per maggiore sicurezza studiai pure se avesse influenza una magnetizzazione trasversale indotta insieme alla longitudinale, facendo passare nel filo durante le misure magnetiche una corrente elettrica anche intensa. Non trovai influenza sensibile, cosicchè conservai il metodo, veramente assai comodo, della ricozione per mezzo dell' elettricità.

1° *studio*. Questo fu necessario per conoscere la variazione di sezione del filo per effetto dei varî allungamenti permanenti, e ridurre quindi ad una medesima sezione tutte le misure balistiche. Di 10 tratti lunghi circa 50 cm. di un filo di ferro puro di Svezia, ricotto, del diametro di 0,186 cm., ho determinato la densità col metodo della bilancia idrostatica, ed ho ottenuto i valori seguenti pei singoli tratti:

7,62	7,65	7,66	7,49	7,64
7,46	7,67	7,68	7,59	7,63

Quindi, con una macchina Tommassè, appartenente al laboratorio di costruzioni della Scuola, i 10 fili furono sollecitati a trazione fino a presentare allungamenti permanenti rispettivamente dell'

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 %

Compiuta tale operazione, furono nuovamente misurate le densità, e si ottennero i risultati seguenti:

7,63	7,84	7,64	7,65	7,64
7,63	7,64	7,65	7,63	7,64

I risultati di quest' esperienza non sarebbero sufficienti per uno studio speciale sull' argomento, ma, poichè non offrono alcun andamento regolare e si mantengono compresi entro limiti assai ristretti, essi sono sufficienti per permettere di ritenere in seguito la densità costante per ogni filo, quantunque allungato per stiramento.

2° *studio*. J. A. Ewing aveva studiato le variazioni che subisce l' induzione magnetica, quando un filo è sottoposto ad una forza magnetizzante costante e a sforzi di tensione T varianti secondo un ciclo compreso fra $T = 0$ ed un determinato valore massimo $T = T_m$. Portando in un piano di coordinate Cartesiane, come ascisse lunghezze proporzionali a questi sforzi e come ordinate lunghezze proporzionali ai valori dell' induzione magnetica, egli aveva ottenuto cicli di magnetizzazione analoghi a quelli d' isteresi, ma non chiusi. Riducendo la tensione a zero, scaricando il filo gradatamente dopo aver raggiunto gradatamente il massimo T_m, l' induzione conservava un valore maggiore di quello iniziale, e la differenza in qualche caso era considerevole.

Allo scopo di sottoporre il campione ad un ciclo più perfetto di sollecitazioni elastiche longitudinali, io ho realizzato la disposizione seguente, che permette di far variare la tensione fra due limiti uguali e di segno contrario.

AB (vedi fig. 1) è un cilindro di legno con tre fori rettilinei longitudinali, entro cui passano liberamente tre fili *f* tolti da un medesimo campione di ferro ricotto puro di Svezia del diametro di 0,186 cm., i quali hanno a tutte due le estremità viti di ottone *vv*. *C*, *D* sono due dischi di ottone robusti, cui sono solidamente attaccati due ganci *T T'* di ferro. *P* è una tavola di legno munita di una spaccatura, la quale può essere facilmente allontanata senza scomporre il sistema, facendola scorrere sulla tavola di marmo *Q* fissata al muro *N*, e che ha un foro nel centro, attraverso cui passa il gancio *T*. *M*, *M'* sono dischi di ghisa con una fessura centrale da infilare nell' asta del gancio *T'*, che è sostenuto dal rampino *R*, oppure nell' asta del gancio *T*. Quando i pesi e la tavola *P* sono collocati come in figura, il gancio *T'* non appoggia sul rampino, e i fili di ferro sono sottoposti a pressione (tensione negativa): quando i pesi sono sul piatto *S* e la tavoletta *P* è allontanata, i fili sono sottoposti a tensione. La massima tensione o compressione adoperata era di 60 kg., corrispondente a 7,4 kg. per mm². Questi sforzi erano certamente compresi nei limiti di elasticità, e producevano piccole deformazioni temporanee, non apprezzabili deformazioni permanenti.

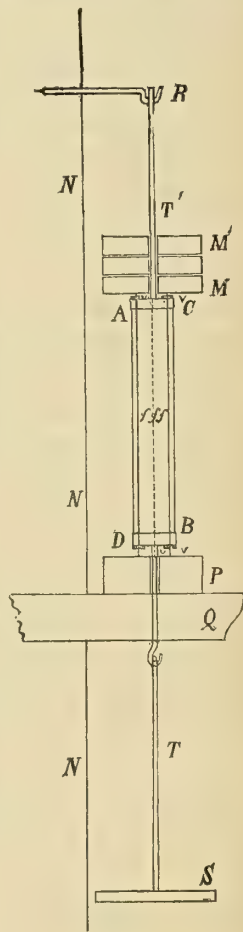



Fig. 1

Una conclusione generale delle esperienze fatte con questo apparecchio fu che, dopo che il materiale è stato sottoposto a ripetuti cicli di tensione e compressione e di magnetizzazione, esso acquista un assetto magnetico elastico permanente, in modo che ad una data coppia di valori della forza magnetizzante e della sollecitazione meccanica, che corrispondono ad un determinato punto del processo ciclico, corrisponde sempre un determinato valore dell'assetto magnetico. Gli scostamenti da questo assetto magneto-elastico durante i primi processi ciclici, cui si sottomette il materiale, non presentano andamento regolare, nemmeno nel segno. Nel ferro dolce le sollecitazioni di pressione e tensione non hanno grande influenza, come risulterà anche dagli studî che riferirò in appresso: l' influenza è più grande e più regolare nel ferro incrudito con allungamento permanente ottenuto per trazione; ma tanto il senso, quanto la grandezza dell' influenza dipendono dalla grandezza di questo allungamento. Le esperienze sono state da me fatte sopra un campione di ferro dianzi ricotto elettricamente, e quindi stirato fino ad ottenere un allungamento permanente del 10 %. Esse furono numerose, ma, poichè tutte fornirono il medesimo risultato qualitativo, nè mi hanno offerto alcun risultato quantitativo generale, riferirò solamente le seguenti come esempio:

a) Dopo aver fatto percorrere al ferro varî cicli di magnetizzazione fra i medesimi limiti massimi della forza magnetizzante e sotto diversi sforzi di tensione e compressione variabili anch'essi con processo ciclico, determinai una serie di curve normali [1] nell' ordine con cui ne sono riferite le ordinate nella tabella I, in cui la prima finca contiene i valori i in milliampere della corrente, e le altre contengono le deviazioni balistiche δ ottenute in centimetri di scala riferiti tutti ad una medesima resistenza del circuito esterno. Lo sforzo di tensione e compressione veniva cambiato dopo esperimentata un' intera curva normale. Trattandosi solamente di esporre l' andamento qualitativo del fenomeno, non ho creduto necessario ridurre le determinazioni in misura assoluta. L' elica primaria, in questo caso, era la seconda. L' elica secondaria aveva 400 giri avvolti in due strati direttamente sopra l' elica primaria. Faccio anche qui un' osservazione, che vale per tutte le esperienze di questa serie; la lunghezza di ciascun filo era 32 cm., cioè circa 170 diametri: la lunghezza dell' elica uguale a circa 6 volte il suo diametro. Quindi non può in queste esperienze ritenersi trascurabile la reazione degli estremi; ma, poichè i fenomeni di pressoflessione mi avrebbero impedito l' uso di fili più lunghi, io non sono riuscito a pormi in condizioni più favorevoli. Sicchè la vera forza magnetizzante non è qui in ciascun caso il prodotto del fattore $0{,}4\pi n_1$ pel valore della corrente in ampere, ma alquanto minore, e la differenza fra il valore di quel prodotto e il valore vero non è un numero costante, ma è funzione dell' induzione magnetica. Ho creduto di rendere qualitativamente confrontabili i risultati adoperando in tutte le serie gli stessi valori della corrente magnetizzante.

[1] Intendo per curva normale una curva, che ha per ascisse valori proporzionali alla forza magnetizzante, e per ordinate valori proporzionali alla massima induzione che con una data forza magnetizzante H si ottiene, quando si percorre un ciclo magnetico compreso fra i limiti H e — H. Intendo pure ogni volta che parlo di curve normali, che ho, prima di determinarle, smagnetizzato accuratamente il campione, facendolo percorrere numerosi cicli fra limiti sempre minori di H.

TABELLA I.

$i =$	δ per T = 0	δ per T = 20	δ per T = 40	δ per T = 60	δ per T = 0	δ per C = 60	δ per C = 0	δ per T = 60	δ per T = 0	δ per C = 60	δ per C = 0
10	0,94	0,94	0,94	0,97	0,94	0,67	0,89	0,95	0,94	0,67	0,88
50	4,86	4,86	5,09	5,26	4,98	2,90	4,57	5,02	5,00	2,90	4,57
100	11,3	11,3	11,7	12,4	11,5	8,50	10,6	12,1	11,5	8,50	10,7
300	46,4	51,7	59,2	67,9	46,4	27,6	44,2	65,0	46,2	27,5	44,1
700	72,3	77,3	83,3	88,9	72,4	31,1	72,1	88,5	72,0	31,0	72,0

Come apparisce da questa tabella, ad uno stesso valore T = 0 corrispondono due curve normali, alquanto differenti fra loro, secondo che la tensione T = 0 è raggiunta dopo sforzi di tensione o dopo sforzi di compressione, locchè nella tabella è indicato col simbolo T = 0 oppure C = 0. Queste curve normali furono ripetute molte volte, e si pervenne sempre con approssimazione superiore all' 1 % agli stessi valori. Variando dunque la sollecitazione meccanica, si può ottenere un intero ciclo di curve normali.

b) Mantenendo costante la forza magnetizzante, ho fatto variare gli sforzi di tensione e di compressione. Così ho prodotto varî cicli elastici in corrispondenza di molte forze magnetizzanti diverse, e per tutte quelle di medio valore, in corrispondenza delle quali è più sensibile l' influenza delle sollecitazioni meccaniche, ho osservato una variazione perfettamente ciclica come quella dei cicli di isteresi. La tabella II offre un esempio: la forza magnetizzante è costantemente quella dovuta a 100 milliampère.

TABELLA II.

T =	δ =	C =	δ =	T	δ =	C =	δ =	T = 0	δ =	C =	δ =
10	—	0	10,20	0	9,90	0	10,20	0	9,90	0	10,20
10	10,12	10	10,05	10	10,10	10	10,05				
20	10,20	20	9,95	20	10,20	20	9,94				
30	10,37	30	9,85	30	10,39	30	9,84				
40	10,52	40	9,77	40	10,52	40	9,70				
50	10,72	50	9,67	50	10,72	50	9,62				
60	10,87	60	9,56	60	10,87	60	9,54	60	10,88	60	9,53
50	10,75	50	9,64	50	10,73	50	9,61				
40	10,65	40	9,66	40	10,64	40	9,65				
30	10,50	30	9,76	30	10,50	30	9,66				
20	10,45	20	9,78	20	10,43	20	9,73				
10	10,35	10	9,87	10	10,33	10	9,81				

Ho tentato di disegnare il ciclo, ma esso si presenta irregolare: ne sono però fissi esattamente gli estremi e i punti corrispondenti a tensione o compressione nulla.

E torna pienamente confermato il fenomeno dell' esperienza *a*), che cioè non corrispondono valori uguali dell' induzione magnetica allo stato di riposo proveniente da tensione zero a quello proveniente da compressione zero.

c) Ho ripetuto le medesime esperienze sopra un filo dolce, non incrudito. Le influenze degli sforzi di tensione e pressione sono molto minori, nè ho potuto verificare il fenomeno ciclico dell' esperienza *a*). Ecco alcuni risultati: La tabella III contiene gli elementi di alcune curve normali, mentre la tabella IV contiene gli elementi di un ciclo elastico per $i = 100$, e la tabella V contiene gli elementi di un ciclo elastico per $i = 1000$.

Tabella III.

$i =$	δ per T = 0	δ per T=60	δ per C=60	δ per C = 0
10	0,94	0,94	0,90	0,94
50	4,82	5,05	4,64	4,82
100	10,9	11,8	10,4	10,8
300	44,7	65,8	38,0	44,6
500	92,4	128	75,5	92,3
700	139	173	121	138
1000	197	221	184	198
1900	310	316	327	310
2800	385	393	399	385

Tabella IV. $i = 100$

T =	$\delta =$	C =	$\delta =$	T =	$\delta =$	C =	T =
0	9,57	0	9,60	0	9,57	0	9.60
20	10,75	20	8,77				
40	11,85	40	8,07				
60	12,90	60	7,80	60	12,92	60	7,53
40	11,82	40	8,07				
20	10,65	20	8,76				

Tabella V. $i = 1000$

T = 60	$\delta = 221$	T = 60	$\delta = 221$	T = 60	$\delta = 220$
T = 0	$\delta = 201$	T = 0	$\delta = 201$	T = 0	$\delta = 201$
C = 60	$\delta = 175$	C = 60	$\delta = 176$		
C = 0	$\delta = 201$	C = 0	$\delta = 201$		

Apparisce da queste tabelle che i valori dell' induzione magnetica sono sempre gli stessi allo stato di riposo, sia che esso segua una serie di tensioni oppure una serie di compressioni.

Osservazione. Presento queste esperienze sui cicli magneto-elastici come un primo tentativo su tale argomento. Dubito che le irregolarità ottenute nell' andamento dei cicli siano causate da imperfezione del metodo. Operando come ho descritto, la pressione si sarà uniformemente ripartita su ciascun filo, oppure in parte e in misura irregolare sarà stata annullata da attriti contro i canali del legno per contatto dei fili leggermente inflessi? Tuttavia l' esistenza dell'andamento ciclico nella variazione dell' induzione magnetica non è dubbia, come è certo che, compiendo il ciclo completo di tensione e di compressione, si chiude quel ciclo magnetico, che a Ewing con soli sforzi di tensione era rimasto aperto.

In questa serie di esperienze non ho cercato di annullare l' azione del campo magnetico terrestre, perchè l' effetto di questa era semplicememte di alterare ciascuna volta il valore della forza magnetizzante, e questo non rende non confrontabili i risultati ottenuti con una stessa corrente.

L' influenza delle correnti di Faucault, a causa del piccolo diametro dei fili, era trascurabile affatto.

3° *studio.* Sopra due campioni di ferro, uno del commercio e uno puro di Svezia, ho determinato alcune serie di curve normali in corrispondenza di varî sforzi di tensione. Sono partito dai campioni ricotti, e quindi li ho incruditi in vario grado producendovi allungamenti permanenti varî. Nel secondo campione ho anche determinato in corrispondenza di ogni forza magnetizzante, oltre l' induzione magnetica massima, anche il magnetismo residuo. L' elica primaria era la seconda, disposta con l' asse orizzontale e normale al meridiano magnetico. L' elica secondaria aveva 1000 giri divisi in 4 strati. Ecco i risultati:

I° *campione.* Era un filo di ferro del commercio lungo 120 cm., del diametro di 0,1 cm. La seguente tabella VI contiene gli elementi delle curve normali determinate. La prima finca contiene i valori delle forze magnetizzanti H, le altre i valori dell' induzione magnetica *B.* Tutti questi valori sono espressi in unità assoluta. Per esprimere in unità assoluta le forze magnetizzanti ho moltiplicato il fattore 584,15 della prima elica magnetizzante per l' intensità della corrente espressa in unità assoluta del sistema elettromagnetico (*c g s*). Per esprimere in unità assoluta i valori dell' induzione, ho tenuto conto dei dati seguenti:

a) Resistenza del circuito secondario 390 ohm;

b) numero di spire dell' elica secondaria 100;

c) sezione del filo di ferro 0,00785 cm^2;

d) costante del galvanometro balistico 0,381; nel senso che, moltiplicando la lettura in millimetri della scala per questo numero, per la resistenza del circuito secondario in ohm e per l' inverso del numero delle spire dell' elica secondaria, si ottiene il flusso totale in misura elettromagnetica del sistema (*c g s*).

TABELLA VI.

	H	B per T = 0 per mm²	B per T=2,5 kg. per mm²	B per T=5,0 kg. per mm²	B per T=7,5 kg. per mm²	B per T=10 kg. per mm²
Filo ricotto	0,584	68	53	38	76	83
	1,75	272	182	159	348	325
	2,92	621	477	477	1363	1029
	4,38	7323	8554	8251	7343	6889
	5,84	10522	10825	10446	9917	9387
	11,7	12036	12036	11960	11809	11582
	29,2	13096	13096	12945	12869	12869
	58,4	14080	14080	14004	13853	13853
	111	15594	15518	15443	15367	15367
Dopo un allungamento del 2 %	0,584	75,7	68,1	68,1	53,0	91,0
	1,75	265	242	249	204	318
	2,92	545	560	643	371	787
	4,38	2165	3013	3013	2627	3626
	5,84	4557	5481	6026	6253	6715
	11,7	8554	9235	9765	10068	10295
	29,2	12187	12263	12263	12263	12263
	58,4	13853	13777	13626	13626	13550
	111	15518	15291	15291	15140	14989
Dopo un allungamento del 5 %	0,584	53,0	53,0	60,6	60,6	60,6
	1,75	182	182	204	227	227
	2,92	333	356	409	477	507
	4,38	628	696	893	1105	1256
	5,84	1052	1499	2128	3013	5399
	11,7	4512	6041	7312	8266	8902
	29,2	11203	11431	11658	11657	11733
	58,4	13399	13399	13323	13248	13172
	111	15216	15216	14989	14913	14857
Dopo un allungamento del 9 %	0,584	60,6	60,6	68,1	60,6	53,0
	1,75	166	197	219	197	144
	2,92	310	371	431	386	280
	4,36	545	712	893	780	575
	5,84	901	1408	2029	2559	2392
	11,7	4746	6109	7260	6554	9387
	29,2	11809	11960	12112	12187	12263
	58.4	14080	13853	13953	13777	13777
	111	15821	15594	15594	15518	15518

Nella fig. 2 ho disegnato il primo tratto di tutte queste curve normali. Ivi con tratto continuo sono disegnate le curve per T = 0; con tratteggiatura quella per T = 2,5; con un tratto e un punto quelle per T = 5; con punti quelle per T = 7,5; con due tratti e un punto quelle per T = 10. Il primo gruppo appartiene al filo ricotto; il secondo al filo allungato del 2 %; il terzo al filo allungato del 5 %; il quarto al filo allungato del 9 %. Ogni divisione sull' asse delle ascissse corrisponde a 2,5 unità di forza magnetizzante, ed ogni divisione sull' asse delle ordinate a 2500 linee d' induzione per centimetro quadrato.

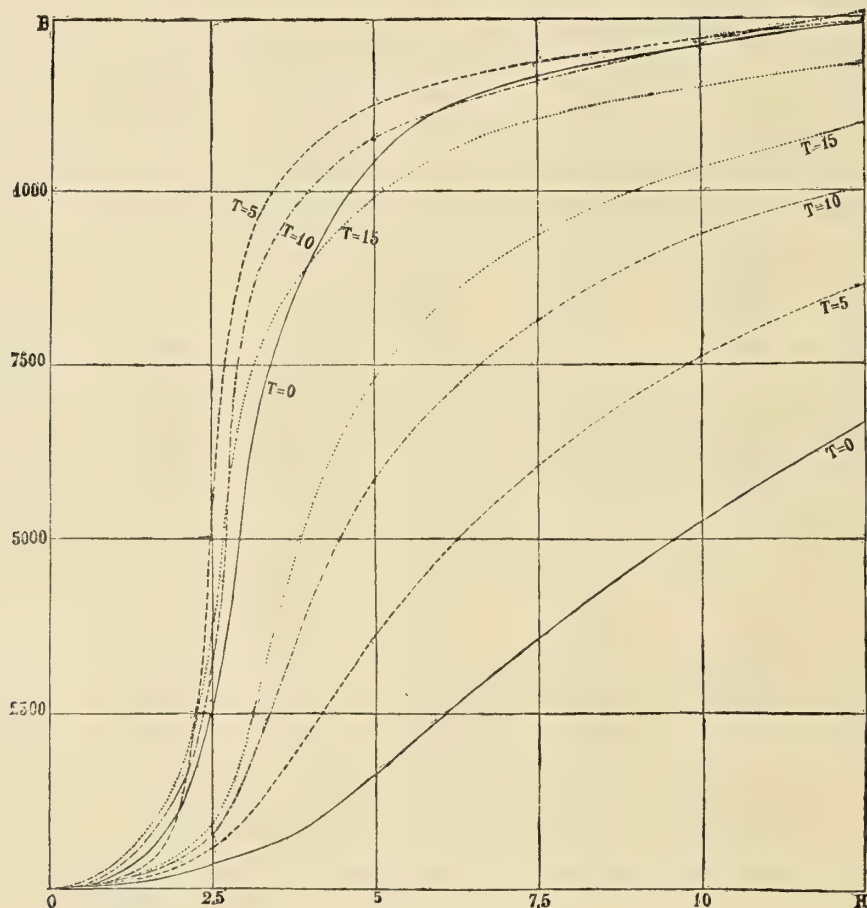



Fig. 2.

Come apparisce da questa figura, un filo sottoposto a tensione dà origine ad una curva normale, che ha gli stessi caratteri di quella che accompagnerebbe un raddolcimento, cioè ha il primo gomito più accentuato e i valori dell' induzione in corrispondenza di forze magnetizzanti medie più grandi. Oltre a ciò l' influenza dello sforzo di tensione è sempre piccola nel filo dolce ricotto ed è anche irregolare; essa aumenta nel filo incrudito: il raddolcimento magnetico, come chiameremo questo fenomeno per

brevità, aumenta coll'aumentare della tensione, ma non illimitatamente: p. e. dopo il primo incrudimento ottenuto con un allungamento del 2 % e colla tensione di 6 kg. si ottiene una curva normale più dolce di quella corrispondente alla tensione di 8 kg.

2° *campione*. Era un filo di ferro puro di Svezia del diametro di cm. 0,186. La tabella VII fornisce i risultati delle esperienze per questo campione. Essa è fatta, come la tabella VI, tranne che ha altre due finche, delle quali l'una dà il valore del magnetismo residuo R, l'altra del rapporto ϱ fra il magnetismo residuo e il magnetismo massimo. Qui, trattandosi di ferro puro, ho potuto giungere ad allungamenti permanenti più grandi.

Tabella VII.

		T = 0 kg. per mm²			T = 5 kg. per mm²			T = 10 kg. per mm²			T = 15 kg. per mm²		
	H	B	R	ϱ	B	R	ϱ	B	R	ϱ	B	R	ϱ
Filo ricotto	0,584	189	31,6	0,170	207	39,4	0,142	163	22,9	0,143	187	17,4	0,094
	1,75	822	130	0,368	746	309	0,413	1081	502	0,465	1228	551	0,449
	2,92	5607	4750	0,818	9074	8473	0,931	8174	7250	0,890	7043	6497	0,922
	4,30	10030	9216	0,920	10953	10406	0,950	10347	9445	0,917	9528	8899	0,937
	5,84	11056	10264	0,929	11504	10974	0,955	11024	10133	0,927	10401	9052	0,870
	11,7	12274	11356	0,926	12285	11466	0,934	12056	10941	0,910	11712	9904	0,846
	29,2	13159	11782	0,894	13104	11859	0,905	12940	11237	0,867	12733	10275	0,807
	58,4	13879	11912	0,859	13797	12317	0,893	13634	11269	0,827	13514	10374	0,768
	111	14698	12241	0,833	14687	11968	0,815	14578	11302	0,775	14453	10319	0,714
Dopo un allungamento del 2,8 %	0,584	176	25,0	0,140	176	10,9	0,063	193	30,6	0,157	218	33,8	0,150
	1,75	906	316	0,346	1321	644	0,488	1321	644	0,488	1360	622	0,458
	2,92	4952	3932	0,797	7857	7032	0,895	7464	6452	0,865	6601	5428	0,822
	4,30	9544	8550	0,896	11209	10504	0,937	11220	10112	0,909	9719	8332	0,858
	5,84	11280	10342	0,916	11788	11182	0,949	11351	10254	0,903	10691	9172	0,858
	11,7	12629	10994	0,923	12662	11880	0,937	12411	11160	0,899	11039	10144	0,843
	29,2	13639	12154	0,892	13470	11652	0,865	13388	11564	0,864	13186	10626	0,806
	58,4	14480	12018	0,833	14414	12394	0,860	14180	11652	0,825	14010	10648	0,760
	111	15577	12034	0,773	15321	12340	0,806	15217	11662	0,766	15086	10646	0,706
Dopo un allungamento del 5,8 %	0,584	168	19,6	0,117	211	43	0,209	220	37	0,168	229	33	0,151
	1,75	901	259	0,288	1387	666	0,481	1441	670	0,465	1387	566	0,409
	2,92	4128	2817	0,683	6530	5416	0,830	6503	5318	0,819	6066	4593	0,790
	4,30	9358	7884	0,843	11100	10137	0,913	10571	9347	0,884	9855	8641	0,857
	5,84	11209	9773	0,872	11968	11138	0,931	11553	10330	0,894	10931	9423	0,862
	11,7	12826	11433	0,891	12978	11968	0,922	12771	11280	0,883	12372	10395	0,840
	29,2	13868	11990	0,865	13863	12372	0,892	13688	11749	0,858	13552	10778	0,795
	58,4	14747	12077	0,819	14676	12317	0,839	14556	11891	0,817	14332	10723	0,748
	111	15823	11717	0,742	15681	12550	0,788	15512	11695	0,754	15424	10778	0,699

Segue Tabella VII.

	H	T = 0 kg. per mm²			T = 5 kg. per mm²			T = 10 kg. per mm²			T = 15 kg. per mm²		
		B	R	ρ	B	R	ρ	B	R	ρ	B	R	ρ
Dopo un allungamento dell' 8,8 %	0,584	62,2	9,82	0,158	72,6	12,0	0,165	91,7	15,2	0,167	104	16,3	0,158
	1,75	229	38,2	0,167	311	67,6	0,218	416,6	112,4	0,270	515	162,6	0,316
	2,92	488	113,5	0,233	808	283	0,351	1305	665	0,509	1895	1179	0,623
	4,30	1141	457	0,401	2785	1801	0,647	4870	3778	0,776	6416	5318	0,829
	5,84	2342	1255	0,536	4614	3319	0,720	6803	5438	0,799	8195	6890	0,841
	11,7	6119	3298	0,530	8316	5394	0,647	9801	7480	0,763	10571	8605	0,814
	29,2	11761	4455	0,379	12236	6530	0,534	12296	8091	0,659	12280	9140	0,744
	58,4	13759	4488	0,326	13579	6235	0,459	13546	8233	0,608	13437	9271	0,690
	111	15059	4466	0,297	14862	6453	0,434	14704	8102	0,551	14562	9205	0,632
Dopo un allungamento del 10,2 %	0,584	65,0	12,0	0,185	77,0	10,9	0,142	100	16,3	0,164	98,8	20,7	0,210
	1,75	249	42,5	0,171	331	78,6	0,238	440	119	0,271	458	132	0,289
	2,92	585	170,3	0,291	939	422	0,451	1474	819	0,555	1687	961	0,570
	4,30	1551	786	0,507	3260	2336	0,717	4936	3855	0,781	6203	5055	0,810
	5,84	2790	1659	0,595	4996	3735	0,748	6891	5558	0,807	8032	6683	0,832
	11,7	6590	3734	0,567	8578	5929	0,691	9986	7655	0,766	10592	8615	0,813
	29,2	11914	4935	0,414	12345	6814	0,552	12514	8353	0,668	12460	9107	0,731
	58,4	13841	5001	0,361	13781	6923	0,502	14054	8495	0,605	13661	9227	0,679
	111	15102	5066	0,336	14982	6923	0,462	14862	8463	0,569	14682	9293	0.633
Dopo un allungamento dell'11,6 %	0,584	63,3	7,64	0,121	76,4	9,8	0,129	94,5	14,1	0,150	100	17,4	0,174
	1,75	240	39,2	0,164	321	69,9	0,218	423,7	117,9	0,278	494	147,4	0,298
	2,92	501	111,3	0,222	819	295	0,360	1190	560	0,471	1649	914	0,554
	4,30	1146	451	0,393	2746	1769	0,644	4690	3549	0,757	6268	5143	0,821
	5,84	2359	1277	0,541	4624	3243	0,701	6858	6061	0,884	8288	6923	0,835
	11,7	6306	3571	0,566	8654	5755	0,662	10188	7819	0,767	10843	8801	0,812
	29,2	12132	4597	0,379	12596	6693	0,531	12733	8594	0,675	12722	9435	0,742
	58,4	14201	4488	0,316	14070	6705	0,477	13956	8572	0,614	13776	9435	0,685
	111	15610	4324	0,277	15354	6485	0,429	15222	8419	0,553	15086	9457	0,627

La fig. 3ª offre il disegno del 1° e 4° gruppo di curve normali. Qui è apparso un andamento interessante. I primi tre gruppi di curve appartengono ad un materiale magneticamente dolce, e sono assai simili fra loro; gli ultimi tre gruppi ad un materiale più crudo e sono quasi uguali tra loro. Quindi tutto l' incrudimento, sotto questo aspetto della curva normale di magnetizzazione, è avvenuto repentinamente. Così nei primi tre gruppi l' influenza degli sforzi di tensione è piccola e disordinata, mentre negli altri tre gruppi è grande e regolare. Anzi, in questi ultimi senz' eccezione il raddolcimento magnetico aumenta costantemente colla tensione.

Fig 3.

I numeri, che danno il valore del magnetismo residuo, dimostrano che la tensione conferisce anche un secondo carattere appartenente ai materiali magneticamente dolci (intendendo sempre per tali quelli che hanno la curva normale con i caratteri dianzi descritti), e cioè quello di aver un più grande magnetismo residuo. P. e. nel filo ricotto, non ancora stirato, in corrispondenza di $H = 5,84$ si aveva $\varrho = 0,927$. Questo rapporto ϱ già considerevole da una tensione di 5 kg. per mm² applicata al filo è innalzato a 0,955. Quando il filo ha subìto un allungamento del 2,8 %, 5 kg. di tensione innalzano il rapporto ϱ da 0,923 a 0,936 in corrispondenza di $H = 11,7$, ma 10 kg. di tensione l'abbassano da 0,923 a 0,843. Nelle curve del secondo tipo, cioè quelle ottenute dopo gli allungamenti dell' 8,8; 10,2; 11,6 %, il rapporto ϱ aumenta sempre coll' aumentare della tensione, e anche considerevolmente. P. e. dopo un allungamento del 10,2% in corrispondenza di $H = 2,92$, ϱ sale da 0,222 per una tensione di 15 kg. a 0,554, e in corrispondenza di $H = 4,30$, ϱ sale con una tensione di 15 kg. da 0,393 a 0,821.

Osserverò pure che potetti produrre dopo l'ultimo allungamento descritto un allungamento ulteriore del 3 %: ma ebbi esattamente (cioè con differenze comprese entro i limiti dei probabili errori sperimentali) le medesime curve normali e gli stessi valori del magnetismo residuo. Quell'estremo allungamento non aveva punto cambiato queste proprietà magnetiche.

Osservazione. Tanto l'elica magnetizzante che i fili in questo 3° studio erano così lunghi rispetto al loro diametro da poter ritenere praticamente trascurabile la reazione degli estremi. Anche le correnti di Faucault, stante il piccolo diametro dei fili, non avevano influenza sensibile.

Essendo l'elica primaria disposta come abbiamo già detto rispetto al meridiano magnetico, non si sentiva l'influenza del campo magnetico terrestre.

4° *studio*. Ad un filo di ferro puro di Svezia, come quello dell'ultima esperienza, ho fatto subire un allungamento permanente del 10 %, e quindi ho determinato gli elementi per una serie di cicli d'isteresi compiuti sotto diversi sforzi di tensione. Il metodo per ottenere i cicli era quello già usato da Ewing e descritto nel suo lavoro fatto colla gentile collaboratrice miss. Helen G. Klaassen, pubblicato nella *Lumière électrique*, vol. LII, pag. 136.

Le serie di cicli da me determinati furono quelli in corrispondenza delle forze magnetizzanti

1,75 2,92 3,21 3,80 4,67 5,84 11,68 20,44

e ogni serie comprende i cicli corrispondenti alla tensione di 0, 5, 10, 15 kg. per mm^2. Al principio di ogni serie il filo veniva più volte caricato e scaricato dai pesi perchè raggiungesse il suo assetto elastico, e anche venivano percorsi molti cicli magnetici, perchè fosse raggiunto eziandio l'assetto magnetico. Ogni ciclo fu da me disegnato in scala opportuna e ne furono determinate l'area e la forza coercitiva ([1]). Non riproduco il disegno dei singoli cicli perchè esso non offre nessuna particolarità. Nella tabella VIII ho riunito nella prima finca i valori della forza magnetizzante massima H_m, nella seconda quelli dell'induzione magnetica B_m corrispondente al vertice del ciclo, nella terza quelli del magnetismo residuo, nella quarta i valori della forza coercitiva C, nella quinta quelli dell'$\int B dH$. Questo differisce pochissimo dall'$\int I dH$, che dà la perdita di energia per isteresi. La differenza arriva a qualche centesimo solamente pei cicli corrispondenti alle maggiori forze magnetizzanti.

Per meglio comprendere la variazione della forza coercitiva in funzione della tensione, ho aggiunto nella penultima finca i valori del rapporto $\frac{R}{C}$ tra il magnetismo residuo e la forza coercitiva. La forza coercitiva si può considerare come quella forza magnetizzante necessaria per annullare il magnetismo residuo. Questo rapporto $\frac{R}{C}$ è dunque anch'esso una specie di permeabilità: volendo dargli un nome, forse potrebbe essere chiamato coercitività. Ora questa coercitività aumenta notevolmente coll'aumentare della tensione. Anche questo è un carattere dei materiali magneticamente dolci, e quindi troviamo confermato che la tensione conferisce al ferro incrudito le stesse proprietà magnetiche, che gli conferirebbe un raddolcimento, p. e. ottenuto colla ricozione.

Per meglio comprendere finalmente la variazione dell'area d'isteresi in funzione della tensione ho aggiunto nell'ultima finca i valori del rapporto $\frac{\int B dH}{B_m}$.

([1]) S'intende col nome di forza coercitiva il valore della forza magnetizzante (negativa), cui corrisponde il valore zero dell'intensità di magnetizzazione.

TABELLA VIII.

H	B_m				R				C				$\int B\,dH$				$\frac{R}{C}$				$\int B\,dH : B_m$			
	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15	T = 0	T = 5	T = 10	T = 15
1,75	244	261	283	312	40	47	53	59	0,32	0,32	0,33	0,33	97	118	128	151	125	146	160	179	0,398	0,452	0,452	0,485
2,92	558	615	714	788	170	198	258	300	0,90	0,98	1,10	1,15	749	889	1180	1359	189	202	234	261	1,34	1,45	1,65	1,72
3,21	705	795	919	1056	258	322	400	496	1,28	1,39	1,49	1,61	1532	1793	2214	2616	201	231	268	308	2,17	2,26	2,41	2,48
3,80	1120	1418	1593	1969	554	790	934	1254	2,06	2,25	2,41	2,54	3003	4275	5155	5787	269	351	388	494	2,68	3,01	3,24	2,94
4,67	1860	2297	2910	3588	1143	1504	2051	2697	2,69	2,92	3,04	3,17	7075	9545	13270	17736	425	514	675	850	3,81	4,15	4,56	4,98
5,84	2921	3523	4278	5186	1953	2516	3234	4119	3,29	3,44	3,50	3,64	14616	18712	24053	30560	594	732	925	1133	5,00	5,31	5,61	5,90
8,76	4671	5525	6400	7188	3118	3938	4846	5689	3,97	4,05	4,11	4,15	29412	36289	44596	50657	785	973	1178	1371	6,29	6,57	6,78	7,03
11,7	6236	7078	7922	8446	3993	4868	5743	6498	4,32	4,32	4,38	4,38	43090	49049	57101	61503	922	1124	1309	1482	6,90	6,91	7,19	7,26
20,4	9343	9846	10196	10502	5032	6017	6520	7330	4,67	4,67	4,56	4,56	81090	91553	93786	98252	1077	1288	1419	1605	8,67	9,33	9,19	9,35

Questo rapporto aumenta coll' aumentare della tensione in ogni caso, tranne che in due soli esempî, nei quali è più probabile che sia intervenuto qualche errore sperimentale. Questo campione, dunque, quando è sottoposto a tensione, dà origine ad una perdita di energia per isteresi, maggiore che quando è scarico.

Ewing nel lavoro dianzi citato aveva trovato con numerose esperienze che non sempre un materiale più magneticamente dolce nel senso che ha maggior permeabilità in corrispondenza di forze magnetizzanti medie e maggior magnetismo residuo, ha anche minore area d' isteresi e talvolta la stessa ricozione accresce la permeabilità e il magnetismo residuo, ma non diminuisce l' area d' isteresi: cosicchè esistono materiali magneticamente dolci nel senso che hanno grande permeabilità in corrispondenza di forze magnetizzanti medie e grande magnetismo residuo, e materiali magneticamente dolci nel senso che hanno piccola area d' isteresi. Dalle mie esperienze segue che la tensione può conferire al ferro incrudito i caratteri che sono proprî dei materiali magneticamente dolci nel primo senso, e non conferisce contemporaneamente quelli che appartengono ai materiali magneticamente dolci nel secondo senso. Anche per questo rispetto, adunque, la tensione si comporta come talvolta si comporta una ricozione.

Conchiuderò con un' osservazione generale. Nelle questioni di magnetismo l' esperienza finora non ha trovato leggi generali, ed ogni campione di ferro ha il proprio carattere e le sue proprie qualità. Perciò un risultato sperimentale non può estendersi a legge generale del magnetismo, ed ha valore relativo soltanto al campione cui si riferisce. Ogni serie di esperienze è un caso particolare dell'infinita varietà che offrono questi fenomeni. E così io presento i risultati miei solo come esempio, che potrà aiutare chi imprenda ricerche di questa specie, come piccolo contributo per accrescere il numero delle osservazioni già fatte coll' augurio, che si costituisca presto la sintesi di questo capitolo della fisica.

Riassunto. Le conseguenze che si possono trarre da questo studio sono le seguenti:

1° Quando un filo di ferro dolce, incrudito con lo stiramento, è sottoposto ad una forza magnetizzante costante e a cicli elastici di sollecitazioni longitudinali fra i limiti di P kg. di tensione e P kg. di compressione, l' induzione magnetica subisce anch' essa un processo ciclico di variazione, che è stabile dopo che sono stati fatti alcuni cicli completi.

2° L' influenza degli sforzi di tensione sopra un filo incrudito con lo stiramento dipende dall' allungamento, che il filo ha subìto. Dopo i primi allungamenti (a partire dal ferro ricotto) l'influenza è piccola e disordinata: aumentando l'allungamento, essa diventa repentinamente grande e regolare. Prima di un certo allungamento il filo si comporta come un materiale dolce; dopo di quell' allungamento esso perde alcuni caratteri del materiale dolce; ma li riacquista in una certa misura se è sottoposto a trazione.

3° Questo raddolcimento magnetico, che si ottiene con la tensione, consiste:

a) In una modificazione della curva normale, nel senso che il primo gomito è più accentuato, e corrisponde a forze magnetizzanti più deboli, e il tratto intermedio è più inclinato;

b) In un aumento del magnetismo residuo;

c) In una diminuzione della forza coercitiva;

d) In un aumento dell' area d' isteresi.

RELAZIONE

letta dal Corrisp. Favero relatore, a nome anche del Socio Blaserna, nella seduta del 5 giugno 1897, sulla Memoria del sig. ing. dott. Luigi Lombardi avente per titolo: *Ricerche teoriche e sperimentali sul trasformatore di fase Ferraris-Arnò.*

Il trasformatore di fase Ferraris-Arnò venne fatto conoscere dai suoi autori e proposto per usi industriali nella prima metà dello scorso anno 1896, e per quanto riguarda il compianto prof. G. Ferraris esso costituisce l'ultimo contributo da lui portato all'elettrotecnica, poco prima che un'immatura morte lo togliesse violentemente alla scienza ed all'industria.

Nella prima pubblicazione fatta per diffondere la conoscenza del nuovo apparecchio gli autori si limitarono ad indicarne la natura e le varie applicazioni. In una pubblicazione posteriore (luglio 1896), essi riferiscono sul risultato di alcune esperienze, fatte allo scopo di conoscere il rapporto di trasformazione e la differenza di fase tra la corrente primaria e la secondaria.

L'importanza del nuovo trasformatore indusse ben presto il sig. ing. dott. Luigi Lombardi, libero docente nel politecnico di Zurigo ad uno studio esteso ed accurato su di esso. Egli si occupò anzitutto della teoria, e lo assoggettò quindi ad una serie di esperienze fatte con cura e molto variate, affine di confrontarle colla teoria, e di stabilire sperimentalmente il modo di comportarsi del trasformatore in varie condizioni di funzionamento.

La Memoria presentata all'Accademia dal Lombardi, riassume appunto i risultati di queste sue ricerche teorico-pratiche.

Nella parte teorica l'A. fissato il concetto dal trasformatore di fase in quella forma più semplice che, senza togliere alla sua generalità, lo rende più facilmente accessibile al calcolo, si propone di esprimere analiticamente le intensità delle correnti nei due circuiti fissi primario e secondario, espresse in funzione del tempo, data essendo colla solita espressione sinusoidale la differenza di potenziale ai morsetti del primario. Egli è condotto così a dover determinare quattro incognite, le due ampiezze cioè e le due fasi di quelle intensità.

Le correnti che si sviluppano nei circuiti dell' armatura rotante possono esprimersi, quando sia nota la velocità di rotazione, in funzione delle correnti dei circuiti fissi, e degli elementi dell' armatura stessa. Tenuto dunque conto della reciproca influenza fra loro dei circuiti fissi e dei circuiti rotanti, si possono ottenere le due equazioni simultanee di intensità di corrente nei due circuiti fissi, affette unicamente dalle suddette quattro incognite. La condizione poi che le dette equazioni simultanee devono sussistere per un valore qualunque del tempo, permette di scindere ogni equazione in due, e si ha così il mezzo di determinare le quattro incognite cercate. Per la risoluzione delle equazioni ottenute, l' A., seguendo il metodo elegante del prof. Weber, ricorre all' uso delle variabili complesse, ed arriva così, determinate le incognite, ad esprimere in funzione del tempo le intensità nei due circuiti primario e secondario.

Gli sviluppi analitici seguiti in questa parte del lavoro furono tenuti dall' A.. certo per amore di brevità, forse troppo concisi, ciò che nuoce un po' alla chiarezza; ma è cosa a cui facilmente potrebbe rimediarsi durante la stampa.

Ottenute le espressioni fondamentali delle intensità nei circuiti primario e secondario, anche gli altri elementi, le intensità nei circuiti rotanti, le tensioni ecc,, restano determinate, e l' A. si accinge ad esaminarne analiticamente le espressioni per dedurne le leggi di funzionamento del trasformatore. Questa discussione delle formole è di natura sua laboriosa, attesa la complicazione delle espressioni analitiche trovate, ed attesa la difficoltà e spesso l' impossibilità di ottenere, ricorrendo alle condizioni della pratica, formole più semplici, approssimative.

Tuttavia l' A. svolge questa parte della sua ricerca con molto acume, ricorrendo spesso, quando la discussione diretta delle formole diventa troppo astrusa, a considerazioni d' ordine generale, che possono gettar qualche luce sull' andamento quantitativo dei fenomeni principali. Anche la considerazione di casi limiti, come per es. di sincronismo di rotazione, di carico nullo, di circuito secondario aperto, giovano a chiarire il funzionamento dell' apparecchio.

L' A. esamina così la differenza di fase fra le due correnti primaria e secondaria, differenza che formò oggetto di misure dirette da parte degl' inventori stessi dell' apparecchio, la differenza di fase tra la tensione primaria e la secondaria, misurata ai morsetti per un carico qualunque, le alterazioni nella grandezza del potenziale della corrente secondaria, ecc. L' A. passa quindi ad occuparsi del rendimento della trasformazione nelle condizioni di carico qualunque, e giunge a conchiudere che il rendimento del trasformatore di fase è di natura sua notevolmente inferiore a quello dei trasformatori ordinari, per cui il trasformatore di fase si presta con maggiore utilità ad essere impiegato per agevolare l' avviamento dei motori asincroni monofasi, che non per il servizio permanente di motori polifasi.

L' A. termina la parte teorica del suo lavoro discutendo opportunamente l' attendibilità delle supposizioni poste a base della teoria, e rileva specialmente il fatto che in pratica l' ipotesi che i campi originati dalle correnti siano proporzionali alle intensità di queste, ed in fase con esse, non è mai realizzata.

Nella parte pratica del suo lavoro, l' A., premessa una minuta descrizione degli apparecchi usati, rileva come fossero scopo delle sue misure la determinazione della intensità delle correnti primaria e secondaria e della loro differenza di fase; dell' energia

primaria e secondaria nel caso di carico induttivo; della differenza di potenziale primaria e secondaria e della loro differenza di fase; e delle differenze di fase fra le tensioni e le correnti rispettive; finalmente della velocità dell' armatura.

Molte esperienze furono a tal fine eseguite dall' A. trattando l' apparecchio come motore asincrono funzionante a vuoto con tensioni diverse, e funzionante sotto carico meccanico; come trasformatore di fase con carico secondario con e senza induzione. I risultati delle misure furono riassunti in tabelle, ed espressi mediante curve in grande scala ed opportunamente discussi con riferimento alla teoria.

L' A. termina il suo lavoro riassumendo in alcune proposizioni d' indole generale i risultati delle sue ricerche teoriche e sperimentali.

La Commissione, avuto riguardo all' importanza scientifica del nuovo trasformatore Ferraris-Arnò, ed alla sua possibile diffusione industriale, riconosce nel diligente lavoro teorico-pratico del sig. ing. dott. Luigi Lombardi un importante contributo scientifico alla completa conoscenza del nuovo apparecchio, e crede la sua Memòria degna di essere stampata per esteso negli Atti dell' Accademia.

Ricerche teoriche e sperimentali sul trasformatore di fase Ferraris-Arnò.

Memoria dell' ing. dott. LUIGI LOMBARDI

Il prof. Ferraris e l' ing. Arnò hanno recentemente ([1]) proposto un nuovo sistema di distribuzione elettrica della energia mediante correnti alternate, inteso ad ovviare ai principali inconvenienti che i sistemi monofasi presentano nell' avviamento dei motori, ed a quelli che ai polifasi sono inerenti per la complicanza delle condutture. Il sistema riposa sull' impiego di trasformatori a spostamento di fase, cioè di apparecchi i quali, alimentati con una semplice corrente alternata da un circuito monofase ordinario, generano in un circuito od in un sistema di circuiti secondarî una forza elettromotrice ed una corrente, od un sistema di forze elettromotrici e di correnti, aventi rispetto alla differenza di potenziale primaria una differenza di fase conveniente. Questi apparecchi sono essenzialmente motori asincroni a corrente alternata, al cui avviamento si provvede cogli artificî ordinarî, e sul cui induttore fisso oltre al sistema primario di spire sono distribuiti i sistemi secondarî, spostati rispetto al primo e l' uno rispetto all' altro di angoli corrispondenti alle differenze di fase desiderate. Le forze elettromotrici che le correnti d' armatura inducono nei sistemi fissi di spire sono evidentemente spostate di fase di angoli uguali; ma le differenze di potenziale ai morsetti esterni e le correnti nei circuiti hanno fasi e grandezze che dipendono in modo complicato dalle resistenze, dalle induzioni proprie e mutue dei circuiti stessi e dell' armatura, e da tutti gli elementi interni ed esterni del sistema.

A mettere in chiaro questa dipendenza è destinata la presente Memoria, la quale contiene la teoria del trasformatore di fase ed i risultati di una serie di misure sopra un apparecchio di questa natura che, per gentile consenso del prof. dott. H. F. Weber, furono eseguite da me nel laboratorio di elettrotecnica del Politecnico Federale di Zurigo, servendomi di uno dei motori asincroni alimentati dalla rete generale di distribuzione della città. Come avvolgimento secondario fu utilizzato un sistema di spire spostato di mezza distanza polare rispetto al primario, e destinato a portare nell' avviamento una corrente differente di fase dalla principale per generare temporaneamente un campo rotante.

([1]) G. Ferraris e R. Arnò, *Un nuovo sistema di distribuzione elettrica dell'energia mediante correnti alternative.* Torino, 1896.

I. Teoria del trasformatore di fase.

1. Per formulare la teoria del trasformatore di fase dal punto di vista più generale converrebbe porre per ognuno dei circuiti fissi e d'armatura l'equazione tra la resistenza ed i valori momentanei dell'intensità di corrente e della forza elettromotrice, introducendo per questa la somma di tutte quelle dovute a sorgenti esterne e ad induzioni proprie e mutue, e farne la trattazione come di equazioni differenziali simultanee. Però la simmetria di costruzione dell'armatura permette subito di introdurre una notevole semplificazione. Difatti le correnti nei singoli circuiti di questa, quando essa è in movimento, devono essere della stessa forma, avere cioè la stessa ampiezza, ed una differenza di fase corrispondente all'angolo di cui essi sono inclinati; esse possono quindi esprimersi in funzione delle correnti dei circuiti fissi e degli elementi dell'armatura. A loro volta le forze elettromotrici che quelle correnti inducono nei circuiti fissi vengono espresse in funzione delle correnti da cui questi sono percorsi, e degli elementi dei circuiti medesimi e dell'armatura, e le equazioni simultanee si riducono al numero di circuiti primario e secondarî.

Conviene considerare per semplicità un trasformatore a due poli, e supporre l'induttore costituito da due soli sistemi di spire, primario e secondario, inclinati fra loro di 90°. Supponendo che la differenza di potenziale ai morsetti del primario abbia forma sinusoidale e fase zero, in modo da potersi rappresentare con:

$$p = P \cos (2\pi n t),$$

avranno forma analoga le intensità di corrente primaria e secondaria, con ampiezze e fasi che noi dobbiamo determinare, e si potranno rappresentare con:

$$I_1 = A_1 \cos (2\pi n t - C_1),$$
$$I_2 = A_2 \cos (2\pi n t - C_2).$$

Nell'armatura potremo considerare parimenti due soli circuiti chiusi, composti di un numero qualunque di spire $\frac{z}{2}$ ed inclinati di 90°; oppure un sistema di z spire chiuse, uniformemente distribuita ad angoli $\frac{\pi}{z}$ fra di loro. Nel primo caso i due circuiti non esercitano alcuna induzione mutua, e le correnti dipendono solo dalla forza elettromotrice, dalla resistenza e dalla selfinduzione. Nel secondo caso ognuna delle spire subisce una induzione mutua da parte di tutte le altre, eccettuata quella posta in un piano ad essa perpendicolare. Il coefficiente d'induzione relativo si può rappresentare con una grandezza variante proporzionalmente al coseno dell'angolo che le spire chiudono tra di loro; ma siccome le correnti rispettive differiscono a loro volta in fase dello stesso angolo, la somma delle forze elettromotrici di induzione mutua si riduce a $\frac{z-2}{2}$ termini eguali, contenenti la derivata della corrente nella spira che si considera. È dunque ancora lecito di riunire tutte le forze elettromotrici

d'induzione propria e mutua in un termine solo, avente la forma d'una forza elettromotrice di selfinduzione, dove però il coefficiente costante ha il significato che risulta dalla osservazione precedente. Ed in base a questa si può scrivere subito l'espressione della intensità momentanea di corrente in uno qualunque dei circuiti d'armatura.

Consti l'armatura di due circuiti soli, posti a 90° tra loro, e facenti rispettivamente l'angolo x ed $x + 90°$ colla direzione del campo generato dalla spirale primaria. Supponendo che l'armatura ruoti nel senso degli angoli positivi con una velocità di n_1 giri al 1″, e supponendo che nell'origine dei tempi il primo circuito sia normale alle spire primarie, si potrà porre

$$x = 2\pi n_1 t.$$

Nello spazio in cui ruota l'armatura sono ora da considerare i campi semplicemente alternati generati dalle correnti primaria e secondaria. Noi facciamo l'ipotesi che questi campi siano uniformi in tutto lo spazio in cui l'armatura si muove, in modo che il flusso totale d' induzione attraversante le spire sia proporzionale alla proiezione della superficie di queste sul piano normale alla direzione del campo; inoltre che i campi abbiano una intensità proporzionale alla intensità delle correnti da cui sono originati, e la stessa fase di queste, siano cioè mantenuti senza alcuna dissipazione di energia per isteresi. Le tre ipotesi non sono mai realizzate in modo rigoroso negli apparecchi industriali, dove si ricorre a materiali magnetici per aumentare l'induzione. Tuttavia la prima può essere giustificata coll'adozione di una intensità media opportuna; la seconda può ancora ritenersi verificata con qualche approssimazione se il ferro non è utilizzato in una regione prossima alla saturazione. Per misure di confronto naturalmente converrà procedere con alcune precauzioni, come si dirà discutendo i risultati sperimentali. Quanto all'isteresi, sarà discussa più tardi l'influenza che essa esercita sui risultati che verremo ottenendo.

Ciò premesso, noi potremo rappresentare rispettivamente i due campi dovuti alle correnti primaria e secondaria con

$$\alpha_1 Z_1 A_1 \cos(2\pi n t - C_1) \quad \text{ed} \quad \alpha_2 Z_2 A_2 \cos(2\pi n t - C_2)\,;$$

indicando con Z_1 e Z_2 i numeri di spire dei due circuiti, e con α_1 e α_2 due coefficienti dipendenti dalla forma e distribuzione dei circuiti medesimi e dalla permeabilità magnetica del materiale adoperato. Dicendo f la superficie di uno dei circuiti d'armatura, w la resistenza ohmica ed l il coefficiente di selfinduzione, definito colle avvertenze precedenti nel caso in cui esistano circuiti inclinati ad angolo diverso da 90°, il flusso totale d'induzione attraversante il primo circuito sarà:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 Z_1 A_1 f \cos(2\pi n t - C_1) \operatorname{sen} x - \alpha_2 Z_2 A_2 f \cos(2\pi n t - C_2) \cos x \\ &= \frac{1}{2} \alpha_1 Z_1 A_1 f [\operatorname{sen}(2\pi n t + x - C_1) - \operatorname{sen}(2\pi n t - x - C_1)] - \\ &- \frac{1}{2} \alpha_2 Z_2 A_2 f [\cos(2\pi n t + x - C_2) + \cos(2\pi n t - x - C_2)]\,. \end{aligned}$$

La scomposizione dei due prodotti di seni e coseni nella somma algebrica di due seni o coseni corrisponde al concetto adottato dal prof. Ferraris nella sua elegante *Trattazione dei vettori rotanti* [1], nella quale egli sostituisce alla considerazione di un campo o vettore alternativo quella di due campi o vettori aventi intensità o grandezza eguale alla metà di quello dato, e rotanti in senso opposto con velocità corrispondente alla frequenza del primo. Naturalmente le velocità di rotazione relative ai circuiti dell' armatura risultano rispettivamente dalla somma e dalla differenza della velocità di questa e di quelli. Perciò,avendo la forza elettromotrice indotta dal circuito primario e secondario la grandezza e la fase della derivata di quel flusso totale, la intensità momentanea della corrente nel primo circuito d' armatura sarà:

$$\begin{aligned} i_1 = \frac{\alpha_1 Z_1 A_1 f}{2} & \left[\frac{2\pi(n-n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n-n_1)^2 l^2}} \cos\left(2\pi(n-n_1)t - C_1 - c_1\right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi(n+n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n+n_1)^2 l^2}} \cos\left(2\pi(n+n_1)t - C_1 - c_2\right) \right] - \\ - \frac{\alpha_2 Z_2 A_2 f}{2} & \left[\frac{2\pi(n-n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n-n_1)^2 l^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi(n-n_1)t - C_2 - c_1\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\pi(n+n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n+n_1)^2 l^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi(n+n_1)t - C_2 - c_2\right) \right]; \end{aligned}$$

dove gli angoli c_1 e c_2 sono notoriamente definiti dalle relazioni:

$$\operatorname{tg} c_1 = \frac{2\pi(n-n_1)l}{w}; \qquad \operatorname{tg} c_2 = \frac{2\pi(n+n_1)l}{w}.$$

Nel secondo circuito d' armatura evidentemente le forze elettromotrici e quindi le intensità di corrente hanno espressioni analoghe, eccetto che le fasi sono cambiate:

$$\begin{aligned} i_2 = \frac{\alpha_1 Z_1 A_1 f}{2} & \left[\frac{2\pi(n-n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n-n_1)^2 l^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi(n-n_1)t - C_1 - c_1\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\pi(n+n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n+n_1)^2 l^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi(n+n_1)t - C_1 - c_2\right) \right] + \\ + \frac{\alpha_2 Z_2 A_2 f}{2} & \left[\frac{2\pi(n-n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n-n_1)^2 l^2}} \cos\left(2\pi(n-n_1)t - C_2 - c_1\right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi(n+n_1)}{\sqrt{w^2+4\pi^2(n+n_1)^2 l^2}} \cos\left(2\pi(n+n_1)t - C_2 - c_1\right) \right]. \end{aligned}$$

Queste espressioni sono naturalmente analoghe a quelle delle correnti d' armatura nella teoria dei motori monofasi, completate coi termini corrispondenti all' azione del campo secondario. In particolare esse ridanno quelle della teoria dei motori a campo rotante se $C_2 - C_1 = 90^0$ ed $\alpha_1 Z_1 A_1 = \alpha_2 Z_2 A_2$.

Esse permettono perciò di calcolare subito il momento di rotazione che l' armatura subisce nel campo delle due spirali primaria e secondaria, e le perdite di energia nel rame dell' armatura.

[1] Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, XLIV, 1893.

Ma il momento non ha importanza speciale in questo caso, se l'apparecchio funziona solo come trasformatore, non richiedendosi altra energia meccanica che quella necessaria a mantenere l'armatura in movimento. L'espressione della energia dissipata nell'armatura potrà semplificarsi più avanti, quando si sarà definito il significato fisico delle grandezze caratteristiche che entrano in essa, e si sarà imparato a dedurre queste dall'esperienza.

2. Le equazioni delle intensità di corrente nei due circuiti fissi, aventi rispettivamente resistenze ohmiche W_1 e W_2 e coefficienti di selfinduzione L_1 ed L_2, avranno naturalmente la forma:

$$I_1 W_1 + L_1 \frac{d I_1}{dt} = p + e'_1 + e''_1 ;$$

$$I_2 W_2 + L_2 \frac{d I_2}{dt} = e'_2 + e''_2 ;$$

indicando con e le forze elettromotrici indotte nei circuiti fissi dalle correnti d'armatura, e non facendosi luogo a considerare alcuna forza elettromotrice di mutua induzione dei circuiti medesimi, supposti normali l'uno all'altro. Le forze elettromotrici indotte dalle correnti d'armatura si hanno derivando i flussi di induzione che esse generano attraverso ai circuiti fissi, e che a loro volta si esprimono in funzione di quelle correnti come i flussi generati nelle spire d'armatura in funzione delle correnti primaria e secondaria. I flussi totali rispettivamente pel circuito primario e secondario sono dunque:

$$\alpha_1 Z_1 f [\quad i_1 \operatorname{sen} x + i_2 \cos x] ;$$
$$\alpha_2 Z_2 f [- i_1 \cos x + i_2 \operatorname{sen} x] ;$$

dove al posto di f naturalmente si potrebbe introdurre per maggior simmetria il numero di spire di uno dei circuiti d'armatura, definendo però α_1 e α_2 in modo che essi dipendano contemporaneamente dalla forma delle spire fisse e di quelle mobili, oltrechè dalla permeabilità del mezzo adoperato. Esprimendo x in funzione del tempo ed eseguendo le derivate si hanno le forze elettromotrici. Si denomini per semplicità:

$$\tfrac{1}{2} (\alpha_1 Z_1 f)^2 = M_1^2 ; \quad \tfrac{1}{2} (\alpha_2 Z_2 f)^2 = M_2^2 ; \quad \frac{\alpha_1 \alpha_2 Z_1 Z_2 f^2}{2} = M_1 M_2 .$$

Questi coefficienti giuocano la parte degli ordinarî coefficienti di induzione mutua, e ne hanno le dimensioni, essendo α reciproco di una lunghezza. Essi però hanno una forma più generale, perchè, se si avessero nell'armatura m circuiti di superficie f ripartiti in $\frac{m}{2}$ coppie di circuiti rispettivamente perpendicolari, il coefficiente di selfinduzione di ciascuno di essi piglierebbe il significato a cui si è già accennato, ma i coefficienti precedenti diventerebbero semplicemente $\frac{m}{2}$ volte maggiori; difatti la somma di forze elettromotrici indotte da ogni coppia di circuiti normali è indipendente dalla posizione di questa.

Si denominino inoltre per brevità:

$$d = 2\pi n \frac{2\pi (n - n_1)}{\sqrt{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}};$$

$$s = 2\pi n \frac{2\pi (n + n_1)}{\sqrt{w^2 + 4\pi^2 (n + n_1)^2 l^2}};$$

grandezze che hanno dimensioni reciproche di una resistenza e sono funzione degli elementi dell' armatura e della velocità di rotazione.

Introducendo per I_1 I_2 e p le forme già scritte, si avranno pei due circuiti primario e secondario rispettivamente le equazioni:

$$\begin{aligned} W_1 A_1 \cos(2\pi nt - C_1) - L_1 A_1 \,.\, 2\pi n \,.\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_1) - P \cos(2\pi nt) = \\ = M_1^2 A_1 [- d \cos(2\pi nt - C_1 - c_1) - s \cos(2\pi nt - C_1 - c_2)] + \\ + M_1 M_2 A_2 [d\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_2 - c_1) - s\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_2 - c_2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 A_2 \cos(2\pi nt - C_2) - L_2 A_2 \,.\, 2\pi n \,.\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_2) = \\ = M_1 M_2 A_1 [- d\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_1 - c_1) + s\, \mathrm{sen}\,(2\pi nt - C_1 - c_2)] + \\ + M_2^2 A_2 \quad [- d \cos(2\pi nt - C_2 - c_1) - s \cos(2\pi nt - C_2 - c_2)]. \end{aligned}$$

La risoluzione di queste equazioni, la quale si può effettuare coi soliti metodi di scomposizione delle funzioni trascendenti, riesce più semplice se si introducono al posto di queste le variabili complesse, come il prof. Weber fa con vantaggio nella trattazione di quasi tutti i problemi di correnti alternate.

Sostituendo dappertutto:

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\, y = \frac{1}{2j} (e^{iy} - e^{-iy})$$

dove e è la base dei logaritmi, ed $i = \sqrt{-1}$, si avrà per la differenza di potenziale ai morsetti primarî l' espressione:

$$p = \frac{P}{2} (e^{i2\pi nt} + e^{-i2\pi nt});$$

e per la natura della dipendenza fisica tra le grandezze che qui si considerano si potranno porre senz' altro sotto forma analoga tutte le intensità di corrente. In particolare:

$$I_1 = \frac{\mathrm{A}_1}{2} e^{\,i2\pi nt} + \frac{\mathrm{A}_1^1}{2} e^{\,-i2\pi nt};$$

ed

$$I_2 = \frac{\mathrm{A}_2}{2} e^{\,i2\pi nt} + \frac{\mathrm{A}_2^1}{2} e^{\,-i2\pi nt};$$

dove le nuove costanti hanno rispetto alle precedenti un significato ben determinato:

$$\mathrm{A}_1 = A_1 e^{-ic_1}; \qquad \mathrm{A}_2 = A_2 e^{-ic_2}; \qquad \mathrm{A}_1^1 = \mathrm{A}_1 e^{\,ic_1}; \qquad \mathrm{A}_2^1 = \mathrm{A}_2 e^{\,ic_2}.$$

Queste costanti si ricavano subito dalle equazioni trasformate, scindendosi, ognuna di queste in due, di cui i termini contengono rispettivamente l'unità immaginaria col segno opposto. Le equazioni per le due prime costanti sono:

$$A_1 [iW_1 - 2\pi n L_1 + iM_1^2 (d e^{-ic_1} + s e^{-ic_2})] + A_2 M_1 M_2 (- d e^{-ic_1} + s e^{-ic_2}) = Pi .$$
$$A_1 M_1 M_2 (d e^{-ic_2} - s e^{-ic_2}) + A_2 [iW_2 - 2\pi n L_2 + iM_2^2 (d e^{-ic_1} + s e^{-ic_2})] = 0 .$$

Indicando compendiosamente con a e b, a_1 e b_1 i coefficienti delle incognite in queste due equazioni lineari, si avrà senz'altro:

$$A_1 = Pi \cdot \frac{b_1}{a b_1 - a_1 b} ; \qquad A_2 = - Pi \cdot \frac{a_1}{a b_1 - a_1 b} .$$

Simili espressioni risolvono completamente il problema, perchè esse si possono mettere sotto la forma di quozienti di funzioni complesse:

$$A_1 = Pi \frac{\beta_1 + i\gamma_1}{\mu + i\nu} ; \qquad A_2 = - Pi \cdot \frac{\beta_2 + i\gamma_2}{\mu + i\nu} .$$

Sostituendo

$$-1 = e^{-i\pi} ; \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}} ;$$

ed introducendo i moduli dei complessi si ha:

$$A_1 = P \frac{\sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} e^{i \operatorname{arctg} \frac{\gamma_1}{\beta_1} - i \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\mu} + i \frac{\pi}{2}}$$
$$A_2 = P \frac{\sqrt{\beta_2^2 + \gamma_2^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} e^{i \operatorname{arctg} \frac{\gamma_2}{\beta_2} - i \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\mu} - i \frac{\pi}{2}}$$

Le altre due costanti hanno forma analoga col segno di j cambiato; perciò le soluzioni delle nostre equazioni si possono mettere senz'altro sotto la forma:

$$I_1 = P \frac{\sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \cos \left(2\pi n t + \operatorname{arctg} \frac{\gamma_1}{\beta_1} - \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\mu} + \frac{\pi}{2}\right) ;$$
$$I_2 = P \frac{\sqrt{\beta_2^2 + \gamma_2^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \cos \left(2\pi n t + \operatorname{arctg} \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\mu} - \frac{\pi}{2}\right) .$$

E da queste si possono ricavare subito le espressioni delle intensità efficaci delle due correnti in funzione della differenza efficace di potenziale primaria:

$$I_1 = P_1 \frac{\sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} , \quad I_2 = P_1 \frac{\sqrt{\beta_2^2 + \gamma_2^2}}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} ;$$

e la differenza di fase tra le due correnti:

$$C_2 - C_1 = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_1}{\beta_1} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_2}{\beta_2} + \pi ,$$

e la differenza di fase tra una qualunque delle correnti e la differenza di potenziale medesima:

$$C_1 = -\operatorname{arctg}\frac{\gamma_1}{\beta_1} + \operatorname{arctg}\frac{\nu}{\mu} - \frac{\pi}{2}$$

$$C_2 = -\operatorname{arctg}\frac{\gamma_2}{\beta_2} + \operatorname{arctg}\frac{\nu}{\mu} + \frac{\pi}{2}$$

3. Le formole precedenti, le quali compendiano nelle sue linee generali tutta la teoria del trasformatore di fase, hanno tutte una forma assai complicata. Non altrimenti nel problema della doppia trasformazione di correnti alternate mediante trasformatori ordinarî qualunque ogni elemento di questi e del circuito esterno ha un' influenza su ciascuna delle grandezze elettriche che ivi intervengono, e le formole finali non si semplificano se non in base ad alcune ipotesi che s' accordano sufficientemente colle condizioni della pratica.

Nel caso attuale molte delle ipotesi che valgono pei trasformatori ordinari per riguardo alle resistenze dei circuiti ed alla relazione dei coefficienti di selfinduzione e di induzione mutua non sono assolutamente accettabili in genere, perchè l' apparecchio ha essenzialmente lo scopo di trasformare la fase e non la grandezza delle correnti, e la costruzione del circuito magnetico è subordinata alla necessità di mantenere l' armatura in movimento. Tuttavia nelle condizioni in cui apparecchi simili funzionano praticamente alcune semplificazioni sono ancora permesse ed hanno analogia con quelle solitamente introdotte nella teoria dei motori asincroni monofasi.

Difatti in questi il momento di rotazione va molto rapidamente crescendo quando cresce la differenza fra il numero dei giri dell' armatura e il numero di periodi della corrente primaria; per cui questa differenza, la *Schlüpfung* secondo i tedeschi, è sempre piccolissima, e rappresenta una frazione molto esigua del numero di giri se non si arriva a carichi meccanici molto considerevoli. Nel trasformatore di fase, se esso non funziona contemporaneamente come motore, il solo lavoro meccanico è quello di tener l' armatura in movimento, e sebbene la *Schlüpfung* non dipenda esclusivamente da questo, ma anche dal carico elettrico, essa si mantiene a parità di energia primaria notevolmente inferiore a quella del motore, e non supera un valore relativo piccolissimo. Nel trasformatore da me esaminato essa supera di poco $\frac{1}{2}$ % della velocità normale a pieno carico elettrico, e 3 % nel motore per carico normale.

Risulta da ciò che i termini contenenti come fattore $s \cos c_2$ giuocano sempre una piccola parte rispetto a quelli con $d \cos c_1$, poichè il rapporto di queste grandezze vale

$$\frac{n+n_1}{n-n_1} \cdot \frac{w^2+4\pi^2(n-n_1)^2 l^2}{w^2+4\pi^2(n+n_1)^2 l^2},$$

e si ridurrebbe ad $\frac{n-n_1}{n+n_1}$ se la resistenza w fosse trascurabile; nè cessa di essere piccolissimo finchè w non è di un ordine di grandezza molto superiore a $2\pi(n-n_1)l$. In realtà si verifica nel funzionamento dell' apparecchio che l' angolo

$$c_1 = \operatorname{arctg}\frac{2\pi(n-n_1)l}{w}$$

è sempre almeno di parecchi gradi, e le premesse fatte sono in genere giustificate. Per contro non sogliono essere trascurabili gli uni rispetto agli altri i termini contenenti

$$d \operatorname{sen} c_1 = \frac{2\pi n}{l} \operatorname{sen}^2 c_1 \,, \qquad \text{ed} \qquad s \operatorname{sen} c_2 = \frac{2\pi n}{l} \operatorname{sen}^2 c_2 \,,$$

perchè $\operatorname{sen}^2 c_1$ non è sempre piccolissimo rispetto all'unità, mentre $\operatorname{sen}^2 c_2$ si scosta poco da 1. Si può però allora sostituire con grande approssimazione:

$$d \operatorname{sen} c_1 + s \operatorname{sen} c_2 = \frac{2\pi n}{l} \frac{w^2 + 8\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}$$

$$d \operatorname{sen} c_1 - s \operatorname{sen} c_2 = \frac{2\pi n}{l} \frac{w^2}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2} = -\frac{2\pi n}{l} \cos^2 c_1 \,.$$

La differenza di fase tra le due correnti, primaria e secondaria, la quale presenta un certo interesse perchè ad essa si riferiscono le sole misure pubblicate dagli autori del nuovo sistema [1], si ricava in una forma non del tutto complicata dalle equazioni precedenti se, dicendo compendiosamente D il denominatore complesso delle espressioni delle costanti, queste si scrivono:

$$\frac{D}{Pi} A_1 = [-2\pi n L_2 + M_2^2 (d \operatorname{sen} c_1 + s \operatorname{sen} c_2)] + i [W_2 + M_2^2 (d \cos c_1 + s \cos c_2)] \,;$$

$$\frac{D}{Pi} A_2 = - M_1 M_2 (d \cos c_1 - s \cos c_2) + i M_1 M_2 (d \operatorname{sen} c_1 - s \operatorname{sen} c_2) \,.$$

Risulta in generale colle semplificazioni adottate:

$$C_2 - C_1 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{W_2 + M_2^2 \dfrac{2\pi n \,.\, 2\pi (n - n_1) w}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}}{2\pi n L_2 - M_2^2 \dfrac{2\pi n}{l} \dfrac{w^2 + 8\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}} - \operatorname{arctg} \frac{w}{2\pi (n - n_1) l} \,.$$

Ricordando la definizione data dell'angolo c_1, che rappresenta il ritardo di fase subito dalle correnti d'armatura rispetto alle forze elettromotrici indotte alla frequenza $n - n_1$ si può scrivere:

$$C_2 - C_1 = c_1 + \operatorname{arctg} \frac{2\pi n L_2}{W_2} \frac{1 - \dfrac{M_2^2}{L_2 l} \cdot \dfrac{w^2 + 8\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}}{1 + \dfrac{w}{W_2} \cdot \dfrac{2\pi n \,.\, 2\pi (n - n_1) M_2^2}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}} \,.$$

Quando il circuito secondario è aperto, questa differenza di fase, che è fisicamente ben definita come limite nel caso di corrente secondaria infinitamente piccola, si ri-

[1] Ferraris e Arnò, *Alcune esperienze sui trasformatori a spostamento di fase.* L'Elettricista, 7, 1896.

duce a c_1 come più semplicemente si può vedere serivendo l' espressione della forza elettromotrice che le correnti d' armatura, indotte dalle primarie, a loro volta inducono nei circuiti secondarî. Questa differenza di fase dipende allora unicamente dagli elementi dell' armatura e dalla *Schlüpfung*, e crescendo questa mediante forze esterne frenanti deve andar aumentando in conformità di quella legge tangenziale. Che se, funzionando normalmente il trasformatore, si lascia diminuire la resistenza secondaria, crescere cioè la corrente, cresce pure $n - n_1$, in modo però molto lento, come si disse, onde la differenza di fase delle due correnti va rapidamente aumentando ed ha per limite $c_1 + 90°$. Il valore massimo che si potrebbe realizzare chiudendo il secondario in corto circuito sarebbe naturalmente minore di quest' angolo di una quantità dipendente dalla resistenza interna delle spire e dagli altri elementi del trasformatore.

Se l' esperienza potesse dare la fase della corrente secondaria quando la resistenza è infinita, ossia la fase della forza elettromotrice secondaria rispetto alla corrente primaria corrispondentemente alla velocità di sincronismo dell' armatura, si vede senza introdurre le semplificazioni prima adoperate che essa varrebbe $90° - c_2$. Si vedrà discutendo i risultati delle misure come possa ricavarsi quest' angolo dalla curva sperimentale, e con quali restrizioni lo si possa confrontare col valore calcolato.

4. Avendo espresso nel caso generale la differenza di fase delle due correnti, basta, per avere la fase della corrente secondaria rispetto alla tensione primaria, trovare la fase della corrente primaria. Gli sviluppi a ciò necessarî non offrono alcuna difficoltà algebrica; per contro essi non conducono, nemmeno colle semplificazioni già accennate, che sono pur le sole valevoli nei casi pratici, ad alcuna espressione suscettibile di una facile interpretazione. D' altra parte considerazioni generali bastano a far prevedere l' andamento del fenomeno.

La corrente primaria del trasformatore di fase può ancora considerarsi risultante di due; una corrente in fase colla tensione, la quale sopperisce alle perdite di energia nelle resistenze metalliche primarie interne al trasformatore, e secondarie interne ed esterne, crescenti col carico, ed in genere alla somma delle energie di che il trasformatore abbisogna pel suo funzionamento e per l' alimentazione dei circuiti esterni; ed una corrente differente di fase di 90° rispetto alla tensione, destinata a produrre il flusso d' induzione nel sistema, che per brevità possiamo dire componente di magnetizzazione. La prima componente va crescendo in diretta relazione col carico, come avviene parimenti nei trasformatori ordinarî e nei motori a corrente alternata. La seconda componente resta negli ordinarî trasformatori, finchè essi sono assoggettati ad un carico secondario senza induzione, sensibilmente costante; di più, per la natura del circuito magnetico in essi realizzato, costituito in genere interamente da materiale di grande permeabilità, questa componente è piccolissima, e giuoca rispetto alla prima una piccolissima parte appena il carico si accosta a valori normali, in modo che la differenza di fase tra la corrente totale e la tensione rapidamente diminuisce e tende a zero. Nei motori a corrente alternata e nei trasformatori che si considerano qui il circuito magnetico contiene necessariamente un interferro di dimensioni considerevoli, al quale è essenzialmente dovuta quella componente di magnetizzazione. Di più una dispersione notevole di induzione magnetica avviene sempre, in quanto non tutte le linee di induzione generate da uno dei circuiti

inducenti attraversano uno qualunque degli indotti; e questa dispersione relativa, che dipende essenzialmente dalla forma dei circuiti, ma non può mai evitarsi del tutto, cresce necessariamente col carico, mentre cresce per contro l' intensità del campo necessaria al buon funzionamento dell' apparecchio. Per queste ragioni la componente di magnetizzazione è sempre di un ordine di grandezza paragonabile a quella di carico, ed origina nella corrente totale una differenza di fase rispetto alla tensione molto considerevole. Questa differenza di fase va naturalmente diminuendo al crescere del carico; ma perchè contemporaneamente cresce quella componente di magnetizzazione, la differenza di fase va diminuendo sempre più lentamente, ed assume in un motore ed in un trasformatore ben proporzionati, funzionanti in condizioni normali, valori non grandemente differenti. Il valore naturalmente si conserva tanto maggiore nel trasformatore se questo alimenta a sua volta un circuito secondario con induzione. Se si vuole esprimere quella differenza di fase in funzione della *Schlüpfung*, perchè da essa dipendono direttamente il momento di rotazione e tutte le grandezze elettriche che si considerano, si trova nei motori a campo rotante una relazione inversa lineare tra la tangente di quell' angolo e questa differenza di velocità. Nei motori asincroni monofasi, considerati secondo il concetto di Ferraris come la combinazione di due motori a campo rotante, funzionanti con velocità d' armatura $n - n_1$ ed $n + n_1$ rispettivamente in senso opposto, la presenza del 2° campo complica le espressioni, ma non altera in sostanza l' andamento del fenomeno. Lo stesso può dirsi dei trasformatori di fase.

Resta a vedere come esprimasi la differenza di fase iniziale, quando l' armatura ruota con velocità prossima al sincronismo, essendo il carico esterno nullo; o, con un significato fisico ancor meglio determinato, quando l' armatura ruotasse veramente con velocità di sincronismo, essendo ridotte a zero tutte le resistenze meccaniche che si oppongono al movimento.

Questa fase, e l' intensità efficace della corrente primaria quando il secondario è aperto, che sono allo stesso tempo la fase e l' intensità della corrente a vuoto del motore, si deducono subito dalle equazioni semplificate del circuito primario della forma:

$$A_1 \left\{ -2\pi n L_1 + M_1^2 (d \operatorname{sen} c_1 + s \operatorname{sen} c_2) + i \left[W_1 + M_1^2 (d \cos c_1 + s \cos c_2) \right] \right\} = Pi .$$

Da esse infatti, supponendo $n = n_1$ e $\operatorname{sen}^2 c_2 = 1$ si ha:

$$I_{1.n} = \frac{P_1}{\sqrt{\left(2\pi n L_1 - M_1^2 \frac{2\pi n}{l}\right)^2 + \left(W_1 + M_1^2 \frac{w}{2l^2}\right)^2}} ;$$

$$C_{1.n} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{W_1 + M_1^2 \frac{w}{2\,l^2}}{2\pi n L_1 - M_1^2 \frac{2\pi n}{l}} .$$

In quasi tutti i casi pratici il secondo termine sotto al radicale contenente le resistenze suol avere poca importanza rispetto al primo contenente i coefficienti di induzione, onde con grande approssimazione si può ritenere:

$$I_{1.n} = \frac{P_1}{2\pi n L_1 \left(1 - \frac{M_1^2}{L_1 l}\right)} ;$$

$$C_{1.n} = \text{arctg} \frac{2\pi n L_1}{W_1} \frac{1 - \frac{M_1^2}{L_1 l}}{1 + \frac{M_1^2 w}{2l^2 W_1}} .$$

Più rigorosamente il valore dato approssimativamente per $I_{1.n}$ vale per $\frac{I_{1.n}}{\text{sen } C_{1.n}}$ nel caso in cui quest' angolo differisca notevolmente da 90°.

Se i circuiti d'armatura fossero aperti, l' intensità efficace e la fase della corrente sarebbero come in un trasformatore ordinario:

$$I = \frac{P_1}{2\pi n L_1} ; \quad \text{e} \quad C = \text{arctg} \frac{2\pi n L_1}{W_1} .$$

La reazione dell' armatura rotante con velocità di sincronismo è dunque ancora tale da aumentare gli effetti apparenti della resistenza e diminuire quelli della selfinduzione del primario, in modo analogo, sebbene in proporzione minore, di quel che farebbe un sistema fisso di spire chiuse in corto circuito, in questo come in un trasformatore ordinario. Difatti se si tiene ferma l' armatura, cioè si fa $n_1 = 0$, trovasi:

$$\frac{I_{1.0}}{\text{sen } C_{1.0}} = \frac{P_1}{2\pi n L_1 \left(1 - \frac{2M_1^2}{L_1 l}\right)} ;$$

$$C_{1.0} = \text{arctg} \frac{2\pi n L_1}{W_1} \frac{1 - \frac{2M_1^2}{L_1 l}}{1 - \frac{2M_1^2 w}{l^2 W_1}} .$$

Qui non è più lecito prescindere dal divisore sen $C_{1.0}$ se l' angolo è piccolo.

L' intensità e la fase della corrente primaria coll' armatura fissa si possono sempre misurare direttamente; gli stessi elementi corrispondenti alla velocità di sincronismo differiscono di poco da quelli che si misurano coll' armatura ruotante a vuoto, o più esattamente si possono dedurre dalla curva dei valori misurati per velocità differenti. Da essi si potrebbero dunque ricavare le principali grandezze caratteristiche del trasformatore, le quali non sono accessibili ad una misura diretta quando non è possibile rompere i circuiti dell' armatura. Per contro è facile al costruttore scegliere gli elementi dell' apparecchio in modo da dare a queste grandezze valori convenienti.

5. La differenza di fase che maggiormente interessa di conoscere nel trasformatore in quistione è quella tra la tensione primaria e la secondaria, misurata ai morsetti per un carico qualunque. Questa grandezza giuoca difatti una parte essenziale nelle distribuzioni a cui il trasformatore è destinato, poichè rappresenta la differenza di fase delle tensioni che si avranno ai capi dei circuiti dei motori polifasi, i quali mediante questo sistema si vogliono mettere in marcia o servire in modo permanente.

Quando il circuito secondario è aperto, quella rappresenta la differenza di fase tra la tensione primaria e la forza elettromotrice secondaria, ed è eguale alla somma della differenza di fase già calcolata per la corrente primaria e di quella tra le due correnti primaria e secondaria, quando quest' ultima corrente si riduce a zero. Essa si può dunque scrivere, supponendo ancora $n - n_1$ piccolo:

$$(C_2)_0 = \operatorname{arctg} \frac{2\pi(n-n_1)\,l}{w} + \operatorname{arctg} \frac{2\pi n L_1}{W_1} \frac{1 - \dfrac{M_1^2}{L_1 l} \cdot \dfrac{w^2 + 8\pi^2 (n-n_1)^2 l^2}{w^2 + 4\pi^2 (n-n_1)^2 l^2}}{1 + \dfrac{w}{W_1} \cdot \dfrac{2\pi n \,.\, 2\pi (n-n_1) M_1^2}{w^2 + 4\pi^2 (n-n_1)^2 l^2}}$$

La forza elettromotrice secondaria subisce cioè, ed è naturale, rispetto alla differenza di potenziale primaria la somma dei ritardi che nel circuito primario subisce rispetto a questa la corrente per effetto dell' induzione propria e mutua da parte dell' armatura, e che nell' armatura la corrente subisce per la selfinduzione rispetto a quelle forze elettromotrici che vi sono indotte colla frequenza $n - n_1$ perchè l' effetto di queste è in generale predominante. Questo ritardo totale suol essere prossimo a 90°, ma se ne può scostare in più od in meno dipendentemente dagli elementi del primario e dell' armatura, e dalla velocità di questa in quanto essa differisca dalla velocità di sincronismo. In particolare se si immagini questa velocità raggiunta per l' annullarsi di tutte le resistenze meccaniche, le sole correnti d' armatura che sono indotte dal primario e generano la forza elettromotrice secondaria hanno il senso opposto alle precedenti e la frequenza doppia di quella delle correnti primarie; onde il ritardo totale risulta:

$$C_{2.n} = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{2\pi \,.\, 2n\, l}{w} + \operatorname{arctg} \frac{2\pi n L_1}{W_1} \frac{1 - \dfrac{M_1^2}{L_1 l}}{1 + \dfrac{M_1^2 w}{2 l^2 W_1}} .$$

I coefficienti al numeratore e denominatore dell' ultima frazione si esprimono come vedemmo in funzione di grandezze misurabili.

Se si volesse esprimere la fase della differenza di potenziale secondaria nel caso più generale di un carico qualunque, occorrerebbe eseguire tutti gli sviluppi che intervengono nell' espressione delle due correnti; sebbene questi non presentino alcuna difficoltà algebrica, conducono però a formole complicate, delle quali non è facile l' interpretazione fisica. Se il carico nel circuito secondario è induttivo, occorrerebbe introdurre il coefficiente di selfinduzione esterno accanto a quello interno ed alle resistenze. Anche il caso in cui il carico esterno non sia induttivo, che non è però il

caso pratico per lo scopo stesso del trasformatore, è per sè molto complesso. Onde anche qui considerazioni d'indole generale servono meglio a chiarire l'andamento del fenomeno.

Se il carico esterno del secondario è costituito da resistenze senza selfinduzione, la fase della tensione secondaria coincide con quella della corrente. Ora noi vedemmo che la differenza di fase delle due correnti al diminuire della resistenza secondaria va rapidamente crescendo, mentre la differenza di fase fra la tensione e la corrente primaria diminuisce sempre più lentamente per ragioni che si sono accennate. La somma delle due, che noi qui consideriamo, andrà dunque lentamente crescendo, e propriamente crescerà più rapidamente per carico secondario maggiore. I risultati sperimentali che si citeranno più innanzi mostrano che quella somma cresce in modo sensibilmente lineare in funzione del carico primario e della corrente secondaria anche quando il carico secondario è induttivo.

6. Le variazioni di carico, che alterano la fase della differenza di potenziale secondaria, ne alterano naturalmente anche la grandezza, se la tensione primaria è mantenuta costante. La variazione avviene nello stesso senso e per le stesse cause, ma in proporzione di gran lunga maggiore che non nei trasformatori ordinarî.

Primieramente una caduta di potenziale ha luogo nelle resistenze primarie, d'armatura e secondarie; e poichè per la natura dell'apparecchio, quando esso è destinato a trasformare solamente la fase delle correnti, le intensità di queste nei diversi circuiti sono dello stesso ordine di grandezza, quelle cadute di potenziale nelle resistenze metalliche sogliono anche essere per unità di lunghezza dei circuiti paragonabili tra loro. Salvochè l'influenza loro nel diminuire la tensione utile secondaria acquista importanza diversa a seconda dello spostamento di fase che le forze elettromotrici e le intensità di corrente hanno nei circuiti medesimi.

La perdita di tensione utile per la selfinduzione del secondario dipende dal coefficiente corrispondente, e può calcolarsi nel modo ordinario. Ma la perdita di gran lunga maggiore è dovuta all'imperfetto concatenamento del circuito magnetico coi circuiti elettrici per la presenza dell'interferro necessario a mantenere l'armatura in movimento, e per la impossibilità che ne consegue di allogare le spire fisse e mobili in modo da evitare una notevole dispersione di induzione magnetica. Non altrimenti nei trasformatori ordinarî una diminuzione della tensione secondaria è sempre dovuta al fatto che il quadrato del coefficiente d'induzione mutua è un po' minore del prodotto dei coefficienti di selfinduzione primaria e secondaria; essa può calcolarsi in funzione di questa differenza, e può ritenersi ad essa proporzionale. Il fenomeno analogo si pronuncia qui in modo molto più marcato, e non può contenersi entro limiti ammissibili nella pratica se non si seguono con cura i criterî che presiedono alla costruzione dei buoni motori, e, per quanto è possibile, dei buoni trasformatori monofasi.

Perchè la variazione di tensione secondaria sotto carico dipende in modo così complicato da tutti gli elementi del trasformatore di fase, ed è essenzialmente legata ad alcuni di essi, che ogni variazione di permeabilità del mezzo largamente influenza, e che perciò sono meno suscettibili di un calcolo rigoroso, non resta che calcolare la tensione stessa quando quelle cause in massima parte non intervengono, e dedurre

da misure eseguite su apparecchi costruiti dei criterî per giudicare della loro importanza. I risultati medesimi serviranno inversamente a dare buone norme per nuove costruzioni.

Il rapporto di trasformazione dell'apparecchio, in quanto per esso si intenda il rapporto della tensione primaria alla forza elettromotrice secondaria, non può misurarsi in modo diretto che a circuito secondario aperto, ed in questo caso si lascia esprimere facilmente in funzione delle grandezze caratteristiche del trasformatore. Si consideri per semplicità l'armatura ruotante con velocità di sincronismo, poichè da questa differisce sempre pochissimo la velocità a vuoto. Colle notazioni già adottate, e denominando P_1 e $P_{2.0}$ le due tensioni efficaci ed $I_{1.n}$ la corrente efficace primaria, sarà:

$$P_1^2 = I_{1.n}^2 \left[\left(2\pi n L_1 - M_1^2 \frac{2\pi n}{l} \right)^2 + \left(W_1 + \frac{M_1^2}{2 l^2} w \right)^2 \right];$$

$$P_{2.0}^2 = M_1^2 M_2^2 I_{1.n}^2 \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2 .$$

Se si trascura l'influenza, praticamente molto piccola, delle resistenze, e si ricordano le definizioni date dei coefficienti M_1 ed M_2, si può ritenere:

$$\frac{P_1}{P_{2.0}} = \frac{2\pi n L_1 - M_1^2 \dfrac{2\pi n}{l}}{M_1 M_2 \dfrac{2\pi n}{l}} = \frac{\alpha_1 Z_1}{\alpha_2 Z_2} \left(\frac{L_1 l}{M_1^2} - 1 \right).$$

I due coefficienti α_1 α_2 si possono fare eguali dando egual forma e disposizione alle spire primarie e secondarie. Il primo termine in parentesi ha le dimensioni di un semplice numero, e la forma in cui s'è scritto M_1^2, e la natura dei coefficienti che entrano in questo rapporto mostrano che esso è necessariamente maggiore di 2. Il rapporto di trasformazione suol dunque essere maggiore del rapporto dei numeri di spire, e la divergenza dei due dipende dalla relazione dei coefficienti di induzione propria e mutua dei circuiti. In particolare i due rapporti sarebbero ancora eguali se si potesse realizzare tra questi coefficienti la stessa relazione che vale nei trasformatori ordinarî a circuiti elettrici e magnetici ben concatenati.

7. Conosciute nelle condizioni più caratteristiche del trasformatore le grandezze elettriche più importanti, e delineato nel suo insieme il modo di variare di esse quando varia il carico elettrico secondario, occorrerebbe per completare la teoria dell'apparecchio calcolare il rendimento della trasformazione nelle condizioni di carico qualunque. E poichè l'energia primaria è semplicemente il prodotto della tensione e della intensità efficace della corrente pel coseno della differenza di fase, e le perdite di energia nelle resistenze primaria e secondaria sono note in funzione delle correnti, restano a conoscere le perdite nell'armatura e quelle necessarie per vincere le resistenze meccaniche e per la magnetizzazione alternata del mezzo dove il campo è generato. Le perdite per correnti di Foucault possono rendersi piccole a piacimento colla laminazione conveniente del ferro.

Se si vogliono calcolare le perdite nel rame dell' armatura basta ricorrere alle espressioni già trovate delle intensità di corrente in funzione delle correnti dei circuiti fissi. Una qualunque di esse si può scrivere nella forma:

$$i_a = \frac{M_1}{\sqrt{2}} A_1 \left[\frac{d}{2\pi n} \cos\left(2\pi(n-n_1)t - C_1 - c_1\right) - \frac{s}{2\pi n} \cos\left(2\pi(n+n_1)t - C_1 - c_2\right) \right] -$$

$$- \frac{M_2}{\sqrt{2}} A_2 \left[\frac{d}{2\pi n} \cos\left(2\pi(n-n_1)t - C_2 - c_1\right) + \frac{s}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(2\pi(n+n_1)t - C_2 - c_2\right) \right].$$

Formando il valore efficace e moltiplicandone il quadrato per la resistenza dei circuiti d' armatura si avrà:

$$W_a I_a^2 = W_a \left[M_1^2 I_1^2 + M_2^2 I_2^2 \right] \left[\frac{d^2 + s^2}{4\pi^2 n^2} \right] + 2 W_a M_1 M_2 I_1 I_2 \left[\frac{d^2 - s^2}{4\pi^2 n^2} \right] \operatorname{sen}(C_2 - C_1)$$

Se si suppongono i circuiti fissi eguali, e le correnti in essi eguali e differenti di fase di 90°, si ha naturalmente la espressione solita delle perdite d' armatura in un campo rotante.

Se si suppone il secondario aperto e l' armatura rotante con velocità di sincronismo si ha semplicemente:

$$W_a I_{a.n}^2 = W_a \frac{M_1^2}{l^2} I_{1.n}^2 = W_1 I_{1.n}^2 \cdot \frac{M_1^2 W_a}{l^2 W_1}.$$

Se invece si facesse $n_1 = 0$, si avrebbe nell' armatura ferma:

$$W_a I_{a.0}^2 = 2 W_1 \, . \, I_{1.0}^2 \frac{M_1^2 W_a}{l^2 W_1},$$

cioè in questi due casi le perdite d' armatura si esprimono in modo semplice in funzione delle perdite primarie, e di quel coefficiente che pel trasformatore già costrutto abbiamo imparato a dedurre dalle misure. Siccome le grandezze nelle parentesi dell' espressione generale sono parimenti caratteristiche del trasformatore costrutto o progettato per velocità diverse dell' armatura, le perdite si possono avere con un calcolo non complicato per carico qualunque. Nella pratica basta naturalmente determinarne l' andamento relativo alle perdite primarie per un apparecchio analogo, ed introdurre semplicemente un valore percentuale approssimato.

Le perdite per resistenze meccaniche dipendono dalla costruzione del trasformatore, e si possono per esso prevedere o dedurre sperimentalmente. Le perdite d' isteresi possono parimenti calcolarsi con molta approssimazione con criterî simili a quelli adottati pei motori monofasi. E qui son da ricordare alcune osservazioni in parte già fatte, ed in parte ben note nella costruzione di tutti gli apparecchi analoghi. L' imperfetto concatenamento dei circuiti elettrici col circuito magnetico occasiona una dispersione di induzione tanto maggiore quanto è maggiore il carico, e quanto più grande la differenza di fase fra tensione e corrente secondaria. La corrente di ma-

gnetizzazione, e la magnetizzazione stessa del ferro nell' induttore deve dunque essere tanto più intensa quanto il carico è maggiore e più induttivo, mentre cresce pure la magnetizzazione del ferro nell' armatura, e la frequenza con cui essa viene alternata. Perciò le perdite di isteresi devono andare rapidamente crescendo, poichè notoriamente esse aumentano in ragione molto più grande dell' induzione; e perchè le perdite per resistenze meccaniche restano sensibilmente invariate, e quelle delle resistenze metalliche crescono in funzione quadratica delle correnti, e quindi più rapida del carico, le perdite totali aumentano come una funzione che contiene potenze superiori di questo. Il coefficiente di rendimento della trasformazione adunque salirà rapidamente ad un massimo per carico crescente, dopo cui andrà lentamente diminuendo; tanto meno lentamente però quanto sarà maggiore lo spostamento di fase tra la corrente e la tensione secondaria.

E poichè la somma delle perdite d' energia deve necessariamente essere in un simile apparecchio considerevole pel lavoro necessario a mantenerlo in movimento, il rendimento di esso sarà sempre notevolmente inferiore a quello dei trasformatori ordinarî.

I risultati delle misure da me eseguite, ed esposte nella seconda parte di questa Memoria, non potevano naturalmente che confermare le previsioni fatte in base a queste considerazioni generali. Da queste e da quelli appare dunque che l' impiego di questo sistema elegante di trasformazione si potrà fare con maggiore utilità per agevolare l' avviamento dei motori asincroni monofasi, che non pel servizio permanente di motori polifasi, estendendosi in questo caso le perdite notevoli inerenti alla trasformazione ad una frazione dell' energia totale che si vuol impiegare corrispondente al numero di fasi trasformate diviso pel numero totale. Le variazioni notevoli di tensione sotto carico, le divergenze delle fasi trasformate, le quali non differiscono in generale dalla fase principale di una frazione semplice e costante di periodo, se possono avere poco peso nel periodo temporario dell' avviamento, non potrebbero non introdurre irregolarità notevoli in un sistema destinato a funzionare continuamente in condizioni anormali.

8. Alcune osservazioni debbono ancora farsi sulle semplificazioni introdotte, e sul modo in cui fu sviluppata la teoria precedente.

L' ipotesi del campo induttore bipolare non mette alcuna restrizione alle considerazioni fatte nel caso in cui le solite ragioni costruttive consiglino di adottare un tipo multipolare qualunque, con avvolgimento corrispondente dell' armatura. La forma di questo e degli avvolgimenti fissi non altera nemmeno in sostanza i risultati, sebbene dei diversi coefficienti introdotti nelle formole possa alterarsi in qualche modo l' importanza relativa. È perciò indifferente dal punto di vista teorico che l' induttore e l' indotto siano a tamburo od anello o con sporgenze polari, mentre le condizioni pratiche in cui l' apparecchio deve funzionare o le necessità costruttive dànno sempre criterî sufficienti per la scelta più conveniente. Così è indifferente il modo di raggruppamento delle spire dell' armatura in singoli circuiti di una o poche spire, od in due o tre soli circuiti di parecchie spire in serie, sebbene i coefficienti di induzione propria e mutua abbisognino, come si disse, di una diversa interpretazione, e possano anche giuocare rispetto alle resistenze una parte diversa, modificando in qualche modo il funzionamento del sistema.

Un' ipotesi che non è mai realizzata negli apparecchi industriali costrutti mediante ferro è che i campi originati dalle correnti siano proporzionali all' intensità di queste, e con esse coincidano in fase. Il ferro non solo ha una permeabilità magnetica diversa per diverse forze magnetizzanti, ma, sotto l' azione di forze alternative, si comporta come se la variazione del momento tenesse dietro con un certo ritardo alla variazione della forza. Nei trasformatori ordinarî monofasi il ferro è utilizzato entro limiti così ristretti di forza magnetizzante che l' induzione può ritenersi a questa proporzionale. Per contro quel ritardo di polarizzazione interviene come ritardo di fase in tutte le forze elettromotrici indotte, e la teoria si può ancora formulare con semplicità introducendo le derivate dei valori momentanei delle correnti non per l' istante in quistione, ma per un istante che lo precede di una frazione di periodo determinata. Si ha il vantaggio così di esprimere in formole molto approssimate in funzione di questa grandezza, che si può misurare indipendentemente, anche le perdite d' isteresi. Nei motori a corrente alternata e nei trasformatori di fase la magnetizzazione è molto diversa nelle diverse condizioni di funzionamento, e la permeabilità del ferro varia in conseguenza, e variano le perdite d' isteresi come si disse. Quindi è che per misure di confronto, quali occorrono nella determinazione degli elementi caratteristici di apparecchi già costrutti, è indispensabile riferirsi a magnetizzazioni possibilmente eguali, per scegliere le quali senza considerazioni teoriche complicate possono appunto dare un criterio le perdite d' isteresi. Quanto alle fasi delle induzioni magnetiche, e delle forze elettromotrici che ne originano, l' interferro, per quanto buone norme di costruzione permettano di ridurlo a dimensioni esigue, giuoca sempre una parte notevole, dovendosi ad esso buona parte della *riluttanza* del circuito e quindi una grande componente della corrente che presenta un ritardo di fase di mezzo periodo rispetto alla forza elettromotrice. Le fasi delle correnti differiscono adunque meno che nel caso precedente da quelle calcolate, ma non si possono ritenere definite con approssimazione sufficiente dalla teoria ordinaria.

Se si vuole ancora in questo caso ritenere la variazione della induzione magnetica esclusivamente dovuta alla variazione di momento magnetico del ferro, e questa ritardata rispetto alla forza magnetizzante di una frazione costante di periodo e ad essa proporzionale in grandezza, basta introdurre questo ritardo in tutte le derivazioni nella trattazione delle equazioni fondamentali. Naturalmente le formole acquistano una complicanza di gran lunga maggiore, e la loro fisica interpretazione è resa ancora più laboriosa.

Limitandoci al caso più semplice in cui l' armatura ruoti a vuoto con velocità supposta di sincronismo è facile vedere, detto ν quel ritardo di polarizzazione, che l' equazione del circuito primario dà per l' intensità efficace e per la fase della corrente le due espressioni:

$$I_{1.n} = \frac{P_1}{\sqrt{(2\pi n\, L_1 \cos \nu - M_1^2 s \operatorname{sen}(\nu + c_2))^2 + (W_1 + 2\pi n\, L_1 \operatorname{sen} \nu + M_1^2 s \cos(\nu + c_2))^2}}$$

$$\operatorname{tg} C_{1.n} = \frac{2\pi n\, L_1 \cos \nu - M_1^2 s \operatorname{sen}(\nu + c_2)}{W_1 + 2\pi n\, L_1 \operatorname{sen} \nu + M_1^2 s \cos(\nu + c_2)}\,.$$

Di queste solamente la prima si semplifica in modo notevole quando le resistenze giuocano una piccola parte rispetto alle selfinduzioni e induzioni mutue, e propriamente essa riprende ancora in questo caso l' antica forma sostituendo a sen c_2 l' unità. Per contro la fase è influenzata in modo non semplice dal ritardo di polarizzazione, e non può calcolarsi se non in funzione di questo.

In base a ciò è anche chiaro che noi potremo utilizzare delle formole ricavate colla teoria ordinaria, per la determinazione sperimentale degli elementi del sistema, solo quelle che contengono unicamente intensità di correnti o differenze efficaci di potenziale, portando nel rendimento separatamente in conto le quantità di energia dissipate in isteresi. Invece le formole contenenti differenze di fase non potranno riguardarsi che come una rappresentazione grossolana dell' andamento del fenomeno. Da questo punto di vista non potevano queste premesse trascurarsi per la giusta interpretazione delle misure.

II. Misure.

9. L' apparecchio da me esaminato è un motore asincrono monofase della potenza di 6 cavalli, costrutto dalla fabbrica d' Oerlikon, e distinto col n. 4447, Tipo 158. Esso è alimentato con corrente alternata della frequenza di 52 periodi circa, fornita dalla stazione centrale della città di Zurigo con macchine Oerlikon, e trasformata nell' interno del laboratorio con un trasformatore di 20 KW. da 2000 a 220 volt. L' avvolgimento è a quattro poli; la velocità normale prossima a 1560 giri. L' avviamento si fa mediante un apparecchio ausiliario contenente una spirale di notevole resistenza ohmica, messa temporariamente in serie con un avvolgimento dell' induttore spostato rispetto al principale di 45°; le due correnti derivate parallelamente dallo stesso circuito esterno differiscono in fase di un angolo notevole secondo il principio di Ferraris. Il commutatore d' inserzione permette di escludere il secondo avvolgimento e lasciar connesso direttamente il primo col circuito esterno quando la velocità dell' armatura a vuoto si è sufficientemente accostata a quella di regime. Una connessione esterna col secondo sistema di spire permetteva nelle mie misure di utilizzare questo come secondario del trasformatore di fase, mentre nel circuito primario restavano inseriti gli strumenti necessari.

Tutti gli avvolgimenti sono a tamburo, costituiti di fili eguali di rame di 3,6 mm. di diametro con isolante di 0,3 mm., allogati in scanalature che nell' induttore sono in numero di 36 di profilo rettangolare e di dimensioni 14 × 19,25 mm., con sottili espansioni dei denti verso l' interno, e nell' armatura sono in numero di 66 di profilo ovoidale di dimensioni 5,5 × 11,5 mm., con raccordo esterno continuo sottilissimo del ferro laminato. Il diametro esterno dell' armatura è di 26 cm.; dell' induttore laminato 40 cm., la lunghezza comune è 18 cm.; l' interferro 2 mm.

L' avvolgimento principale dell' induttore occupa 6 coppie di scanalature, con 7 fili ciascuna; quello secondario 3 coppie con 7 fili parimenti. L' avvolgimento dell' armatura occupa solo 32 coppie di fori con due spire in serie per ciascuna, ripartite in tre gruppi chiusi in corto circuito. Le spire hanno tutte una superficie utile

dello stesso ordine di grandezza, essendo collegati i fili che distano di mezza distanza polare.

La resistenza dell'avvolgimrnto primario e secondario alla temperatura ordinaria è di 0,184 e 0,080 ohm rispettivamente; la resistenza totale dell'armatura per quanto può giudicarsi dalla lunghezza dell'avvolgimento può ritenersi 0,10 ohm. Siccome durante il funzionamento dell'apparecchio sotto carico normale la temperatura si eleva di circa 40° sopra la temperatura ambiente, non essendo possibile conoscerne i valori esatti per ogni misura ed avendo le variazioni di resistenza poca importanza, si ritennero nei calcoli valori di circa 10 % maggiori dei precedenti.

Il metodo generale seguito nelle misure consiste nella determinazione delle intensità di corrente primaria e secondaria e della loro differenza di fase mediante tre elettrodinamometri di Siemens; delle differenze di potenziale primaria e secondaria e della loro differenza di fase mediante tre voltometri elettrostatici di Thomson; dell'energia primaria, e di quella secondaria nel caso di carico induttivo, e quindi delle differenze di fase tra le tensioni e le correnti rispettive, mediante due wattometri di Ganz; finalmente della velocità dell'armatura mediante un contagiri e un orologio normale a secondi.

Gli strumenti elettrici di misura furono tutti calibrati sul posto mediante strumenti di Weston a corrente continua, a loro volta graduati con apparecchi normali. Di più tutte le costanti di strumenti analoghi furono confrontate fra loro coll'applicazione di corrente alternata nella posizione precisa delle misure, per eliminare nei valori relativi le piccole incertezze dovute all'azione mutua degli avvolgimenti. Questa non poteva evitarsi completamente senza collocare i dinamometri e wattometri ad una distanza tale da rendere l'apparecchiamento della misura e l'esecuzione di tutte le osservazioni per un unico osservatore molto laboriosa. La corrispondenza soddisfacente dei valori dedotti nella stessa serie di misure da osservazioni di apparecchi diversi, e di quelli dedotti in serie ripetute cogli stessi apparecchi fu in ogni caso prova sufficiente della attendibilità dei risultati.

Essendo, a complemento delle misure sul trasformatore, e pel confronto di alcune grandezze caratteristiche del sistema, interessante di conoscere con esattezza il modo di funzionare di esso come motore, una serie completa di osservazioni fu eseguita contemporaneamente da parecchi sperimentatori, misurando tutti gli elementi elettrici cogli strumenti accennati, e di più il lavoro meccanico fornito dal motore mediante un freno elettromagnetico dell'ing. Pasqualini. Il principio di questo è semplicissimo, constando esso esclusivamente di un disco massiccio di rame messo in movimento dal motore in un forte campo magnetico. Essendo l'elettromagnete che genera il campo perfettamente equilibrato sopra un fulcro, il momento che si esercita dalle forti correnti indotte è compensato mediante un peso a cui si dà conveniente braccio di leva. Potendosi lasciare questo e quello in ciascuna misura invariato, ed eseguire con grande delicatezza e continuità la regolazione della corrente eccitante in modo da tener la bilancia a zero, la misura raggiunge un'esattezza che è molto difficile a conseguire coi freni ordinarî dinamici. L'unica difficoltà è quella di sottrarre al disco le quantità notevoli di valore che le correnti vi producono; si può sopperire a ciò mediante una abbondante circolazione d'acqua, o mediante raffreddamento con ghiaccio.

Un piccolo inconveniente non evitabile nelle mie ordinarie misure era, oltre alla impossibilità di eseguire contemporaneamente tutte le letture, quella di comandare direttamente il generatore in modo da poterne regolare esattamente la velocità ad un valore noto, e mantenere una tensione costante ai morsetti primarî del trasformatore.

Poichè nella stazione generatrice funzionano sempre parecchie macchine potenti accoppiate in parallelo sopra un unico asse comandato dalle turbine, la velocità si mantiene generalmente costante o varia di pochissimo nel corso di una misura; essa non è però accessibile ad una misura diretta, e quindi una piccola incertezza resta sempre nella determinazione della velocità di sincronismo e della *Schlüpfung* $n - n_1$. Vero è che anche una misura diretta non darebbe questa grandezza che approssimatamente, essendo essa a vuoto compresa tra 1 e 2 millesimi della velocità del motore. Quando il carico del motore o del trasformatore è notevole, molte volte può soccorrere un artificio semplice a determinare quella differenza con una grande esattezza. Siccome difatti le correnti che predominano nell' armatura hanno come si vide una frequenza di $n - n_1$ periodi per 1″, esse sogliono produrre un suono caratteristico, che ha una frequenza eguale o multipla semplice della predetta, e che è verosimilmente dovuto ad una vibrazione delle parti metalliche conduttrici, o di quelle alternatamente magnetizzate. Con un po' d' esercizio si riesce quasi sempre a distinguere questo suono in mezzo ai rumori ed alle vibrazioni del motore, e si può determinarne la frequenza direttamente poichè i periodi durano parecchi secondi. Allora una misura approssimata di controllo della velocità dell' armatura rispetto a quella a vuoto permette di apprezzare senza alcun dubbio di quanto quella velocità differiva nel primo caso da quella di sincronismo. Se la velocità a vuoto e sotto carico si misura ripetutamente con cura, si può giudicare della grandezza d' ordine di quella differenza per l' armatura marciante a vuoto, per la quale l' artificio predetto non è più realizzabile per la frequenza estremamente bassa che vi sottentra.

Un metodo d' interferenza più elegante è stato proposto da Drexler [1] per rilevare la forma di variazione di elementi alternativi quando si ha un motore la cui velocità differisce di pochissimo da quella corrispondente al sincronismo, e potrebbe utilizzarsi anche per determinarne la *Schlüpfung*. Esso consiste nel dotare la parte rotante di un naso metallico, che chiuda momentaneamente ad ogni giro il circuito di un galvanometro o voltometro di breve durata di oscillazione tra i punti dove agisce la tensione alternata; nel nostro caso tra i morsetti primarii. Le deviazioni del sistema, che possono osservarsi direttamente o registrarsi con metodi fotografici, variano nel tempo secondo una curva che rappresenta l' andamento della tensione, e con una frequenza eguale alla *Schlüpfung*. La misura ha però minore importanza qui che non presso il motore, perchè la *Schlüpfung* è estremamente piccola e varia poco col carico elettrico.

Un artificio più semplice e applicabile in ogni caso per valutare la *Schlüpfung* dell' armatura a vuoto è quello di disegnare la curva della velocità del motore sotto carichi meccanici diversi, e dedurne graficamente il valore che corrisponde al lavoro meccanico zero, includendovi quello necessario a vincere le resistenze meccaniche, che si possono de-

[1] Elektrot. Zeitschrift. 1896.

terminare indipendentemente. Nella teoria del motore monofase si dimostra che questa velocità non è veramente quella di sincronismo, perchè il momento di rotazione si annulla quando si fanno equilibrio i momenti sviluppati dai due campi rotanti in cui il campo alternativo monofase si può scomporre secondo il concetto di Ferraris, e che hanno rispetto all' armatura velocità opposte di rotazione $n - n_1$ e $n + n_1$. Ma la forma della curva del momento in prossimità del sincronismo mostra che questa differenza è in realtà estremamente esigua.

L' inconveniente della incostanza della tensione primaria si sarebbe fatto meno sentire se fosse stato possibile di connettere direttamente il motore col secondario del trasformatore di 20 KW., ai morsetti del quale la tensione non subisce che le oscillazioni che si tollerano nella rete generale d' illuminazione. Ma la distanza dei due apparecchi obbliga a fare la connessione con un cavo che ha alcuni centesimi d' ohm di resistenza; inoltre una perdita di tensione utile ha luogo negli apparecchi di misura del circuito primario, onde la differenza di potenziale disponibile suol andare lentamente decrescendo per carico crescente, non senza alcune variazioni saltuarie inevitabili quando improvvisamente è variato il carico della rete generale. In una serie di misure, specialmente intesa a studiare il comportamento del trasformatore ad una tensione minore della normale, fu inclusa nel circuito primario una resistenza variabile di regolazione; ma questo avrebbe complicato con poco vantaggio le misure generali, ed obbligato a perdere una quantità notevole di tensione utile primaria.

Per potere riassumere in modo più semplice i risultati delle misure, che non è possibile riportare qui in ogni dettaglio, io li ho riuniti tutti in curve di grande scala il cui andamento si libera così dalle piccole incertezze delle singole osservazioni. Come ascissa adottai l' energia primaria, perchè è un elemento che si lascia misurare con grande esattezza e può in ogni caso essere direttamente comparato, qualunque sia il modo di funzionamento dell' apparecchio come motore o come trasformatore, con carico secondario induttivo o privo di induzione. Le differenze di fase che si devono discutere e il rendimento della trasformazione a parità di energia impiegata possono veramente considerarsi indipendenti dalle piccole oscillazioni di tensione primaria, che non sogliono superare alcune unità per cento. Per contro le intensità di corrente variano naturalmente nella ragione inversa, e la loro curva è notevolmente influenzata da quelle oscillazioni. Contuttociò io ho compendiato nelle tabelle, accanto ai valori di quelle differenze di fase e del rendimento, anche le intensità di corrente ricavate dalle curve in corrispondenza di valori egualmente differenti dell'ascissa, e ciò per avere un criterio semplice di confronto. In verità queste intensità non corrispondono esattamente alla stessa tensione primaria, ma a valori di questa varianti di poco come si disse, e di cui il valore medio è ricordato in ogni tabella. A loro volta le tensioni secondarie sono state riferite tutte ad una tensione primaria poco differente da 220 volt, e scelta per ogni serie in modo che la tensione trasformata coll' armatura ruotante a vuoto sia di 100 volt. Queste tensioni di riferimento non sono identiche in tutte le tabelle, avendo la velocità e gli altri elementi del sistema un' influenza sul rapporto di trasformazione. Accanto alla colonna delle intensità primarie di corrente suol essere aggiunta quella delle loro componenti di magnetizzazione, dalle quali essenzialmente dipendono le perdite d' isteresi. Queste si sono calcolate sottraendo

alle perdite totali quelle dovute alle resistenze meccaniche, ritenute costanti in ogni caso, e quelle per le resistenze ohmiche dei circuiti. Piccole divergenze nei risultati debbonsi a variazione di tensione o frequenza od attrito dei perni, variando la temperatura o le condizioni di lubrificazione.

10. Una prima serie di misure è utile a far conoscere l'ordine di grandezza dei coefficienti che caratterizzano il funzionamento dell'apparecchio come motore e come trasformatore, e la quantità di energia la quale occorre per tener in movimento l'armatura vincendo le sole resistenze meccaniche. Conosciuta difatti questa, e l'eccesso d'energia che si dissipa nel rame a vuoto, si hanno dalle curve riferite alla energia primaria i valori di tutte le grandezze corrispondenti al sincronismo, alle quali si riferiscono le principali formole calcolate.

Un metodo semplice di risolvere questa quistione è di alimentare il motore a vuoto con tensioni primarie differenti, rilevando in funzione di queste la curva dell'energia totale somministrata. Siccome questa consta dell'energia dovuta alle resistenze passive, e di quella dissipata nelle resistenze elettriche dei conduttori e nella magnetizzazione del ferro, la prima, che è la sola non dipendente dalla intensità della corrente, ossia dalla differenza di potenziale, è data dal segmento intercetto dalla curva sull'asse delle ordinate. Operando in questo modo, ed abbassando gradatamente la tensione ai morsetti del motore mediante una resistenza di regolazione, io potei mantenere l'armatura in movimento con velocità pochissimo differente dalla normale fino alla tensione di 50 volt, sotto la quale il funzionamento diventando instabile la velocità cadeva rapidamente a zero. La curva dell'energia totale E_1 di cui alcuni valori sono riportati nella colonna 3ª della tabella n. I, ha una forma perfettamente regolare, salente più lentamente d'una parabola di 2° ordine; il segmento intercetto sull'asse delle ordinate rappresenta un'energia consumata dalle resistenze meccaniche di 170 watt, che si ritenne anche per altre misure.

I. *Motore funzionante a vuoto con tensioni diverse.* $n = 52$.

P_1	I_1	E_1	C_1	C_2	$C_2 - C_1$	$\frac{P_1}{P_2}$	E_{Cu}	E_{Fe}	I_1 sen C_1
60	7.7	278	53° 0′	93° 40′	40° 40′	2.78	35	73	6.15
80	9.3	346	62 20	92 20	30 0	2.54	49	127	8.24
100	11.2	434	67 10	91 5	23 55	2.41	73	191	10.3
120	12.8	540	69 25	90 5	20 40	2.34	96	274	12.0
140	14.9	662	71 30	89 20	17 50	2.29	128	364	14.1
160	17.0	800	72 55	88 40	15 45	2.25	169	461	16.3
180	19.2	954	74 0	88 5	14 5	2.22	215	569	18.5
200	21.6	1124	74 55	87 50	12 55	2.20	270	684	20.9
220	24 0	1320	75 30	87 40	12 10	2.19	334	816	23.2

Nella stessa tabella sono riferiti pure i valori corrispondenti I_1 della corrente primaria, e C_1 della sua differenza di fase rispetto alla tensione; la differenza di fase della tensione primaria e secondaria C_2 e, dedotta per differenza, quella della corrente

primaria e secondaria pel valore zero della seconda; inoltre il rapporto di trasformazione che varia in modo molto sensibile colla permeabilità, alterandosi il rapporto dei coefficienti d' induzione che entrano nell' espressione analitica.

Sottraendo dall' energia primaria quella dissipata nelle resistenze meccaniche ed elettriche primarie e d' armatura, per le quali ultime vale con molta approssimazione la formola trovata nel caso di sincronismo, furono ottenute le quantità d'energia impiegate per la magnetizzazione E_{Fe} di cui vedesi la dipendenza dalla corrente di magnetizzazione.

Dalle intensità e dalle fasi della corrente quando l' armatura ruota a vuoto, o più esattamente dai valori corrispondenti alla velocità di sincronismo, che si possono dedurre graficamente e differiscono poco dai precedenti, e da quelli misurati colla armatura ferma si potrebbero dedurre i coefficienti di induzione propria e mutua dei circuiti primarî e d' armatura, e dal rapporto di trasformazione anche i coefficienti del secondario. Per una parte però vedemmo che quelle fasi si esprimono in modo complicato in funzione del ritardo di polarizzazione del ferro, onde esse non possono utilizzarsi pei calcoli senza la conoscenza di questo. Per l' altra le correnti coll' armatura a riposo non variano proporzionalmente alla tensione, essendo funzione di esse la permeabilità del ferro; la considerazione loro introduce perciò una certa arbitrarietà, perchè non le correnti a vuoto e coll' armatura ferma dovute alla medesima tensione inducono nel ferro la stessa magnetizzazione; e nemmeno la distribuzione di questa è identica per le correnti che occasionano eguali perdite d' isteresi. Meglio è dunque ricorrere solo all' intensità della corrente ed al rapporto di trasformazione corrispondenti alla velocità di sincronismo, che ponemmo sotto la forma:

$$I_{1.n} = \frac{P_1}{2\pi n L_1 \left(1 - \frac{M_1^2}{L_1 l}\right)} ;$$

$$\frac{P_{1.n}}{P_{2.0}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{L_1 l}{M_1^2} - 1\right) .$$

Il rapporto $\frac{M_1}{M_2}$ può sostituirsi con quello dei numeri di spire primarie e secondarie se la forma e disposizione dei circuiti è la stessa; nel nostro caso è 2. Il rapporto di trasformazione per la velocità di sincronismo è molto prossimo a 2.19, onde $\frac{L_1 l}{M_1^2} = 2.10$ per la tensione normale di 220 volt. L' intensità di corrente primaria è $I_{1.n} = 23.5$, onde ricavasi $L_1 = 0.0535$. I coefficienti l ed M possono dedursi da questo mediante la ragione del numero di spire e le loro dimensioni geometriche, oppure, e meglio, dal comportamento del motore sotto carico.

11. La seconda serie di misure fu eseguita per studiare appunto il funzionamento dell' apparecchio come motore asincrono, e dedurre contemporaneamente il rapporto di trasformazione per carico elettrico secondario nullo, ma con velocità dell' armatura diverse relativamente alla velocità di sincronismo. A tal uopo oltre alle grandezze elettriche si misurò il lavoro meccanico E_m mediante il freno elettromagnetico.

I risultati sono riportati nella tabella n. II in corrispondenza a valori dell' energia primaria crescenti fino ad 8 kilowatt. La tensione primaria oscilla poco attorno a 216 volt. La tensione secondaria è riferita ad una primaria costante di 219 volt. La differenza di fase delle due correnti, per intensità di corrente secondaria zero, è ancora qui dedotta per differenza. La curva del numero N di giri per 1′ mostra che la velocità dell' armatura differisce a vuoto di circa 2 giri da quella di sincronismo.

II. *Motore funzionante sotto carico mecanico.*

E_1	E_m	$\frac{E_m}{E_1}$	I_1	C_1	$(C_2)_0$	$(C_2)_0-C_1$	P_2 $(P_1=219)$	N
1230	0	0	23.3	75° 40′	87° 50′	12° 10	100.0	1566
2000	730	0,365	25.1	67 50	89 20	21 30	99.1	1562
3000	1660	553	27.8	59 30	91 20	31 50	97.8	1556
4000	2550	638	31.2	52 50	93 20	40 30	96.1	1550
5000	3400	680	35.1	47 50	95 20	47 30	94.2	1543
6000	4170	695	39.5	44 0	97 20	53 20	92.1	1535
7000	4850	693	44.2	41 20	99 20	58 0	89.6	1527
8000	5460	683	49.5	39 20	101 20	62 0	86.6	1517

Le grandezze che qui intervengouo si possono rappresentare nel modo più semplice come funzioni della differenza di velocità dell' armatura rispetto a quella di sincronismo. Nella teoria dei motori asincroni monofasi si dimostra che il momento di rotazione subito dall' armatura per una velocità qualunque è:

$$D = M_1^2 I_1^2 w \left[\frac{2\pi (n - n_1)}{w^2 + 4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2} - \frac{2\pi (n + n_1)}{w^2 + 4\pi^2 (n + n_1)^2 l^2} \right].$$

Trascurando la piccolissima variazione del secondo termine quando varia n_1 nelle vicinanze del sincronismo, si ha:

$$\frac{dD}{dn_1} = - M_1^2 I_1^2 \frac{2\pi}{w} \frac{1 - \frac{4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}{w^2}}{\left[1 + \frac{4\pi^2 (n - n_1)^2 l^2}{w^2}\right]^2}.$$

La curva che rappresenta questo momento in funzione della velocità ha nel punto di sincronismo per tangente una retta la cui inclinazione sull' asse delle ascisse è data dalla derivata precedente per $n = n_1$, cioè da $\frac{2\pi}{w} M_1^2 I_{1.n}^2$ Dalla curva delle misure precedenti si ricava per questa tangente il valore 16,7. Siccome la resistenza di uno dei circuiti dell' armatura è dell' ordine 0.037 ed $I_{1.n} = 22,8$ per la tensione che si aveva qui, si deduce:

$$M_1^2 = 0,00019.$$

Ora dal quoziente $\frac{M_1^2}{L_1 l}$ che si ebbe dal rapporto di trasformazione, e dal coefficiente L_1 dedotto dalla corrente per velocità di sincronismo si ricava:

$$l = \frac{0,00019 \times 2,10}{0,0535} = 0,0074 .$$

Il rapporto delle perdite d'energia nella resistenza dell'armatura a quelle primarie può dunque ritenersi per la velocità di sincronismo:

$$\frac{W_a I_{a.n}^2}{W_1 I_{1.n}^2} = \frac{M_1^2 W_a}{l^2 W_1} = 1,9 .$$

Si hanno così tutti gli elementi per calcolare le grandezze caratteristiche d ed s per ogni velocità dell'armatura, e dedurne le perdite per resistenze ohmiche. In modo più semplice, sostituendo alla considerazione del campo magnetico alternato quella di due campi rotanti, le perdite in quanto sono dovute a correnti indotte dal campo di velocità $n + n_1$ possono ritenersi invariate; in quanto sono dovute al campo di velocità $n - n_1$, che origina il momento di rotazione positivo, possono ricavarsi dal rapporto al lavoro totale come nei motori ordinarî a campo rotante, ponendo questo rapporto eguale ad $\frac{n - n_1}{n_1}$. In questo modo sono calcolate le perdite d'armatura accanto a quelle primarie pei valori della velocità prima considerati, ritenendo per la velocità di sincronismo 1568 giri, e pel lavoro totale la somma di quello consumato dalle resistenze meccaniche e di quello assorbito dal freno. Per differenza sono dedotte ancora le perdite d'isteresi, accanto alle quali nella tabella n. III sono riportate le componenti di magnetizzazione della corrente. Siccome queste perdite risultano qui come differenza di quantità notevoli di energia valutate cogli apparecchi ordinarî di misura, i singoli valori sono più che nella tabella I influenzati dai piccoli errori di osservazione, oltreche dalla variazione delle resistenze ohmiche per le variazioni di temperatura. Nelle ultime colonne sono contenute le tangenti delle differenze di fase $C_{2.0} - C_1$ ed i quozienti $\frac{2\pi(n - n_1)l}{w}$ calcolati in base alle differenze di velocità della prima colonna, ed alla resistenza ed alla selfinduzione testè trovata di un circuito dell'armatura. Questi quozienti devono rappresentare quelle tangenti secondo le nostre osservazioni teoriche del paragrafo 3, prescindendo dalla isteresi magnetica e trascurando l'unità di fronte a $2. \frac{4\pi^2 n(n - n_1)l^2}{w^2 + 4\pi^2(n - n_1)^2 l^2}$. Qui per una parte il ritardo di polarizzazione del ferro ha minore influenza, perchè predomina l'azione delle correnti aventi una frequenza di soli $n - n_1$ periodi per 1″; per l'altra però i termini omessi non sono trascurabili se non quando la velocità dell'armatura si scosta sufficientemente da quella di sincronismo, quando cioè gli angoli considerati non sono del tutto troppo esigui. Da ciò la discordanza dei primi valori nella tabella, ove la frequenza è più bassa, mentre l'isteresi del ferro è forse la causa precipua della discordanza degli ultimi. Per questa eziandio discorda notevolmente il valor limite dell'angolo $C_{2.0} - C_1$ dedotto

dalla curva in corrispondenza della velocità di sincronismo, dall'angolo da noi precedentemente calcolato

$$90^\circ - c_2 = \operatorname{arctg} \frac{w}{2\pi (n + n_1) l} .$$

Per contro l'espressione data alla fase della tensione secondaria quando l'armatura ha la velocità di sincronismo, nella quale compare la differenza di due angoli che il ritardo di polarizzazione del ferro influenza in modo analogo, varrà ancora in via approssimata. Introducendo difatti nella formola del paragafo 5 i coefficienti trovati pel nostro apparecchio si ha un angolo di 88°46′, mentre la curva dei valori misurati pel motore dà in corrispondenza della velocità di sincronismo un angolo di circa 87°40′.

III. *Energia dissipata nel rame e nel ferro del motore.*

$N - N_1$	E_1	$E_m + 170$	$I_1^2 W_1$	$I_a^2 W_a$	E_{Fe}	$I \operatorname{sen} C_1$	$tg(C_{2,0} - C_1)$	$\frac{2\pi(n-n_1)l}{w}$
2	1230	170	108	205	750	22,6	0.22	0.08
6	2000	900	126	208	770	23.3	0.39	0.25
12	3000	1830	154	218	800	24.0	0.62	0.50
18	4000	2720	195	236	850	24.9	0.85	0.75
25	5000	3570	246	262	920	26.0	1.09	1.05
33	6000	4340	312	299	1050	27.4	1.34	1.39
41	7000	5020	390	342	1250	29.2	1,60	1.72
51	8000	5630	490	395	1490	31.4	1.88	2.14

12. Il funzionamento dell'apparecchio come trasformatore di fase, lavorante con carico elettrico secondario senza induzione, formò l'oggetto di due serie di misure, i cui risultati sono compendiati nelle tabelle seguenti. Nella prima serie la tensione primaria era mediamente di 215 volt, subendo attorno a questo valor medio piccole oscillazioni per la imperfetta regolazione della rete generale ed una lenta diminuzione al crescere del carico. Nella seconda serie la tensione primaria fu tenuta per quanto era possibile costante col valore di 180 volt per avere un'idea del modo di comportarsi del sistema assoggettato ad una tensione inferiore alla normale. Riferendosi agli stessi valori dell'energia secondaria, è naturale che il rendimento della trasformazione sia aumentato sotto un certo limite di grandezza dell'energia medesima, fintantochè cioè resta minore la somma delle energie dissipate nel rame e nel ferro; ma perchè queste crescono nel secondo caso molto più rapidamente, come mostra il variare della corrente di magnetizzazione, il rendimento massimo è minore nel secondo caso, tanto minore quanto è più bassa la tensione primaria scelta; e cade dopo il massimo altrettanto più rapidamente, cosicchè è anche altrettanto più limitata la quantità di energia totale che l'apparecchio può fornire. L'andamento delle curve di E_2 mostra che quelle quantità massime non superano di molto i maggiori valori conseguiti nelle osservazioni.

Le misure sono eseguite qui nell' ordine generale già ricordato. Avendosi la differenza di fase delle due correnti dalle letture dei tre dinamometri, e la fase della corrente primaria dal wattometro, si ha nella somma loro il controllo della fase della tensione secondaria, misurata coi tre voltometri. In realtà le due grandezze non differirono in alcuna delle misure più di una piccolissima frazione percentuale, e gli errori si compensarono perfettamente tracciando le curve dei risultati in modo sistematico. Le tensioni secondarie sono riferite a due tensioni primarie leggermente diverse nelle due serie, perchè è leggermente variato il rapporto di trasformazione come si disse. Essendo le resistenze esterne inserite nel circuito secondario esclusivamente costituite da lampade ad incandescenza in parallelo, dove la selfinduzione è trascurabile, le quantità secondarie di energia sono dedotte dalle letture del voltometro e del dinamometro.

IV. *Trasformatore di fase con carico secondario senza induzione.*

a) Tensione primaria 215 volt.

N	E_1	I_1	I_2	C_1	$C_2 - C_1$	C_2	E_2	$\frac{E_2}{E_1}$	P_2 $(P_1 = 219)$	I_1 sen C_1
1552	1265	23.6	0	75° 30′	12° 30′	88° 0′	0	0	100 0	22.8
1552	1500	24.0	2.2	73 0	16 20	89 20	240	0.160	99.3	23.0
1551½	2000	25.4	7.0	68 30	23 40	92 10	712	356	98.0	23.6
1551	2500	26.9	11.7	64 30	30 30	95 0	1135	454	96.4	24.3
1550½	3000	28.6	16.4	61 0	36 50	97 50	1542	514	94.4	25.0
1550	3500	30.5	21.1	58 0	42 40	100 40	1908	545	92.4	25.9
1549	4000	32.7	25.8	55 40	47 50	103 30	2270	568	90.2	27.0
1548	4500	35.1	30.5	53 50	52 30	106 20	2570	572	87.8	28.3
1547	5000	37.8	35.2	52 10	57 0	109 10	2840	568	85.2	29.9
1545½	5500	40.7	39.9	51 0	61 0	112 0	3070	557	82.0	31.7
1544	6000	44.1	44.5	50 0	64 50	114 50	3230	538	78.0	33.8
1542	6500	48.2	49 2	49 10	68 30	117 40	3310	509	72.4	36.5

b) Tensione primiaria 180 volt.

N	E_1	I_1	I_2	C_1	$C_2 - C_1$	C_2	E_2	$\frac{E_2}{E_1}$	P_2 $(P_1 = 221)$	I_1 sen C_1
1550	920	19.4	0	74° 30′	14° 30′	89° 0′	0	0	100.0	18.7
1549	1500	21.1	6.2	66 30	27 0	93 30	516	0.344	98.0	19.3
1548½	2000	23.1	11.4	61 10	36 10	97 20	950	475	95.6	20.2
1547½	2500	25.5	16.6	57 0	44 10	101 10	1290	516	93.0	21.4
1546½	3000	28.2	21.8	53 40	51 20	105 0	1600	534	90.0	22.7
1545½	3500	31.2	27.1	51 30	57 20	108 50	1880	537	86.0	24.4
1544	4000	34.7	32.4	50 10	62 30	112 40	2130	532	81.0	26.6
1542½	4500	38.9	37.7	49 20	67 10	116 30	2300	511	75.6	29.4
1541	5000	43.4	43.0	48 40	71 40	120 20	2410	482	68.8	32 6

13. Le condizioni delle misure precedenti non rappresentano quelle nelle quali il trasformatore è destinato nella pratica a funzionare, essendo scopo precipuo del sistema quello di servire motori asincroni nei quali la corrente ha sempre una differenza di fase notevole rispetto alla tensione. Quelle misure tuttavia sono utili per mostrare il comportamento del sistema nel caso limite per esso maggiormente vantaggioso, e per chiarire meglio come le diverse grandezze che a noi interessano siano dalla induzione nel secondario influenzate. Se una selfinduzione esiste nel circuito secondario esterno, questa origina non solo una differenza di fase tra la tensione e la corrente secondaria, tale da richiedere una maggiore intensità di corrente secondaria e primaria a parità di tensione e di energia; ma una maggior differenza di fase si genera necessariamente nel primario, ed una maggiore corrente di magnetizzazione è richiesta, la quale occasiona perdite di isteresi più considerevoli. Il rendimento della trasformazione è dunque minore, e dopo raggiunto un massimo cade tanto più rapidamente, quanto la differenza di fase nel secondario è più pronunciata; contemporaneamente cade perciò anche la quantità massima di energia elettrica che il secondario può fornire, e, se l' energia che gli apparecchi di consumo richiedono supera un certo limite, l' apparecchio alimentatore non è in grado di sopportarne anche momentaneamente il sovraccarico.

Per avere nel circuito secondario una selfinduzione conveniente io mi servii di un sistema di dieci spirali eguali di grosso filo di rame, aventi ciascuna una resistenza di circa 2 ohm ed un coefficiente di selfinduzione di circa 0,06 henry, inserendone un conveniente numero in parallelo con altrettanti gruppi di lampade ad incandescenza. La differenza di fase tra la tensione e la corrente secondaria si può mantenere così esattamente costante per carichi diversi, o si può essa stessa variare a piacimento. La sua grandezza si deduce dalla misura dell' energia secondaria mediante il wattometro, e della corrente e della tensione mediante il dinamometro ed il voltometro.

Con questo metodo furono eseguite da me due serie di misure, nelle quali la differenza di fase nel secondario si scelse rispettivamente di 38° e di 48° inserendo in una un gruppo di 14 e nell' altra di 10 lampade in parallelo con ogni spirale. Il primo angolo è dell' ordine di grandezza delle differenze di fase che intervengono a regime nei piccoli motori asincroni polifasi, quali solo è possibile di alimentare con questo sistema in modo permanente. Una differenza di fase dell' ordine della seconda qui realizzata occorre nei motori quando il carico è poco minore del normale, ed è sempre largamente superata nel periodo di avviamento. Le due serie di misure riproducono dunque condizioni essenzialmente frequenti nella pratica, e presentano perciò un certo interesse.

I risultati sono compendiati nelle tabelle seguenti. La tensione primaria, non regolata direttamente, variò di poco attorno ad un valor medio di 211 volt. Le tensioni secondarie sono riferite ad una primaria tale da avere 100 volt a vuoto. Per poter confrontare in modo più semplice i risultati tra loro e coi precedenti, essi sono ancora riferiti a valori equidifferenti dell' energia primaria.

N. V. *Trasformatore di fase con carico secondario induttivo.*

a) Differenza di fase $\delta_{I_2P_2} = 38°$.

N	E_1	E_2	I_1	I_2	C_1	C_2-C_1	C_2	$\varphi_{P_1P_2}$	$\frac{E_2}{E_1}$	P_2 $(P_1=218.4)$	I_1 sen C_1
1560	1220	0	24.2	0	76° 30′	49° 30′	126° 0′	88° 0′	0	100.0	23.5
$1559\frac{2}{3}$	1500	240	25.4	3.5	74 0	53 10	127 10	89 10	0.160	97.0	24.4
1559	2000	680	27.6	9.4	70 0	59 20	129 20	91 20	340	92.4	25.9
$1558\frac{1}{2}$	2500	1035	30.0	15.3	67 0	64 30	131 30	93 30	414	87.4	27.6
$1557\frac{1}{3}$	3000	1320	32.7	21.2	64 30	69 10	133 40	95 40	440	82.0	29.5
1556	3500	1560	35.8	27.1	62 40	73 10	135 50	97 50	446	76.4	31.8
$1554\frac{1}{3}$	4000	1740	39.5	33.0	61 20	76 40	138 0	100 0	435	70.0	34.7
$1552\frac{1}{3}$	4500	1855	43.8	38.9	60 10	80 0	140 10	102 10	412	62.8	38 0
1550	5000	1900	49.0	44.8	59 50	82 30	142 20	104 20	380	54.6	42.4

b) Differenza di fase $\delta_{I_2P_2} = 48°$.

N	E_1	E_2	I_1	I_2	C_1	C_2-C_1	C_2	$\varphi_{P_1P_2}$	$\frac{E_2}{E_1}$	P_2 $(P_1=218.4)$	I_1 sen C_1
1550	1170	0	22.9	0	75° 50′	60° 10′	136° 0′	88° 0′	0	100 0	22.2
$1549\frac{2}{3}$	1500	270	24.6	4.2	73 0	64 10	137 10	89 10	0 180	96.0	23.5
1549	2000	630	27.8	10.5	70 0	68 50	138 50	90 50	315	89.8	26.1
$1548\frac{1}{3}$	2500	925	31.1	16.8	67 50	72 40	140 30	92 30	370	83.6	28.8
1547	3000	1176	34.6	23.1	66 0	76 10	142 10	94 10	392	77.4	31.6
$1545\frac{2}{3}$	3500	1375	38.3	29.4	64 20	79 30	143 50	95 50	393	71.2	34 5
1544	4000	1495	42.3	35.7	63 0	82 30	145 30	97 30	374	66.0	37.7
1542	4500	1560	46.5	42.0	61 50	85 20	147 10	99 10	347	59.8	41.0
1539	5000	1600	51.0	48.3	60 50	88 0	148 50	100 50	320	52 6	44.5

14. Il trasformatore di fase è per sè un motore asincrono, e come tale può funzionare anche quando il circuito secondario sia assoggettato ad un certo carico elettrico. Le misure discusse nel paragrafo 11 hanno già mostrato come varii il rapporto di trasformazione e la fase della tensione secondaria a circuito aperto al variare del carico meccanico e della velocità d'armatura. Era però interessante vedere come l'apparecchio si comporti nei riguardi della trasformazione elettrica quando esso contemporaneamente fornisce lavoro meccanico. A tal uopo un'ultima serie di misure fu eseguita, durante la quale il freno elettromagnetico assorbiva un lavoro costante di 2400 watt, e nel circuito secondario era inserito un carico elettrico senza selfinduzione, costituito da lampade ad incandescenza. Le misure elettriche furono condotte identicamente alle precedenti; l'eccitazione del freno fu regolata in modo da tenerlo costantemente in equilibrio. La tensione primaria sotto il carico crescente si abbassò da 214 e 202 volt; la tensione secondaria è ancora riferita ad una primaria di

218 volt, per rappresentare con 100 la tensione a circuito aperto. Il coefficiente di rendimento si ha dividendo per l'energia elettrica primaria la somma del lavoro meccanico e dell'energia elettrica secondaria. Esso dipende naturalmente dalla proporzione adottata di carico elettrico e meccanico; i risultati compendiati nella tabella seguente mostrano però che, quando l'apparecchio fornisce come motore una parte notevole del lavoro normale, esso può funzionare contemporaneamente come trasformatore in condizioni vantaggiose. Forse l'applicazione più economica del sistema si farà precisamente là dove, dovendosi mantenere un motore asincrono di potenza notevole continuamente in movimento, può aggiungersi sull'induttore di questo un avvolgimento secondario convenientemente proporzionato per alimentare in modo permanente o solo durante il periodo di avviamento parecchi piccoli motori asincroni che si devono mettere sovente in marcia sotto carico, ma che a regime non assorbono una quantità di lavoro considerevole. Eventualmente quel sistema secondario potrà servire come in questo caso all'avviamento del motore principale.

N. VI. *Apparecchio funzionante come motore e trasformatore.*

N	E_1	I_1	I_2	C_1	C_2-C_1	C_2	$I_2 P_2$	E_2	$\frac{E_2}{E_1}$	P_2 $(P_1=218)$	I_1 sen C_1
1565	1240	23.6	0	76° 0′	11° 30′	87° 30′	0	0	0	100.0	22.9
1551	3760	30.1	0	53 40	40 10	93 50	0	2400	0.638	96.0	24.3
1547	5000	35,3	11.0	47 40	52 40	100 20	1000	3400	680	91.2	26.1
1541	6000	41.0	19.8	45° 0′	61 30	106 30	1620	4020	670	86.0	29.0
1533	7000	47.8	28.6	44 10	69 20	113 30	2110	4510	644	78.8	33.3
1521	8000	55.0	37.4	44 0	76 40	120 40	2400	4800	600	70.0	38.2

I risultati delle esposte ricerche teoriche e sperimentali sul trasformatore di fase Ferraris-Arnò si possono riassumere in alcune proposizioni d'indole generale.

1. Il trasformatore di fase ha per sè i caratteri generali dei motori asincroni monofasi, e la costruzione ne deve essere subordinata a criterii analoghi. La velocità dell'armatura si scosta pochissimo da quella di sincronismo, assai meno che nei motori a parità di energia disponibile. La corrente primaria presenta rispetto alla tensione una differenza di fase dello stesso ordine di grandezza, la quale decresce al crescere del carico, tendendo ad un limite; questo dipende essenzialmente dagli elementi dell'apparecchio, ma suol essere maggiore nel trasformatore che non nel motore, e tanto più grande quanto è maggiore la differenza di fase tra la corrente e la tensione secondaria.

2. Le forze elettromotrici che le correnti d'armatura inducono nei circuiti fissi naturalmente differiscono tra loro in fase di angoli corrispondenti alla loro differenza di posizione. Però le tensioni secondarie sono rispetto alla primaria ritardate di angoli dipendenti dalle resistenze e dalle induzioni proprie e mutue dei circuiti. Le diver-

genze degli angoli corrispondenti, piccole quando i circuiti secondarî sono aperti, vanno lentamente crescendo col carico come una funzione sensibilmente lineare della corrente secondaria. Quando occorresse di alimentare con questo sistema in modo permanente motori polifasi, potrebbesi in parte ovviare a ciò alterando lo spostamento dei circuiti secondarî rispetto al primario.

3. Il rapporto di trasformazione a circuiti secondarî aperti è sempre minore di quello dei numeri di spire secondarie e primarie. La divergenza dipende essenzialmente dalla relazione tra i cofficienti di induzione propria e mutua dei circuiti fissi e d'armatura, ed è tanto maggiore quanto più imperfetto il concatenamento dei circuiti elettrici con quello magnetico, e quanto maggiore la differenza della velocità dell'armatura da quella di sincronismo. In conseguenza di ciò, e della caduta di potenziale nelle resistenze metalliche, la tensione utile secondaria si abbassa al crescere del carico rapidamente; tanto più rapidamente se il carico elettrico è induttivo, o se l'apparecchio funziona contemporaneamente come motore, fornendo lavoro meccanico.

4. Le correnti primaria e secondaria presentano una differenza di fase rapidamente crescente col carico, e tanto maggiore quanto il carico è più induttivo, o quanto maggiore è il lavoro meccanico che l'apparecchio fornisce contemporaneamente come motore. I limiti tra cui varia questa differenza di fase col carico differirebbero tra loro di 90° se la velocità dell'armatura restasse costante; i loro valori assoluti sono solo dipendenti dalla resistenza, selfinduzione e velocità dell'armatura.

Se il trasformatore di fase è combinato con trasformatori ordinarî per alimentare sistemi polifasi di tensione differente da quella primaria, le tensioni e le correnti trasformate dai secondi differiscono dalle primarie quasi esattamente di mezzo periodo in condizioni di regime, e finchè il carico non è induttivo. Le tensioni e correnti ricavate dal trasformatore di fase possono dunque ancora considerarsi rispetto a quelle in condizioni di fase poco diverse dalle precedenti.

5. La componente della corrente primaria che differisce di mezzo periodo in fase rispetto alla tensione aumenta con legge parabolica all'aumentare del carico meccanico ed elettrico, tanto più rapidamente se il carico elettrico è induttivo. Perciò crescono rapidamente le perdite d'isteresi magnetica, oltre a quelle nelle resistenze ohmiche delle condutture, ed il coefficiente di rendimento decresce dopo aver raggiunto un certo limite. Questo è minore nel trasformatore che nel motore; tanto minore quanto il carico elettrico è più induttivo. Con una certa approssimazione si può constatare dalle misure precedenti che il rendimento massimo della trasformazione decresce come il coseno della differenza di fase tra la tensione e la corrente secondaria. Contemporaneamente e più rapidamente decresce la quantità massima di energia elettrica che l'apparecchio può fornire.

Ricerche sulle emanazioni terrestri italiane.

I.

Gas delle terme di Abano, dei soffioni boraciferi della Toscana, gas combustibili dell'Appennino bolognese.

Memoria del Socio R. NASINI, di F. ANDERLINI e R. SALVADORI [1].

(con sette tavole)

INTRODUZIONE

Le ricerche che qui esponiamo furono cominciate nel 1894, subito dopo l'annunzio della scoperta dell'argo, prima ancora che venisse pubblicata la Memoria estesa di Lord Rayleigh e del prof. Ramsay, ed ebbero per scopo da principio di isolare l'argo [2] dall'aria e di studiarne per nostra istruzione le proprietà. Poi ci parve di grande interesse di esaminare se l'argo era contenuto nelle emanazioni terrestri, specialmente in quelle ricche di azoto, tra cui le più accessibili a noi erano quelle delle terme di Abano, i gas delle quali già erano stato oggetto di studio per parte del Nasini e dell'Anderlini. Veduto più tardi che in esse l'argo era contenuto in quantità assai notevole formammo il piano di esaminare sistematicamente le emanazioni terrestri italiane allo scopo principalmente di cercarvi l'argo e l'elio, che nel frattempo era stato scoperto, ed eventualmente altri elementi della stessa natura che potessero esservi contenuti.

Il problema si presentava e si presenta del più alto interesse, nou dal solo punto di vista della chimica teorica, ma anche per riguardi mineralogici e geologici. Sino ad ora l'argo non si è potuto estrarre da nessun minerale: solo si è intravisto, e non sicuramente insieme, coll'elio nei gas che si estraggono o coll'acido solforico o mediante la diminuzione di pressione da alcuni minerali rari di uranio, di torio, di cerio, da quelli appunto da cui si ricava l'elio: con certezza l'argo non si è avuto che dalla meteorite di Augusta County in Virginia, dove insieme con azoto e con elio

(1) Debbo dichiarare, sebbene l'indole del lavoro renda questa dichiarazione quasi superflua, che in queste ricerche io non ho altro merito che quello di averne presa l'iniziativa, di aver dato qualche consiglio sull'indirizzo generale e di averne resa possibile la continuazione, contribuendo sin che ho potuto col mio, per le misere condizioni del mio Istituto, e procurandomi poi l'aiuto dell'Accademia dei Lincei. R. Nasini.

(2) Le ragioni per le quali in italiano si deve dire argo e non argon si possono vedere nella Nota di R. Nasini, Argo o Argon (Gazz. chim. ital., tomo XXV, pag. 40).

si trovava occluso (1). Nè argo nè elio si sono riscontrati nelle sostanze organiche animali e vegetali. La presenza dell' argo in una emanazione terrestre, sia pure che indicasse soltanto con certezza che in essa era contenuta dell' aria, sia che, col progredire degli studî potesse essere indizio della derivazione del gas da determinate specie mineralogiche, sia che potesse servire a escludere per esso l' origine organica, sarebbe sempre un dato prezioso per la storia e per la ricerca dell' origine della emanazione. Lo stesso è a dirsi e con più ragione dell' elio il quale non si riscontra nell' atmosfera, o almeno solo in tracce talmente esigue che ben si può supporre derivino dalle emanazioni che lo contengono: come è noto esso non si trova che in quei minerali rari di cui sopra abbiamo detto, onde la sua presenza nei gas terrestri costituisce un vero enigma e suggerisce argomenti per importanti studî geologici.

L' eventuale ricerca di nuovi elementi si presentava pure come un problema assai seducente. Se elementi inattivi sul genere dell' argo e dell' elio esistono, nulla di più naturale che cercarli là dove questi due si trovano in quantità più o meno abbondante; e noi sappiamo ormai che alcune emanazioni sono ricche dell' uno e dell' altro gas. È noto ritenersi da molti che altri elementi inattivi debbano esservi: già Lord Rayleigh e il Ramsay non esclusero che l' argo potesse essere un miscuglio di due elementi, ciascuno con molecola monoatomica, uno col peso molecolare di 37, con quello di 82 l' altro; e di un gruppo intero di elementi inattivi, il cui peso atomico verrebbe ad essere immediatamente superiore a quello rispettivo degli alogeni, è stata prevista l' esistenza da coloro che vorrebbero applicabile anche a questi elementi inattivi il sistema periodico del Mendeleieff: conati inutili forse, giacchè mancando essi della proprietà fondamentale su cui il sistema stesso è basato, quello di dare origine a combinazioni, potrebbero benissimo non rientrare in un quadro che presuppone come una linea principale la forma di combinazione. Ad ogni modo l' esistenza di altri gas elementari inattivi ci viene fatta supporre anche dagli studî del Runge e del Paschen sullo spettro dell' elio; e sebbene le più recenti ricerche del Ramsay e del Collie abbiano dimostrato che dall' argo e dall' elio per diffusione non si può ricavare che argo ed elio, nondimeno l' ipotesi di mescolanze di gas aventi densità non molto differenti è tutt' altro che esclusa. Non abbiamo poi bisogno di ricordare che non ancora è stato scoperto il coronio, l' elemento ipotetico a cui si attribuisce la riga 1474 K della Corona, della lunghezza di onda di $\mu\mu$ 531,69 e che dovrebbe essere anche più leggero dell' idrogeno.

Pochi paesi come il nostro sono così ricchi di emanazioni gassose naturali, certo nessuno in Europa. Qui da per tutto emanazioni di acido carbonico, qui i gas delle terme euganee, quelli combustibili dell'Appennino bolognese e pistoiese, le Salse dell' Emilia, le emanazioni che si connettono colle sorgenti petrolifere dell'Italia centrale e meridionale, i soffioni boraciferi della Toscana, le sorgenti termominerali delle appendici del Monte Amiata, e poi le manifestazioni endogene presso gli antichi vulcani laziali, le acque Albule di Tivoli, il Bulicame di Viterbo, e finalmente le ema-

(1) Recentissimamente il prof. Ramsay trovò l' argo nel Malacone, solfato di zirconio, di Hitteroe in Norvegia (v. Ramsay e Morris W. Travers, *The gaseous Constituents of certain Mineral Substances and Natural Waters*. Proceedings Royal Society, febbraio 1897).

nazioni che si collegano coi fenomeni vulcanici attuali, quelle del Vesuvio, dei Campi Flegrei, delle isole di Ischia, quelle della Sicilia così svariate, le fumarole sull' Etna e alle falde, le Salinelle di Paternò, il lago dei Palici, le Macalube di Girgenti, quelle delle isole Eolie, dello Stromboli, dell' isola di Vulcano. Come si vede il materiale per il lavoro, se un difetto ha, è quello di essere troppo esuberante, cosicchè era difficile di sapere da dove cominciare, se le ragioni di economia non ci avessero costretto a intraprendere il nostro studio dalle emanazioni più vicine e successivamente passare a quelle più distanti.

Queste nostre emanazioni sono tutt' altro che bene studiate. Le ricerche più complete e fatte, almeno fino ad un certo punto, secondo un piano prestabilito, si debbono, doloroso a dirsi, a degli stranieri: a Ch. S. C. Deville, che esaminò i gas del Vesuvio, dei Campi Flegrei, della Sicilia, delle isole Eolie ecc., ecc., e al Fouqué e al Gorceix, che studiarono tanto quelli infiammabili dell'Appennino quanto quelli dei soffioni boraciferi: e analisi dei primi gas, di quelli cioè del Vesuvio e dei Campi Flegrei, furono pure fatte dal prof. S. De Luca e dal prof. D. Franco e di quelli della Sicilia dal prof. O. Silvestri e da altri. Ma ricerche sistematiche vere e proprie non si possono chiamare; nella maggior parte dei casi inoltre la raccolta dei gas non fu così accurata, il metodo analitico così preciso da non lasciare dei dubbî sui resultati finali. Un nuovo studio anche dal solo punto di vista analitico sarebbe tutt' altro che fuor di luogo. E un tale studio noi l' avremmo ben volentieri intrapreso se i mezzi ce l' avessero permesso; ma invece ci siamo dovuti limitare, per ogni regione, a raccogliere pochi gas che ci potessero presumibilmente rappresentare la natura dell' emanazione; quei pochi li abbiamo sottoposti ad un' analisi accurata; ma da questa analisi isolata a una ricerca sistematica ci corre assai ed a noi ci duole di non averla potuta eseguire, perchè siamo di opinione che, in specie per il Vesuvio, l' Etna e le altre località vulcaniche, simili indagini porterebbero frutti preziosi e quali forse non si prevedono.

La raccolta dei gas fu problema tutt' altro che facile; si trattava di trasportarne grandi quantità e nel tempo stesso bisognava esser certi che dell' aria non penetrasse negli apparecchi durante la raccolta stessa; della qual cosa non si preoccuparono molto altri esperimentatori, limitandosi, in base alle proporzioni relative dell' ossigeno e dell' azoto, a detrarre l' aria dal resultato finale. Ora tutte le volte che il gas esce da polle che si trovano in acqua bollente, o, peggio ancora dal fondo di caverne o da crepacci nelle roccie, l' impresa è tutt' altro che facile: difficilissima poi quando si ha da fare con gas soffocanti che escono in luoghi quasi inaccessibili, come talora sul Vesuvio. Aggiungasi in molti casi la necessità di evitare il contatto dei gas coll' acqua e di rinunziare perciò al comodo e sicuro riempimento idropneumatico, quella di fare alcuni assorbimenti sul posto, di evitare recipienti di metallo a pareti di ordinaria grossezza dovendosi poi praticare il vuoto negli apparecchi, per non potersi estrarre il gas per spostamento con acqua. Un metodo, che da più parti ci venne suggerito come più pratico, sarebbe stato quello di comprimere il gas in recipienti metallici a fortissime pareti, quali si adoprano per i gas compressi o liquefatti; ma a questo procedimento non abbiamo sin qui ricorso per mancanza degli apparecchi necessarî e anche perchè, tutto considerato, non lo crediamo sempre di facile attuazione.

Fortunatamente il nostro compito ci fu reso assai più facile dalla gentilezza che abbiamo riscontrato in tutti coloro cui appartenevano, o a cui erano affidate, le emanazioni gassose che abbiamo studiato.

Il cav. avvocato Giorgio Sacerdoti con squisita gentilezza ci permise ogni lavoro alla sorgente del Monte Irone in Abano, a lui appartenente, e mise a nostra disposizione, per la raccolta, i suoi dipendenti.

A Larderello il conte Florestano di Larderel aveva date le opportune istruzioni perchè fossimo ospitati nel suo palazzo con quella larga e cortese ospitalità che è tradizionale della illustre sua famiglia; e trovammo poi là nel sig. F. Raynaut, direttore generale degli stabilimenti boraciferi, non solo un gentiluomo perfetto e cortesissimo, ma anche un distinto uomo di scienza che prese a cuore i nostri lavori, ci dette consigli utilissimi e ci aiutò con tutti i mezzi che erano a sua disposizione, onde facilissima riuscì la raccolta.

Ai Bagni della Porretta il ch. prof. Giuseppe Ravaglia, direttore delle Terme Porrettane, e di esse così benemerito per lo zelo intelligente e per le pregevoli pubblicazioni, ci fu guida e consigliere prezioso tanto per i gas dei Bagni quanto per quelli del vulcanello di Sasso Cardo: egli pure mise a nostra disposizione tutto quello che poteva occorrerci per renderci più agevole la raccolta.

A tutti questi egregi rendiamo qui le più vive grazie e per noi personalmente e per la scienza che coltiviamo.

Le nostre ricerche hanno proceduto un po' lentamente, causa in parte la natura delle esperienze, in parte la mancanza di mezzi. Sono esperienze assai costose per il grande consumo di gas, che qui a Padova costa anche adesso 40 centesimi il metro cubo, e di tutto quello che è necessario per avere con sole pile una forte scarica elettrica per settimane e settimane. Costoso poi il raccoglimento dei gas non solo per le spese di viaggio non indifferenti e per quelle della raccolta, ma anche perchè, volendosi ricercare e dosare l'argo e l'elio, e, eventualmente, nuovi elementi, si è costretti a raccogliere grandi quantità di gas, a fare su larga scala degli assorbimenti sul posto e tutto questo esige un trasporto di grande materiale e quindi una forte spesa. E bene spesso tanto denaro e tanta fatica è resa inutile dalla nessuna cura, diremo anzi dalla vergognosa, che talora sembrerebbe colpevole, trascuratezza del personale delle Ferrovie Italiane; cosicchè ben raro è il caso che malgrado l'eccellente imballaggio un buon terzo degli apparecchi e dei recipienti non giunga rotto a destinazione! Il fatto è che ultimate le ricerche che sono il soggetto di questa Memoria noi ci vedevamo costretti a rinunziare a proseguire il nostro lavoro, e così avremmo fatto se l'aiuto datoci dall'Accademia dei Lincei non ci fosse giunto in buon punto. Allorquando nella seduta del 7 febbraio 1897 uno di noi presentò questa Memoria all'Accademia dichiarando che eravamo nella impossibilità di proseguire le ricerche intraprese, su proposta del prof. Cannizzaro, a cui tutta l'Accademia annuì, il presidente prof. Brioschi ci concesse intanto un sussidio di lire 500 che ci permise di raccogliere i gas del Vesuvio e dei Campi Flegrei. Ai due uomini illustri, così benemeriti della scienza italiana, porgiamo qui i più vivi ringraziamenti coll'augurio che i nostri studî, da loro favoriti, sieno per riuscire di qualche utilità.

Noi esponiamo le nostre ricerche secondo l'ordine col quale furono eseguite e senza preoccuparci se, nel frattempo, da altri le stesse cose sono state osservate:

stampiamo, quasi diremmo integralmente, il nostro libro di Laboratorio: raramente anche facciamo citazioni [1]. Gli apparecchi che descriviamo sono quelli che effettivamente ci hanno servito; alcuni sono del tutto nuovi, altri modificazione o in peggio o in meglio di quelli impiegati dal prof. Ramsay e da Lord Rayleigh. Abbiamo creduto opportuno di pubblicare tutto quello che abbiamo fatto e tutto quello che abbiamo visto, giacchè, se si eccettuano gli studî sugli spettri tanto dell' argo che dell' elio, nessuno, crediamo, ha rifatta su larga scala la preparazione di questi gas e noi pensiamo che, specialmente ai lettori italiani, non sarà discaro di trovare come si può esperimentalmente procedere in quest' ordine di indagini coi mezzi di cui dispone uno dei nostri Laboratorî. Del rimanente, trattandosi di soggetto tanto importante e sul quale c' è ancora tanto da lavorare, non crediamo che sia inutile, anche in sè, l' esposizione di fatti coscienziosamente osservati.

Modo di operare e resultati delle esperienze. Prime esperienze sul gas di Abano [2].

La prima serie di ricerche fu fatta sul gas d' Abano con risultati negativi per l' argo. È però da rilevarsi che il gas della sorgente venne raccolto in gassometri ordinarî nei quali fu conservato lungo tempo (circa due mesi) a contatto dell' acqua. In secondo luogo gli apparati non erano tanto accuratamente disposti da non lasciar qualche dubbio che si fossero verificate fughe, tanto più che avvennero delle rotture di tubi nel corso delle operazioni.

Tuttavia si riuscì a raccogliere un residuo difficilmente assorbibile dal magnesio rovente, anche rinnovato, il quale introdotto in tubo di Geissler con poli di alluminio non diede che lo spettro dell' azoto. Quando furono eseguite queste esperienze (marzo e aprile 1895) non erano comparsi alla luce che i pochi cenni degli scopritori dell' argo e molto meno si avevano notizie abbastanza precise intorno alla proprietà di reciproca obliterazione degli spettri dei gas mescolati, come fu messo in tanta evidenza più tardi dal Ramsay e dal Collie e perciò non possiamo accertare se il gas delle prime

[1] Una eccellente Monografia sull' argo e sull' elio è quella del dott. Martin Mugdan, *Argon und Helium. Zwei neue gasförmige Elemente* (Sammlung chemischer und chemisch-technischer Vorträge, Stuttgart, 1896). In questa Memoria c'è una rivista completa di tutto quello che è stato fatto sull'argomento sino a verso la metà del 1896.

[2] Sino dal luglio 1895 (Atti del R. Ist. Veneto) venne pubblicata da R. Nasini e F. Anderlini una breve Nota, nella quale fu data notizia di qualche risultato delle esperienze istituite sopra le emanazioni gassose naturali di Abano e più tardi, nel novembre 1895, un' altra Nota (Rend. Acc. Lincei) sopra il fatto singolare della ricomparsa dello spettro dell' azoto nei tubi di Geissler riempiti di argo, dopo che lo spettro di quest' ultimo era sparito, tanto nel caso in cui lo spettro dell' azoto fosse visibile al principio dell' esperienza quanto nel caso contrario. Questo fatto era del tutto nuovo ed avrebbe suggerito ipotesi assai facili a trarsi sulla natura dell' argo rispetto all' azoto, ipotesi che noi però ci astenemmo dal fare avendo già ben visto quante variazioni si hanno negli spettri coi tubi di Geissler. Più tardi il Ramsay e il Collie (Zeitschrift für physikalische Chemie. XIX, 701. Luglio 1896) dimostrarono con bellissime ed estese ricerche su mescolanze di azoto, idrogeno, argo, elio che questo sparire e ricomparire di uno spettro col variare della pressione era un fenomeno generale e stabilirono anche in quale proporzione e a quale pressione si deve trovare un gas perchè possa essere scoperto insieme con altri nei tubi di Geissler.

ricerche contenesse dell' argo, come venne posto in dubbio nella Nota preliminare [1] pubblicata, mentre le altre esperienze eseguite su quantità molto maggiori di gas ci diedero risultati positivi per la presenza dell' argo, come verrà in seguito esposto.

Prima perciò di procedere a ulteriori ricerche sulle emanazioni terrestri noi ci occupammo di estrarre l' argo dall'aria di Padova e di studiarlo, e procedemmo anche ad altre esperienze, giustificate ai tempi che le facemmo, sull' azoto ottenuto per via chimica per vedere se da esso, e anche dall' ammoniaca, si poteva per prolungato passaggio della scintilla ottenere un gas che dèsse lo spettro dell' argo.

Estrazione dell'argo dall' aria.

Furono eseguite due operazioni: nella prima l' aria venne privata dell' ossigeno bruciando dell' alcole sotto una campana; però non tutto l' ossigeno venne eliminato, ma ne rimase un poco; nella seconda l' ossigeno venne eliminato col fosforo.

Lo scopo per cui fu impiegato l' alcole era di vedere se si formava sempre nei tubi a magnesio una sostanza nera che tramanda odore di fosfine a contatto dell'aria; perciò anche il disseccamento venne effettuato coll' acido solforico esclusivamente. La sostanza nera si è formata egualmente e tramandava lo stesso odore fosfinico. Abbandonata all' aria questa sostanza si disaggrega riducendosi in una polvere nerastra senza odore sensibile.

In quasi tutti i tubi si trova del Mg depositato sulle pareti in cristalli accanto all' azoturo giallo-aranciato. Sembra che il magnesio cristallizzato non sia atto ad assorbire l' azoto che con difficoltà. In ogni caso i tubi sono profondamente attaccati e la sostanza nera non si può staccare perchè forma col vetro una massa continua.

Il magnesio venne scaldato nel vuoto per eliminare l' idrogeno ed altri gas, che contiene in proporzione ragguardevole, perchè possono giungere a 8-10 c. c. per ogni 20 grammi di metallo in nastri.

L' assorbimento dell' azoto per mezzo del magnesio può essere totale, prolungando sufficientemente il contatto, in modo che nel tubo di Geissler non si manifesta il suo spettro; ciò indica che, se pur vi ha presenza di azoto, esso deve trovarsi al disotto di 0,008 p. $^0/_0$, questo essendo il limite della visibilità del suo spettro nell' argo secondo i dati forniti dal Ramsay e dal Collie.

In questa occasione fu constatato per la seconda volta che la diminuzione del volume del gas che si fa circolare sul magnesio rovente si riduce ad una piccola frazione, ma non cessa totalmente, ed è più sensibile, sembra, quando si rinnova il magnesio.

Come dimostrarono il Ramsay e Lord Rayleigh il nitrogeno si può eliminare, benchè più lentamente, per mezzo dell' ossigeno e della scintilla in presenza della soda o potassa diluite. Per evitare l' inconveniente dello scambio dei gas coll' aria attraverso l' acqua sulla quale vengono conservati qualche tempo, perchè, come è noto, avviene scambio per diffusione fra il gas rinchiuso e l' aria esterna, si fece uso del mercurio, in modo che l' acqua si poteva ridurre a pochi centimetri cubici ed era sottratta inoltre al

[1] Atti dell' Istituto Veneto tom. VI.

contratto coll' aria. Eliminando poi l' ossigeno eccedente col pirogallato potassico, si può conservare l' argo puro un tempo indefinito.

Esperienze con tubi di Geissler a poli di magnesio [1].

Un tubo di Geissler con poli di magnesio, al quale non venne fatto subire nessun trattamento, fu caricato alla pressione di circa 4 mm. con argo incompletamente depurato dall' azoto.

Il passaggio della scintilla diede luogo a varî fenomeni di luminosità: durante le prime ore il polo negativo si mostrò circondato da una guaina azzurra per circa $^1/_8$; il tubo capillare era di color giallo ranciato ed allo spettroscopio non si vedeva che lo spettro dell'azoto poco intenso, ma netto, e quello dell' idrogeno che poco dopo scomparve; prolungando il passaggio della corrente, la luminosità azzurra invase tutto il polo negativo e si estese un poco anche al positivo mentre lo spettro si fece più vivo e netto, e allora ricomparvero anche le righe dell' idrogeno, in mezzo alle bande dell' azoto. Continuando la scarica la luminosità azzurra si estese per tutta la lunghezza dei due poli, il tubo capillare assunse una tinta gialla e le righe dell' idrogeno scomparvero.

Fu necessario il passaggio della corrente per altri quattro giorni prima che tutto l'azoto venisse assorbito e si vedesse comparire lo spettro dell' argo. Molto prima però si intravedeva un secondo spettro oltre quello dell' azoto: specialmente le bande azzurre e violette si vedevano solcate da righe sempre più brillanti e nello stesso tempo manifestavasi una difusione di luminosità che si estendeva gradatamente nel rosso estremo dello spettro dell' azoto, mentre il campo verde era solcato da bande che andavano pure gradatamente diventando più oscure.

La scomparsa dello spettro dell' azoto avvenne infine quasi istantaneamente e fu preceduta da una più intensa e vivissima luminosità gialla pallida del capillare e da un principio di deposizione di specchio metallico nelle vicinanze dei poli. Alla luminosità gialla pallida ne subentrò una rossa carmino e lo spettro dell' argo si mostrò in tutta la sua purezza.

Il riscontro delle righe principali dello spettro che si manifestò venne fatto sulla scorta delle posizioni date in quel torno di tempo da Crookes in via approssimativa [2], e della descrizione, senza però prendere misure causa la mancanza in allora dei mezzi di poterle fare.

Persistendo a far passare la corrente si notò un affievolimento dello spettro dell' argo, scomparvero le due righe rosse mentre i campi rosso e giallo tendevano a diventare continui; poi scomparvero le righe verdi, subentrarono invece le bande dell' azoto mentre persistevano ancora alcune righe azzurre e violette. Ma anche a queste

[1] Queste esperienze sull'assorbimento dell'azoto e poi anche dell'argo per mezzo degli elettrodi di magnesio nei tubi di Geissler furono eseguite nel 1894 e pubblicate da due di noi (Nasini e Anderlini) nel decembre 1895. Due mesi avanti le stesse osservazioni erano state fatte da Troost e Ouvrard.

[2] Lord Rayleigh e W. Ramsay, *L'argo, nuovo componente dell'atmosfera*, traduzione di R. Nasini. Gazz. chim. XXV, p. 1ª, 1895.

subentrarono le solite bande scannellate dell' azoto, senza traccia di altri spettri. Finalmente avvenne anche la scomparsa dell' azoto; la scintilla passava con difficoltà ed a tratti, ma nei brevissimi istanti si vedevano però le righe dell' idrogeno, benchè assai poco luminose, insieme a quella del sodio molto deboli.

Dopo la comparsa dello spettro dell' argo la deposizione metallica sulle pareti del tubo si fece assai intensa e finì col dare uno specchio splendente intorno ai due poli. Ciò sta in relazione coll' abbondanza di vapori di magnesio che si svolgono quando l' argo sta per scomparire in modo che le parti allargate del tubo vengono riempite di una intensa colorazione verde e si mostrano evidenti le righe del magnesio.

Un' altra esperienza venne eseguita coll' argo depurato facendolo passare ripetutamente sul magnesio fin che apparentemente non si verificava assorbimento molto evidente. La depurazione ulteriore fu fatta passando il gas sul rame, sull' ossido di rame e sulla calce sodata contenuti in un tubo da combustione congiunto ai tubi di depurazione descritti altrove. Questa volta fu caricato in tubi abbinati, tutti e due con poli di magnesio, riducendo la pressione a 5 mm. Lo spettro osservato fin dal principio del passaggio della corrente non presentò in modo deciso le righe e le bande dell' azoto, ma si videro subito le due righe rosse dell' argo, quelle dell' idrogeno ed una lontana tendenza alle bande scannellate nell' azzurro. In generale fu però uno spettro poco brillante per circa un' ora; dopo il qual tempo lo spettro dell' idrogeno scomparve e quello dell' argo assunse tutta la sua purezza e vivacità; nello stesso tempo incominciò a depositarsi lo specchio metallico che andò aumentando pel passaggio continuato della scintilla. Introducendo una bottiglia di Leida il deposito metallico scompariva intorno al vertice dell' elettrodo positivo, ma tornava a riformarsi togliendo la bottiglia.

Lo stesso fenomeno si manifestava, invertendo i poli, nella parte opposta. Prolungando per molte ore il passaggio della scintilla, la vivacità dello spettro dell' argo si affievolì, si rividero i fenomeni di luminosità già descritti e finalmente si rese evidente lo spettro dell' azoto nel giallo e rosso colla scomparsa delle righe dell' argo in questi campi mentre persisteva qualcuna dell' azzurro e violetto. A questo punto si fece passare la corrente per il secondo tubo nel quale solo lo spettro dell' azoto era visibile e in tutte le sue parti distinto e brillante.

Il passaggio continuato della scintilla determinò, anche in questo tubo, l' assorbimento completo dell' azoto, e si raggiunse il limite della conducibilità senza che si depositasse specchio metallico. Lo specchio non apparve che forzando la corrente a passare aumentando l' intensità. In tal caso si vedevano a tratti le righe assai deboli dell' idrogeno e quella del sodio: e lo specchio si formò molto leggero solo dopo varie ore.

Esperienze coll'azoto chimico.

I. L' azoto fu preparato per azione dell' ipobromitoso dico sull' urea. L' apparato che servì a questa preparazione riescì alquanto complicato perchè furono prese tutte le misure per eliminare le impurità ed escludere l' aria. Il gas sviluppato in un pallone venne fatto passare per una serie di depuratori contenenti potassa, calce sodata e pomice imbevuta di acido solforico; seguiva un tubo da combustioni con rame me-

tallico ed un rotolo di lamina d'argento per decomporre le sostanze bromurate che eventualmente potevano essere presenti. Oltre a questo doveva passare per un secondo tubo simile con ossido di rame ed in fine attraverso della calce sodata e cloruro di calcio, prima di raccogliersi in un gassometro a mercurio. In tutto il sistema veniva praticato il vuoto e lavato l'apparecchio facendo sviluppare un po' di azoto, ripetendo tale operazione per tre volte prima di raccogliere il gas. Con questo azoto venne caricato un tubo di Geissler doppio con poli di magnesio, facendolo attraversare il depuratore, di cui fu fatta parola antecedentemente, e la pressione fu ridotta a 3 mm. Il passaggio della corrente permise di vedere il solito spettro dell'azoto puro assai vivo e netto, ma dopo circa sette ore incominciò ad indebolirsi ed a comparire lo spettro in righe, che però non ebbe a durare che pochi minuti, perchè i due tubi cessarono di essere conduttori anche rinforzando la corrente. Lo specchio metallico non si depositò che lieve verso la fine e non comparabile a quello che si depositò in seno all'argo, anche alla pressione di 3-4 millimetri e più, colla stessa corrente.

Un secondo tubo spettrale doppio, caricato fino alla pressione di 30 mm., fu sottoposto al passaggio della corrente. L'esperienza perdurò per circa quattrocento ore, ma disgraziatamente, quando volgeva al termine, il riscaldamento intorno ai poli determinò la rottura del tubo. Durante tutto il tempo che agì la corrente non si osservarono modificazioni rilevanti nello apparenze dello spettro.

Dall'aspetto che presentava lo spettro e dalla lievissima deposizione dello specchio, non ancora di lucentezza metallica, si arguì che prima dell'esaurimento sarebbe trascorso un numero di ore ragguardevole, perchè la pressione doveva essere tuttora di almeno 4-6 mm.

II. L'esperienza venne continuata con un altro tubo doppio simile al precedente, che fu caricato con azoto preparato dal nitrito potassico, nitrato ammonico e bicromato potassico secondo il metodo del Böttiger [1]. Il gas venne depurato passandolo sul rame ed ossido di rame ecc., come il precedente, raccolto in gassometro a mercurio e da questo introdotto nel doppio tubo per mezzo del solito depuratore fino alla pressione di 14 mm., che si ritenne la più conveniente, per evitare un eccessivo prolungamento dell'esperienza.

Il passaggio della corrente durò oltre trecento ore provocando il solito spettro dell'azoto più o meno netto a seconda dell'intensità della corrente stessa e della pressione, assumendo una vivacità e una purezza assai maggiori verso la fine, segnata dalla mancanza di conduttività dei tubi. Prima di giungere a questo punto si manifestarono, come altre volte, dei fenomeni di luminosità prodotti dalla scintilla intorno ai due poli e nel tubo capillare.

La luminosità azzurra, che involse prima per lungo tempo, quando la pressione era elevata, soltanto l'estremità del polo negativo, si estese di mano in mano, quando diminuì, a tutto il filo che costituiva il polo negativo e nello stesso tempo invase anche il positivo che finì esso pure coll'esserne del tutto circondato, fino al punto di inserzione, benchè più lentamente del polo opposto. L'aumentata intensità luminosa

[1] Graham-Ott's Lehrb. d. Chem. V. Aufl. 2. Bd. 12.

della scintilla nel tubo capillare e dello spettro fu accompagnata da fenomeni di luminosità intorno ai due poli che precedettero la cessazione della conduttività.

In tutte e due le esperienze condotte a termine le due camere contenenti i poli manifestarono una fluorescenza stratificata, verde-azzurra alle due estremità dei poli e aranciata verso la base; ma a questa subentrò una fluorescenza azzurra alla base, mentre superiormente tendeva al verde, dovuta probabilmente alla volatilizzazione del magnesio. Ad un tratto la luminosità della scintilla nel capillare dal giallo pallido passò al rosso e lo spettro si riempì di righe brillanti e numerose, ma durò così pochi istanti che non lasciò il tempo di percorrere tutto lo spettro dal violetto, in quel momento in vista, fino al rosso, in modo che quando questo campo dopo alcuni secondi fu visibile, lo spettro era tanto debole da non potersi più rilevare, con qualche sicurezza, le righe rimaste. Fra quelle brillanti del principio non furono viste le due righe rosse dell' argo. È probabile che il grande numero di righe che si manifestarono fosse dovuto a più sostanze.

Da queste esperienze risulta che lo spettro dell' azoto non viene sensibilmente modificato per la prolungata azione della corrente elettrica e le poche alterazioni osservate trovano la più probabile spiegazione nella variabilità della corrente e della pressione.

Affinchè l' assorbimento dell' azoto avvenisse con lentezza, allo scopo di far subire a questo corpo l' azione prolungata dell' elettricità, vennero date ai tubi delle forme e dimensioni che parvero le più opportune, e il gas vi fu introdotto sotto una pressione sufficientemente elevata.

La lunghezza totale dei tubi era di 28 centimetri, dei quali 68 mill. occupati dal capillare del diametro interno di mm. 1,3. La parte sporgente dei poli di magnesio era di 65 mm., e questi erano collocati in modo che le estremità libere distavano di circa 11 cent.

Azione della scintilla elettrica sull'ammoniaca fra poli di palladio.

Dalle esperienze sull' azoto puro risultò che su di esso la scintilla elettrica non esercita influenze tali da modificarne lo spettro. Restava a vedersi se, per avventura, uno dei composti più semplici dell' azoto avrebbe potuto fornire quest' ultimo corpo per la sua decomposizione, operata dalla scintilla stessa, aiutata dall' influenza di elettrodi di metalli scelti opportunamente, e, nel caso che tale decomposizione si fosse effettuata, verificare se avvenivano modificazioni di spettri.

Per eseguire l' esperienza fu allestito un doppio tubo, uno con poli di palladio, l' altro con poli d' alluminio che si caricò con ammoniaca. Era necessario che l' ammoniaca fosse pura e secca, perciò si ricorse al cloruro d' argento ammoniacale come sorgente del gas. La preparazione di questo composto fu eseguita coll' introdurre circa 100 grammi di cloruro di argento puro e bianco, seccato in una stufa ad aria prima, poi nel tubo stesso scaldato a 120°, praticando il vuoto. Naturalmente il tubo era coperto completamente con più doppi di carta nera per sottrarre il sale d' argento all' influenza della luce.

La forma di questo tubo era affatto simile a quella del noto tubo di Liebig per seccare le sostanze in corrente di gas o di aria. Quando il cloruro di argento

fu perfettamente secco si fece passare fino a rifiuto su di esso una corrente di gas ammoniaco seccato sulla potassa fusa contenuta in una serie dei soliti tubi.

Il caricamento dei tubi abbinati coll'ammoniaca si effettuò col gas più che fosse possibile seccato, e per ottenere ciò si costrinse a percorrere un lungo tragitto sulla potassa fusa e secca. Fu perciò costruito un depuratore affatto simile a quello già descritto per la depurazione dei gas, soltanto che in luogo di varie sostanze depuranti fu introdotta della potassa fusa in pezzetti che venne scaldata a lungo fra 120°-150° nello stesso apparato, mentre veniva praticato il vuoto colla pompa a mercurio, alla quale era saldato autogenicamente, mediante un tubo sul quale erano saldati i tubi spettrali essi pure scaldati mentre si praticava il vuoto, come si fece anche in altre occasioni. Allorquando il tutto si ritenne ben secco venne fatta la congiunzione, mediante saldatura autogenica, coll'apparecchio contenente il cloruro d'argento ammoniacale, di cui uno dei tubi laterali fu chiuso alla lampada, e si fece agire la pompa. Benchè non vi fosse nessuna congiunzione all'infuori di quelle praticate autogenicamente non si riescì ad ottenere una pressione inferiore a circa 37 mm. (1). Fu scaldato allora il tubo con cloruro d'argento per porzioni in modo di far svolgere lentamente dell'ammoniaca, che poi veniva estratta colla pompa; ciò allo scopo di eliminare le traccie ultime di aria dall'apparato.

Per poter raggiungere delle pressioni determinate nelle due paia di tubi abbinati fissati alla pompa, fu staccato l'apparecchio col cloruro d'argento facendo uso della lampada in modo da ottenere la chiusura ermetica del depuratore a potassa, poi si fece agire la pompa fin che la pressione fu ridotta a 10 mm. ed allora si staccò un primo tubo spettrale; il secondo fu staccato quando la pressione discese a 4 mm.

Fatta passare la scintilla nel tubo a poli di palladio sotto la pressione di 4 mm. si manifestò brillante lo spettro dell'ammoniaca, solcato dalle righe dell'idrogeno assai vive. Il passaggio continuato della scintilla non provocò nessun cambiamento dell'aspetto dello spettro durante circa 18 ore, al cui termine cessò ogni conduttività.

L'identico spettro si manifestò anche fra i poli di alluminio. In questa esperienza restò dimostrata la rapidità di assorbimento dei poli di palladio, intorno ai quali si depositò, sulle pareti, un denso specchio metallico.

Comparativamente assai più lungo fu il lasso di tempo trascorso per il totale esaurimento del tubo a 10 mm. di pressione perchè richiese circa 9 giorni di passaggio della scintilla. Anche in questo caso non si osservò nessun cambiamento sen-

(1) Crediamo non del tutto superfluo di segnalare quanto segue, intorno alla dissociazione che subisce il cloruro di argento ammoniacale a bassa temperatura col diminuire della pressione, dissociazione già studiata dall'Isambert e dall'Horstmann. Come sopra è detto quando si pratica il vuoto in un apparecchio in cui sia contenuto questo composto, la pressione minima che si raggiunge si aggira intorno a 37 mm. essendo la temperatura poco discosta dai 18°. Se a questo punto si sospende l'azione della pompa la pressione ascende a 56 mm. e resta stazionaria. Nel nostro apparecchio il composto argentico-ammoniacale si trovava disteso in uno strato di 36 cent. di cui una porzione fu scaldata fino ad esaurimento per modo che raggiunse 300 mm. di pressione. Lasciando allora raffreddare il tubo si verificò un rapido assorbimento al principio mentre la pressione diminuiva in proporzione fino a raggiungere 65 mm.

sibile dello spettro, che riuscì più o meno brillante in rapporto alla pressione; per il resto le cose procedettero come pel tubo precedente.

A quanto sembra l'ammoniaca viene assorbita integralmente dal palladio nelle condizioni sopra esposte, perchè non si può attribuire a decomposizione dell'ammoniaca stessa la presenza dell'idrogeno il quale senza dubbio indica la presenza dell'acqua, perchè la potassa è impotente a trattenerla in modo completo ad onta che si sia cercato di usare tutte le precauzioni per raggiungere questo scopo. Del resto è già noto quanta difficoltà presenti il gas ammoniaco per essere liberato dalle ultime traccie di acqua.

Esperienze ulteriori sul gas del Monte Irone in Abano.

Il gas esce sotto forma di grosse bolle insieme coll'acqua minerale ad una temperatura di 78° ed è quindi accompagnato da molto vapore di acqua. La sua quantità è di circa tre mila litri all'ora. Contiene delle quantità variabili di anidride carbonica, di acido solfidrico, di gas idrocarburati (metano quasi in totalità) e dal 72 al 75 p. $^0/_0$ di gas inassorbibili coi metodi eudiometrici, ritenuti quindi per azoto.

Le analisi eudiometriche che qui riferiamo mostrano la variabilità della composizione di questo gas. Un'analisi di G. Bizio [1] eseguita nel 1877 gli diede:

Idrogeno solforato	0,20
Anidride carbonica	15,44
Ossigeno	0,25
Metano	11,89
Azoto	72,22

Altre due analisi eseguite in questo Istituto [2] sul gas raccolto il 31 genn. (I) ed il 1° marzo 1894 (II) diedero

	I	II
Idrogeno solforato	1,13	2,00
Anidride carbonica	10,73	12,20
Ossigeno	0,40	2,80
Metano	12,00	8,30
Azoto	75,74	74,70

Il gas fu raccolto il 25 marzo 1896 in gassometri di vetro costituiti di tubi del diametro di 45 a 50 mm. di una capacità che variava dai 700 ai 1200 cc. e terminati alle due estremità da strozzature che li rendevano atti alla chiusura colla lampada.

Per evitare il trasporto di un grande volume di gas inutile fu fatta una prima depurazione sul luogo stesso della sorgente. A tale uopo si eliminò la maggior parte dell'acqua facendo passare il gas per un serpentino di piombo fissato ad una bottiglia

[1] *Analisi chimica delle acque Euganee*, Venezia, 1877, tip. Antonelli.

[2] Nasini R. e Anderlini F., *Analisi dell'acqua del Monte Irone in Abano.* Padova, 1894, tip. Crescini.

a due colli, destinata a raccogliere l'acqua, congiunta a due bottiglie di lavaggio con acido solforico seguite da un grande cilindro di zinco di un metro di lunghezza e 10 cent. di larghezza, pieno di calce sodata, congiunto a sua volta coi serbatoi di vetro riuniti fra loro per mezzo di tubi di gomma. L'aria venne espulsa, come da tutto il resto del sistema, per spostamento. All'estremità dell'ultimo tubo si collocò una bottiglia con acido solforico per mantenere nell'interno un po' di pressione ed escludere l'aria totalmente, durante la chiusura dei tubi. Il gas fu guidato nell'apparato coprendo le polle gasose con un grande cono di metallo che portava al vertice saldato un tubo di piombo, e venne mantenuto al posto caricandolo con pietre collocate all'esterno. Facilmente si ottenne una pressione sufficiente per vincere quella opposta dai vasi lavatori e da quello terminale, perchè le polle gasose e liquide escono dal fondo roccioso di un bacino naturale al disotto di uno strato d'acqua di circa 80 centimetri. Quando, dopo circa quattro ore di passaggio, si fu sicuri dell'espulsione di tutta l'aria, si chiusero alla lampada tutti i serbatoi incominciando dall'ultimo.

In Laboratorio il gas fu sottoposto ai soliti trattamenti, passaggio cioè sul rame, sull'ossido di rame e sul magnesio nell'apparato che verrà più tardi descritto.

Quando tutto il gas che si volle esperimentare fu introdotto nell'apparato si sostituì all'ultimo serbatoio un gassometro e fu fatto circolare fin che il suo volume lo permetteva, in modo che si giunse alla completa combustione degli idrocarburi ed all'assorbimento della massima parte dell'azoto. A questo punto tutto il gas venne richiamato in uno solo dei gassometri e fatto circolare sul magnesio, contenuto in un tubo alle cui estremità furono congiunti il gassometro sopra accennato, ed un secondo gassometro alla estremità opposta. Ridotto il volume a circa 103 cc. fu mescolato con $\frac{1}{4}$ vol. di ossigeno e sottoposto all'azione della scintilla, la quale non determinò che un lievissimo assorbimento in sul principio, restando invariato il volume per circa sei ore di azione.

Introdotto il gas residuo in un tubo doppio di Geissler l'uno con poli di magnesio, l'altro con poli di alluminio, facendolo attraversare il solito depuratore, ed esaminato allo spettroscopio diede subito lo spettro dell'argo senza traccia dello spettro dell'azoto; però era inquinato di idrogeno, la cui presenza fu già spiegata altrove. Fatta agire la corrente elettrica senza interruzione per molte ore, quando lo spettro incominciò ad illanguidire, segno del non lontano esaurimento, il tubo si ruppe, al solito, in vicinanza di uno dei poli. In tutto il tempo che durò l'esperienza non si scoprì nessuna riga estranea all'argo, dopo scomparso l'idrogeno.

Siccome non era improbabile la presenza dell'elio si cercò di arricchire il residuo di questo ultimo corpo approfittando della notevole solubilità dell'argo nell'acqua e della poca dell'elio. Perciò l'argo rimasto venne agitato ripetute volte con acqua che, in causa della temperatura elevata esterna si dovette raffreddare con ghiaccio, fin che il volume primitivo del gas fu ridotto a circa la metà. Introdotto depurato in tubi abbinati, uno con poli di magnesio e l'altro di alluminio, diede subito lo spettro dell'argo senza traccie di azoto, ma con idrogeno, il quale però scomparve dopo qualche ora. Intercalando una bottiglia di Leida non si manifestò che il solo spettro secondario dell'argo. Trascorse circa trentasei ore del passaggio della corrente senza bottiglia di Leida, intercalatavi questa si vide comparire una riga brillante gialla corrispondente

alla lunghezza d'onda 587,49, vicinissima alle due del sodio espressamente osservate insieme pel confronto. In nessun'altra regione dello spettro fu possibile distinguere altre righe all'infuori di quelle date dall'argo colla bottiglia.

Da talune esperienze eseguite precedentemente si aveva argomento per ritenere che difficilmente si sarebbe riesciti a separare l'argo dall'elio coi poli di magnesio come si può fare dell'argo dall'azoto, perciò il passaggio della scintilla si effettuò col tubo a poli di alluminio, il qual metallo assorbe pure l'argo benchè più lentamente assai del magnesio, nella speranza che avesse meno efficacia assorbente per l'elio.

Dal momento in cui si vide comparire la riga gialla D^3 dell'elio fino all'esaurimento trascorsero presso a poco settantasei ore di azione della corrente elettrica, delle quali circa diciotto ore con la bottiglia di Leida. In tutto questo tempo lo spettro dell'elio non si manifestò che colla bottiglia per la sola D^3 e soltanto per istanti brevissimi si ebbe accenno a qualche riga azzurra, fra quelle dell'argo, che sembrava corrispondessero alle posizioni di quelle dell'elio. Senza bottiglia anche la D^3 non si potè vedere che verso la fine; essa compariva assai debole ed a tratti, ma costantemente insieme collo spettro dell'argo che persistette fino all'esaurimento, per modo che non si rese possibile la separazione dei due corpi nemmeno coi poli di alluminio.

La ricomparsa dell'idrogeno ebbe luogo dopo l'esaurimento, forzando la scintilla a passare mediante la bottiglia ed aumentando la forza della corrente. Anche l'azoto non fece la sua comparsa che per brevissimi secondi, ammettendo dovuto ad esso un accenno a diffusione di luminosità nel rosso e giallo e qualche embrione di scannellatura negli altri campi. La fluorescenza intorno ai poli non presentò le svariate tinte osservate altre volte coi poli di magnesio; essa era biancastra con un po' d'azzurrognolo alla base dei poli.

Da questa esperienza risulta che l'assorbimento dell'argo e dell'elio per mezzo del magnesio e dell'alluminio nei tubi spettrali avviene pressochè simultaneamente e che non si può effettuarne la separazione per questa via.

La deposizione dello specchio metallico sulle pareti dei tubi in vicinanza dei poli avviene tanto per quelli di magnesio, quanto per quelli di alluminio, tuttavia quest'ultimo metallo agisce molto più lentamente del magnesio.

Nel gas di questa emanazione l'argo vi è contenuto presso a poco nella proporzione di uno e mezzo per 100 del gas naturale e di circa il 2 per 100 dell'azoto in esso contenuto.

In quanto all'elio non si potè che semplicemente riconoscerlo.

Gas dei soffioni boraciferi della Toscana [1].

La raccolta dei gas fu fatta ai soffioni boraciferi di Larderello nei giorni 20, 21 e 22 luglio 1896.

[1] La maggior parte delle esperienze relative a questi gas sono state eseguite dal sig. R. Salvadori.

R. Nasini, F. Anderlini.

Per quanto riguarda la storia dei soffioni e la descrizione delle località non è il caso di farne qui parola perchè già abbastanza estesamente ne scrisse il Meneghini nella sua pregevolissima Memoria, *L'acido borico in Italia.*

Basterà accennare come questi soffioni di rado oggi vengano alla luce spontaneamente, poichè si va a cercarli facendo dei fori con la trivella nei diversi punti del suolo. Le profondità alle quali si deve spingere la trivella per raggiungere il vapore variano da sei a settanta metri; il vapore viene condotto all'esterno per mezzo di tubi di ferro nell'identico modo che si pratica per i pozzi tubulari per l'acqua.

Ogni condottura, alla cui estremità superiore si applica una valvola per lasciar passare o no il vapore, porta ai lati alcuni altri tubi sia per condurre il vapore ricco di acido borico nel lagone vicino, sia per condurre altrove il gas, che si libera dal vapor d'acqua, facendolo attraversare un grande refrigerante.

Come ben si comprende non si può più parlare di soffioni coperti come erano ancora in uso nel tempo in cui il Meneghini fece i suoi studî sui soffioni della Toscana. Attualmente esiste a Larderello uno di tali soffioni coperti che si conserva come memoria di un uso che non esiste più.

La disposizione attuale della condottura dei vapori e gas a Larderello non poteva riuscire per noi più comoda e la raccolta del gas più sicura e scevra di pericoli di introdurre aria esterna nei serbatoi destinati al suo trasporto.

Le qui annesse figure possono dare una idea esatta del modo della raccolta. La figura *a* (tavola VI) rappresenta il soffione di vapore raccolto dal tubo di ferro *S* che porta la valvola *V* e fra gli altri il tubo di ferro *B* che trasporta il vapore nel refrigerante (v. fig. *b*, tavola I), dove si condensa l'acqua; il gas si può far uscire regolando il rubinetto *R*, farlo attraversare un apparecchio contenente della miscela di Laming *L* e poi le diverse bottiglie per assorbire l'acido carbonico, infine raccoglierlo nella damigiana *O*.

La raccolta del gas naturale che doveva servire per l'analisi fu fatta entro tubi di vetro della lunghezza di circa 70 cm. e del diametro di 5-6 cm. assottigliati all'estremità; questi si mettono in comunicazione coll'orifizio del tubo di uscita interponendo ancora un refrigerante per condensare il vapor d'acqua: dopo avere lasciato passare il gas per molto tempo in modo che l'aria venisse completamente spostata si chiudevano alla lampada le due estremità incominciando dall'ultimo tubo. Con lo stesso metodo di spostamento d'aria fu raccolta una damigiana della capacità di circa 45 litri. Il tappo a due fori coi tubi relativi che chiudeva l'imboccatura della damigiana era di gomma e saldato al vetro con mastice di cautciù. L'estremità esterna dei due tubi di vetro venne chiusa con pezzi di tubo di gomma a tenuta perfetta.

Allo scopo di avere una maggior scorta di gas inassorbibile dalla potassa per le ricerche sul residuo, a dir vero piccolo, in altre due damigiane si raccolse il gas previamente fatto passare a traverso un apparato con miscela di Laming per trattenere l'acido solfidrico, mentre l'acido carbonico venne, per la massima parte, trattenuto dalla calce in poltiglia liquida contenuta in un grande recipiente; e si riempì anche di latte di calce la damigiana in cui si faceva la raccolta, che si capovolgeva sopra una tinozza contenente pure latte di calce: in questo modo si aveva un assorbimento assai efficace di anidride carbonica: occorse circa una mezza giornata per raccogliere cinquanta litri di gas.

Analisi dei gas [1].

Una analisi preliminare qualitativa ci aveva assicurati della assenza degli idrocarburi non saturi, e dell'ossido di carbonio, non avendo assorbimento alcuno nè con l'acido solforico fumante nè con il cloruro rameoso in soluzione ammoniacale.

L'analisi quantitativa fu fatta secondo i ben noti metodi di Bunsen, seguendo le norme esposte nel suo classico libro *Gasometrische Methoden*, 2ª ediz., 1877.

L'eudiometro diviso in 500 mm. fu calibrato secondo il metodo di Bunsen; fu pure determinato l'errore dovuto al menisco, il quale corrispondeva a 0,6; le letture poi erano fatte mediante un catetometro che dava il 50/esimo di mm.

Quanto al processo analitico può riassumersi brevemente così:

Disseccazione del gas introdotto nell'eudiometro, mediante una pallottola di acido fosforico (ottenuta intingendo e lasciando raffreddare l'estremità di un filo di platino piegato ad occhiello nell'acido metafosforico fuso);

Assorbimento dell'acido solfidrico, per mezzo di una pallottola di biossido di manganese tagliata fuori da una massa compatta cristallina di biossido;

Assorbimento dell'acido carbonico con una pallottola a potassa;

Determinazione dell'idrogeno e metano, mediante mescolanza con ossigeno, e detonazione e successivo assorbimento dell'acqua e dell'acido carbonico;

Determinazione del residuo per differenza.

Quanto alla misura, essa consisteva nella lettura del livello del mercurio entro l'eudiometro e dentro la vaschetta, lettura della pressione ambiente e della temperatura. I volumi sono sempre riferiti al gas secco, alla pressione di 760 mm. e alla temperatura di 0°; cioè sono stati calcolati secondo la formula:

$$V_0^{760} = \frac{(V_t + m)\,(B - b)}{(1 + 0{,}00366.t)\,760}$$

dove V_t = volume letto e corretto rispetto alla calibrazione;
m = correzione dovuta al menisco, in questo caso eguale a 0,6;
B = pressione atmosferica;
b = altezza della colonna del mercurio entro l'eudiometro.

Il gas, della cui analisi qui sotto diamo i risultati, è quello della sorgente così detta del Casotto o soffione n. 175 raccolto il 21 luglio 1895.

In 100 parti di gas secco si trovano:

Acido solfidrico . .	2,07	Metano . . .	1,40
» carbonico . .	92,80	Ossigeno? . .	0,05
Idrogeno	2,60	Residuo . . .	1,08

Per il campione di gas raccolto dal soffione così detto dei Tini si fece l'analisi col metodo di Hempel (Hempel, *Gasanalytische Methoden*. Braunschweig, 1890).

[1] I metodi qui descritti sono quelli che ci hanno servito anche per l'analisi di tutti gli altri gas.

Su 100 parti di gas si trovò:

Acido solfidrico . .	2,0	Idrogeno . . .	2,4
» carbonico . .	92,0	Ossigeno . . .	0,2
Metano	1,9	Residuo . . .	1,5

L' aumento nell' ossigeno e azoto dipende probabilissimamente dalla piccola quantità d' aria che difficilmente si evita di introdurre nella buretta con questo metodo; tanto che si può ammettere, che le due sorgenti di gas hanno una composizione eguale, e che si mantiene relativamente costante, come si può vedere facendo un confronto con le analisi antecedenti del Payen (1), S. Claire Deville (2), Fouché e Gorceix (3).

Per le ricerche sul residuo si adoperò il gas della damigiana dove fu raccolto per spostamento d' aria.

Dopo averlo privato dell' acido solfidrico e carbonico, facendoli assorbire della calce sodata, e dell' idrogeno per mezzo della detonazione nell' apparecchio descritto altrove, il residuo inassorbibile, addizionato di ossigeno, si sottopose alle scariche elettriche in presenza della potassa, nel solito pallone con poli mobili, fino a non aver più assorbimento. Eliminato l' eccesso di ossigeno con l' acido pirogallico, si ebbe un piccolo residuo, circa 4 cc., col quale si riempì un tubo di Geissler doppio, naturalmente dopo averlo fatto passare sul rame rovente, sull' ossido di rame, calce sodata, anidride fosforica.

La pressione alla quale fu introdotto il gas era di circa 3 mm.

Uno dei tubi di Geissler aveva gli elettrodi di alluminio, l' altro di magnesio; tostochè si fece passare la scintilla nel tubo a elettrodi di magnesio, si ebbe ad osservare uno spettro complesso e confuso. Dell' argo si vedevano nettamente le due righe rosse caratteristiche e le violette assai brillanti; ma eranvi assai brillanti quelle dell' idrogeno, quelle del mercurio, ed alcune bande verdi dovute agli idrocarburi. La presenza di questi corpi evidentemente era dovuta ad un' imperfetta depurazione, stante l' esiguo volume di gas disponibile.

Ma dopo breve tempo da che passava la scintilla, cominciarono a ravvivarsi le righe violette dell' argo e indebolirsi sempre più rapidamente le bande verdi, fra le quali si vedevano comparire, prima a tratti, poi persistentemente, delle righe verdi brillanti le quali finirono col delinearsi nettamente nei due gruppi caratteristici dello spettro dell' argo.

Anche quelle del mercurio sparirono rapidamente; ultime a sparire furono quelle dell' idrogeno; intanto altre righe si facevano più visibili nello spettro, fino a che si ebbe lo spettro rosso dell' argo in righe brillanti.

È notevole come l' apparsa dello spettro dell' argo sia stata contemporanea al cambiamento rapido del colore della scintilla, e a un deposito di specchio metallico di magnesio sulle pareti dei tubi, preceduto da una magnifica colorazione verde della scintilla agli elettrodi.

(1) Payen, Ann. Chim. et Phys., serie 3a, vol. XXVIII, 248.

(2) Ch. S. Claire Deville et Leblanc, Comptes Rendus, XLV, 750.

(3) Fouché et Gorceix, Boll. R. Comitato geol., 1872, n. 5-6; oppure, Ann. des Sciences géol., IX, 2, 343.

Si fece passare la scintilla nel tubo di Geissler a elettrodi di alluminio e dopo brevi istanti si ebbe qui pure lo spettro dell' argo, di cui furono rilevate le seguenti righe: fra queste apparve in principio assai dubbia, poi brillante per un istante la riga D_3 dell' elio: tali righe furono viste senza interporre la bottiglia di Leida:

	Scala	Lunghezza d' onda [1].		
Rosso	27,5	765	!	
	31,5	750,5	!	
	35	738	!	
	38	726,5	!	
	42	715	!	(*a*)
	46	705,5	!!!	
	49,5	696	!!!	
	53	684,8	!	
	57,5	675	!	
	60,5	666,5	!	
	63	662,5	!	
	65,5	656,5	Idrogeno !	
	72	640,5	!	
	73,5	637,5	!	
Aranciato	77	629,5	!	
	81,5	621	!	
	84	617	!	
	85	614,5	!	
	87,5	609,5	!	
	90	606	!	
	91	604	!	
	91,5	603	!!	
	93	601	!	(*a*)
	94,5	598	!	(*a*)
	97,5	593	!	
	98	592,5	!	
Giallo	98,8	591	!!	
	100	589	!	
	101	587,5	debole elio	
	102	585,5	!	
	103,5	583,5	!	
	105,5	579,8	!	
	107,5	577	!	
	105	575	!	

	Scala	Lunghezza d' onda		
Giallo	110,5	572,5	!	
	114	568	!	
Verde	116	565	!!	
	119,5	561	!!	
	122	557	!	
	123	556	!!	
	127,5	549,5	!!!	
	131	546	!!!	
	131,8	545	!	(*a b*)
	134	542	!	
	149	525,5	!	
	152	522	!	
	155	518,5	!!	
	157,5	516	!!	(*a b*)
	168-170	506-504	!	banda (*a*)
Bleu	188-190	489-487,5	!	» (*a*)
	213,5	470	!	
	225	463	!	
	230	459	!	(*a b*)
Azzurro	243	451	debole	
	244,5	450,2	!!	
	260	444,5	!	
	275	434,5	!!	
	277,5	433,5	!!!	
	284,5	430	!!	
	291	427	!!	
Violetto	292	426,5	!!!	
	294	426	!!!	
	307	420	!!!	
	307,5	419,5	!!	
	309,5	419	!!	
	311	418,5	!	
	317	416	!	
	350	403,5	debole	*a b*

[1] Il segno (!) indica che la riga è poco brillante, (!!) che è brillante e (!!!) che è brillantissima. I numeri, che indicano la posizione sulla scala, si riferiscono alla scala fotografata di cui si parla nel capitolo: **Apparecchi spettrali e misure relative.**

(*a*) indica che la riga fu vista solo da Kayser.
(*b*) » » » » » » » » Eder e Valenta.
(*ab*) » » » » » » da Kayser ed Eder e Valenta e non da Crookes.
I. M. Eder und E. Valenta, *Spectralanalytische Untersuchung des Argons*, Wien, 1896.

Dopo che passò la scintilla per un giorno nel tubo di Geissler, sempre ad elettrodi di magnesio, apparvero le seguenti righe in più:

	101	587,5 elio ! per poco		Verde	193,5	484,5	!	(*a*)
Verde	127	550,5 !			205	476,2	!	(*a b*)
	136	539 !	(*b*)		207	473,5	!	(*a*)
	180	496,5 !			209	473	!	(*a*)
	188	489 !	(*a*)		258	442,5	!	(*a b*)
	189	488 !	(*a*)					

Continuando a far passare la scintilla non si verificò alcun altro cambiamento. Disgraziatamente però non si potè continuare fino a completo assorbimento essendosi rotto il tubo.

Rimaneva perciò ancora il dubbio della presenza dell' elio, considerando che l' apparsa della riga D_3 fu quasi momentanea. Ma se si tien nota che l' elio insieme all' argo è appena visibile quando vi si trova nella proporzione del 33 $^0/_0$ alla pressione di 2,5 mm., mentre una parte di argo è visibile in 2000 parti di elio [1]; inoltre che, quando l' argo è in grande eccesso, diminuendo la pressione, lo spettro dell' elio può mostrarsi per pochi istanti [2] è naturale supporre, essendo apparsa la sola riga D_3 per un momento, che l' elio vi era contenuto almeno in una percentuale presso a poco del 33 $^0/_0$, tenuto conto anche che la pressione del gas era di circa 3 mm.

Si pensò allora di eliminare per quanto fosse possibile l' argo, approfittando perciò della solubilità dell'argo nell' acqua (circa 3 $^0/_0$) e della piccola solubilità dell'elio (circa 0,07 $^0/_0$) [3]. Si lasciò a tale scopo il piccolo residuo di gas in contatto con l' acqua bollita per circa due giorni e si ebbe infatti un discreto assorbimento; col residuo si riempì un secondo tubo di Geissler doppio.

Facendo passare la scintilla si osservarono ancora qui prima per poco tempo le righe dell' idrogeno e subito dopo si ottenne uno spettro brillante di argo ed elio insieme, come si è constatato col prisma di confronto con lo spettro dell' argo puro.

Le righe in più osservate sono le seguenti:

Scala	Lunghezza d'onda	Intensità			Scala	Lunghezza d'onda	Intensità		
45,5	707	debole	elio		190	487		elio	
60	668	!	"		192	485,5	!	argo	(*a*)
101	587	!!!	" D_3		194	484	!	elio	
138	537	debole	argo	(*a*)	200	479,5	!!	elio-argo	
141	534	"	[4]		212,5	471	!	elio	
142	533	"	[4]		234	456,5	!	"	
143	532	"	[4]		250	447	!	"	
145	529,5	"	argo		263	439,5	!!	argo	(*a*)
162,5	511,5	"	"	(*a b*)	265	438,5	!	elio	
170	504,5	!	elio		267	437,5	!	argo	(*b*)
174	501	!	elio-argo	doppia	270	436	!	"	(*a b*)
178,5	497	!	argo	(*a*)	312	419,5	!	"	
185	492	!!	elio		310	418,5	!	"	

[1] I. N. Collie and William Ramsay, Proceedings of the Royal Society, vol. LIX, pag. 257.

[2] S. Friedländer, Zeitschrift für phys. chem., XIX, 1896, pag. 664.

[3] Lord Rayleigh, Zeitschrift für phys. chem., XVI, 1895.

[4] Queste tre righe non si trovano registrate nè dal Crookes, nè dal Kayser, nè dall' Eder e Valenta: non può escludersi che non sieno dovute ad impurezze: lo zolfo dà una riga a $\mu\mu$ 534,26

Il colore della scintilla era giallo rossastro al primo passare della corrente elettrica, andò poi lentamente colorandosi in rosso; colorazione che durò pochi momenti e diventò rapidamente di colore porpora al comparire dell' argo, e successivamente di color giallo-porpora al comparire dell' elio.

Continuando a far passare la scintilla i due spettri rispettivamente non si modificarono, solo dopo parecchio tempo andarono tutti e due diminuendo di chiarezza fino a rendersi assai poco visibili, mentre si resero visibili ancora, benchè deboli, le righe dell' idrogeno prima della cessazione di conduttività nel tubo.

In 100 parti di gas che rimangono come residuo inassorbibile nell' analisi eudiometrica sono contenute circa 3 parti di argo ed elio, in cui l' elio tenuto calcolo dell' apparsa del suo spettro si troverebbe nella proporzione del 33 $^0/_0$ circa.

L' analisi completa dei soffioni sarebbe perciò rappresentata dai numeri seguenti:

Per la sorgente n. **1** soffione n. 175.

In 100 parti di gas naturale:

Acido solfidrico . . .	2,070	Ossigeno	0,050
" carbonico . . .	92,800	" azoto	1,048
Metano	1,400	Argo.	0,021
Idrogeno	2,600	Elio.	0,010

Per il soffione così detto dei Tini:

In 100 parti di gas naturale:

Acido solfidrico . . .	2,000	Ossigeno	0,200
" carbonico . . .	92,000	" azoto	1,455
Metano.	1,900	Argo	0,029
Idrogeno	2,400	Elio	0,014

e in 100 parti di gas non assorbibile dalla potassa in tutti e due i casi:

Azoto	97,00
Argo	2,01
Elio	0,99.

Gas dei Bagni della Porretta.

La raccolta del gas fu fatta nei giorni 4 e 5 ottobre 1896.

Nello stabilimento di bagni della Porretta esiste sempre il getto di gas combustibile, che venne incanalato, di cui una parte serve per la cucina, parte si fa bruciare in un lampione situato in un angolo della piazzetta che si estende davanti allo

e altra a 532,01, il mercurio ne dà una a 533,43; altre righe vicine si hanno negli spettri in righe dell'azoto e dell'ossigeno. La riga della Corona si trova a 531,68. Quando avremo nuova quantità di gas a nostra disposizione potremo dire qualche cosa di più preciso.

stabilimento. Stando alle analisi del Fouché e del Gorceix ([1]) la parte combustibile di questo gas sarebbe formata di metano senza miscuglio di altri gas carburati, tuttavia la prima cosa che ci colpì fu la luminosità della fiamma, abbastanza intensa da poter leggere senza sforzo anche la scrittura manoscritta in lettere minute, e che ci parve quindi superiore alla luminosità emanata dalla fiamma del metano puro.

Tuttavia le analisi non permisero la constatazione, all' infuori del metano, se esistono, di altri idrocarburi.

Un altro fatto ci colpì e fu l' odore di acido solfidrico assai manifesto, mentre risulta dal lavoro del Fouché e del Gorceix che non solo non è stato determinato l' acido solfidrico, ma nemmeno segnalato. Noi ne abbiamo constatato la presenza, anche sul luogo, dal precipitato nero prodotto in una soluzione di acetato di piombo, e dall' annerimento di una moneta d' argento esposta al getto del gas. Del resto le analisi raccolte nel seguente specchietto ne dimostrano, oltre la presenza, le proporzioni insieme a quelle dei varî altri componenti.

Fu esaminato il gas che emana tra le fessure della roccia situate in una piccola caverna, in parte artificiale, la cui imboccatura si trova in un cortiletto interno dello Stabilimento, ed è quello incanalato di cui sopra è fatto cenno, e quello del Vulcanetto di Sasso Cardo di cui viene pure fatto cenno più avanti. L' analisi del primo (I) fu eseguita secondo il metodo di Bunsen ([2]) e quella del secondo col metodo di Hempel ([3]) l' acido solfidrico e carbonico furono determinati insieme viste le esigue quantità d' essi contenute e che, specialmente pel caso nostro, avevano un' importanza secondaria.

In 100 volumi di gas erano contenuti:

	I	II
Acido solfidrico.	0,48	0,9
» carbonico	1,36	
Metano	88,49	90,0
Residuo totale	9,67	9,1

Il residuo a sua volta era approssimativamente costituito in 100 volumi di

Azoto.	97,0
Argo	3,0

Non fu rinvenuta traccia di ossigeno.

Le nostre analisi pei loro risultati si scostano notevolmente da quelle del Fouché e del Gorceix ([4]), i quali oltre al non far cenno della presenza dell' acido solfidrico, assegnano rispettivamente ai due gas la composizione seguente:

	I	II
Acido carbonico	2,52	1,75
Azoto	1,57	9,55
Gas delle paludi.	95,91	88,70
	100,00	100,00

([1]) *Ann. des Sciences Géolog.*, IX, 2, 343.

([2]) R. Bunsen, *Gasometrische Methoden*, 2. Aufl., Braunschweig, 1877.

([3]) W. Hempel, *Gasanalytische Methoden*, 2. Aufl., Braunschweig, 1890.

([4]) Ann. des Sciences Géol., IX, 2, 343.

Nelle analisi degli autori francesi risultò presente l' ossigeno, che ritenuto da essi come accidentale, venne sottratto per intiero colla proporzione relativa di azoto, perchè considerato come facente parte dell' aria.

La composizione dei gas da essi realmente trovata è la seguente:

	I	II
Acido carbonico	2,48	1,74
Ossigeno	0,37	0,16
Azoto	2,90	10,07
Metano	94,24	88,03

Per i bisogni delle ricerche che si aveva in animo di intraprendere su questi gas si rendeva necessaria la raccolta di un volume di circa 200 litri. L' emanazione che meglio si prestava per la sua abbondanza e disposizione era quella dello stabilimento. Si allestirono all' uopo delle damigiane, di circa 35 litri di capacità ognuna, alle cui bocche vennero adattati dei turaccioli di gomma a due fori con due tubi uno dei quali arrivava fino al fondo. Sul luogo le damigiane si disposero capovolte, perchè si trattava di raccogliere un gas più leggero dell' aria, e congiunte fra loro con pezzi di tubi di gomma. Per essere sicuri che tutta l' aria dei recipienti era spostata si fece passare il gas per circa sei ore dopo che un saggio, preso all' uscita, si mostrò combustibile senza esplosione. La chiusura dei recipienti fu effettuata col sostituire, ai turaccioli coi tubi, dei turaccioli di gomma pieni intonacati di un mastice di gomma. Questo scambio fu effettuato sotto l' acqua per evitare l' entrata dell' aria.

Pure per spostamento furono riempiti alcuni tubi da 700 a 1200 cc. di capacità con terminazioni affilate e chiusi alla lampada. Questi tubi erano destinati per saggi in piccolo e per le analisi.

In simile guisa venne raccolto il gas che esce dalle fenditure della roccia nella località detta Vulcanetto, situata a circa 250 metri sopra lo stabilimento dei Bagni della Porretta, presso la sommità di un colle detto Sasso Cardo. Esistono ancora in questo luogo i ruderi di una fornace da calce molto primitiva che veniva alimentata dal gas che si era tentato di incanalare alla meglio.

Quivi il gas esce da diversi punti, in forma di getti visibili quando si infiammano, alla base di una massa di roccia e fra la massa detritica che copre in parte la prima. Nel punto ove la fiammata si mostrava più voluminosa si preparò il terreno all' ingiro in modo da renderlo piano, lasciando lo sfogo del gas nel centro; si coprì il terreno con una poltiglia liquida di cemento e sopra il piano circolare così formato si adattò un grande imbuto che fu accuratamente cementato al suo bordo colla stessa poltiglia. Il collo dell' imbuto, che terminava in un tubo, fu posto in comunicazione con una damigiana ed alcuni tubi da chiudere e dopo qualche ora di passaggio del gas il tutto fu chiuso nel modo sopra descritto.

La pressione esercitata dal gas era assai debole, tuttavia sufficiente per dare indizio del suo passaggio dal gorgoglio attraverso un piccolissimo strato di acqua.

Si ritenne spostata completamente l' aria dopo circa due ore da che un saggio raccolto all' uscita dei serbatoi si mostrò combustibile senza esplosione. L' analisi qui sopra riportata dimostra che l' aria fu totalmente espulsa.

Facilmente si comprende che la eliminazione della ingente massa di gas combustibile per separarne il residuo inerte, che era lo scopo propostoci, doveva riescire una operazione di non piccola entità. Dei due metodi di combustione quello per esplosione, cioè, e quello coll' ossido di rame, il solo praticabile era quest' ultimo. In pratica la difficoltà di ossidare completamente il gas con questo metodo fu superiore all' aspettativa; esso infatti passò inalterato per circa la metà del suo volume attraverso due tubi pieni di ossido di rame rovente per una lunghezza complessiva di circa 150 centimetri e fu giuocoforza ripetere il passaggio più volte. Per non intralciare la presente relazione, intorno ai risultati ottenuti, si omette qui la descrizione dell' apparato e del modo di procedere, delle quali cose verrà trattato in un articolo speciale, come pure in altro articolo verrà esposto ciò che riguarda la combustione per esplosione che fu pure praticata sopra una certa quantità di questo stesso gas.

Il gas residuo ottenuto secondo questo ultimo metodo fu sottoposto all' azione della scintilla in presenza dell' ossigeno fin che non si avvertì diminuzione del volume gasoso. Dopo la eliminazione dell' eccesso di ossigeno rimasero circa 3,5 cc. di residuo che rappresentano il volume definitivo del gas inassorbibile di 1100 cc. del gas naturale sperimentato, corrispondente a poco più del 3 $^0/_0$ dell' azoto contenutovi giusta le analisi eudiometriche su di esso praticate.

Per l' esame spettroscopico il gas fu introdotto in un tubo doppio con poli di magnesio e di alluminio dopo averlo fatto passare a traverso del depuratore di cui venne più volte fatto cenno. Però il volume esiguo di cui si poteva disporre non permise le ripetute lavature di tutto l' apparato e si dovette limitarsi ad un solo riempimento e successiva vuotatura praticando prima il più perfetto vuoto che ci sia stato possibile di raggiungere. Introdotta la porzione di gas rimasta si ridusse la pressione a 4 mm. a cui venne chiuso e staccato il doppio tubo.

Il passaggio della scintilla mostrò gli spettri dell' argo e dell' azoto insieme, però questo scomparve dopo pochi minuti, il che dimostrò come del secondo corpo fossero contenute soltanto delle tracce.

Il passaggio continuato diede luogo, come il solito, all' assorbimento dell' argo fra i poli di magnesio con deposizione di specchio metallico, ma senza che in questo primo saggio si sia manifestato altro spettro all' infuori di quello dell' argo, anche coll' introduzione della bottiglia di Leida, a nessuna pressione.

Lo spettro presentato dall' argo proveniente da questo gas ci parve che presentasse qualche particolarità.

Combustione del gas dei Bagni della Porretta coll' ossido di rame.

Per procedere alla combustione degli idrocarburi gasosi del gas di Porretta nella quantità rilevante di circa 150 litri si trovò necessario di ricorrere all' ossidazione con ossido di rame che ci sembrò il metodo solo praticabile.

Come altrove fu detto la descrizione dell' apparato che servì all' esperienza viene rimandata ad altro articolo, tanto più che, come è facile comprendere, l' apparato doveva assumere ragguardevoli dimensioni ed un certo grado di complicazione, per cui la sua descrizione non poteva riescire cosa breve.

Di tutte le esperienze finora eseguite questa riescì la più dispendiosa per il forte consumo di gas illuminante per l'arroventamento dell'ossido di rame, quella che durò più a lungo e la più penosa per la continua sorveglianza che richiese, le frequenti manovre pel cambio di recipienti, travasi di gas mediante la pompa ecc. in modo che durò non meno di un mese e mezzo di lavoro ininterrotto soltanto la combustione.

Antecedentemente fu tenuto parola della difficoltà di ossidare il gas in esperienza, costituito, giusta l'analisi eudiometrica, di quasi il 90 % di metano, il quale si mostrò molto resistente all'ossidazione a temperatura elevata coll'ossido di rame, in modo da passare in parte inalterato attraverso lunghi strati di ossido. Si è constatato che la presenza del vapore di acqua non ha la minima influenza sull'andamento dell'ossidazione, ma una grandissima e prevalente la velocità di passaggio del gas, che fino ad un certo punto si può dire sta in ragione inversa della quantità di metano che si ossida. Da ciò la necessità di limitare ad un minimum la velocità di passaggio per ottenere un massimo di ossidazione. Si comprende che dovendo prolungare il contatto del gas coll'ossido di rame le cose dovessero procedere con una grande lentezza e quindi fosse necessario un grande consumo di combustibile gassoso per mantenere una temperatura sufficientemente alta.

Un'altra grave perdita di tempo fu causata dalla lentezza di raggiungere il massimo vuoto in uno spazio spesso di oltre 40 litri ad onta dell'aiuto di una pompa ad acqua, colla quale non si riescì mai ad oltrepassare i 10 mm. di pressione. Furono ogni volta necessarî dei giorni intieri di azione di una buona pompa a mercurio prima di scendere sotto il millimetro di pressione nell'interno di tutto il sistema.

Descrizione degli apparecchi impiegati [1].

Apparati per la preparazione dell'argo.

(Tav. I, fig. 1).

Per isolare l'argo dall'aria due metodi furono sperimentati dai suoi scopritori, il prof. Ramsay e Lord Rayleigh, consistenti l'uno nel trasformare l'azoto in composti ossigenati mescolando al gas una quantità sufficiente di ossigeno e facendo attraversare il miscuglio da scintille elettriche; l'altro metodo, che permette la preparazione in grande, è fondato sulla proprietà che ha il magnesio di assorbire a temperatura alta l'azoto per formare un composto molto stabile, in quelle condizioni, e solido.

L'apparato che descrivono gli autori e di cui danno anche la figura per l'assorbimento col magnesio non è certo molto semplice, ma ciò che ne deve rendere difficile il maneggio è la rigidità essendo tutte le sue parti di vetro congiunte a saldatura autogenica.

La disposizione data all'apparato dagli autori è del resto giustificata dalla loro preoccupazione di mettersi al coperto di eventuali cause d'errore, trattandosi di dimostrare l'esistenza di un nuovo corpo e del quale non erano ancor note le proprietà.

[1] Gli apparecchi sono stati tutti costruiti, e quelli nuovi anche immaginati, dal sig. F. Anderlini.

R. Nasini, R. Salvadori.

Affinchè divenisse accessibile anche in questo Istituto la preparazione dell' argo in grande mediante il magnesio si è creduto opportuno di portare alcune modificazioni nel dispositivo dell' apparato sia per renderlo più maneggiabile, pur evitando perdite, sia per renderlo, fino ad un certo punto, continuo nel suo funzionamento, in modo analogo a quello degli autori inglesi.

Quello che fu adottato si può distinguere in due parti principali, una destinata a mettere in movimento il gas, l' altra alla depurazione ed all' assorbimento del nitrogeno per mezzo del magnesio.

Apparato aspirante e premente.

L' organo principale della prima parte dell' apparato è a doppia funzione, cioè aspirante e premente; consiste in due gassometri di dieci litri di capacità disposti in modo che il gas possa passare dall' uno all' altro circolando nella parte dell' apparato destinata all' assorbimento. I due gassometri A e B, tav. I, fig. 1, sono egualmente costruiti; consistono in due cilindri di lamina di rame ciascuno, terminati in due coni, e sono tenuti sospesi mediante due corde entro quattro piedritti, lungo i quali corrono delle guide, per tenerli in posto. All' esterno i due gassometri portano i tubi-livello *i*, *i* graduati onde poter rilevare la misura del volume del gas. Le due corde si avvolgono intorno ad un rocchetto, in senso inverso, di guisa che quando uno dei gasometri si innalza l' altro si abbassa. Il rocchetto è munito di un manubrio e vi è annessa una ruota dentata che permette di mantenere sospesi a qualunque altezza i due gassometri facendo funzionare un nottolino.

I vertici dei coni opposti di ciascun gassometro terminano superiormente in due tubulature *a*, *a* per l' inserzione di tubi di gomma. Vicino alle tubulature superiori si sono saldati due robinetti *b*, *b'*, posti in comunicazione con due tubi di gomma, con un tubo a tre vie *d*, mentre le tubulature *a* ed *a* comunicano nello stesso modo con altro tubo a tre vie *c* che porta due rubinetti nel braccio orizzontale. Il modo di funzionare del congegno è fondato sulla pressione che esercita una colonna di acqua scendente, di cui è pieno uno dei gassometri, sul gas di cui è pieno l' altro, e sull' aspirazione del gas sul primo per il vuoto che tende a formarsi quando l' acqua sfugge. Cosicchè se per esempio si alza il gassometro A l' acqua discende per il tubo *k* e si fa un certo vuoto mentre quest' acqua stessa esercita una pressione in B, essendo posti in comunicazione i due recipienti per le tubulature *e*, *e'*. Il gas viene spinto nel tubo a robinetto *c* e tenendo aperto il robinetto *l'*, mentre sta chiuso l' altro, *l*, segue la via tracciata dalle freccie, passa, cioè attraverso l' apparato di assorbimento per entrare nel gassometro A, seguendo anche qui la via indicata dalle freccie codate, passando necessariamente pel robinetto *b*, giacchè si tiene chiuso il robinetto *b'* dell' altro gasometro.

La bottiglia a due tubulature G, di circa dieci litri di capacità, è destinata a rifornire di acqua i due gassometri quando, per causa dell' assorbimento, il volume del gas diminuisce, perciò il tubo di gomma K, che congiunge inferiormente i due gassometri è interrotto per l' inserzione del ramo orizzontale del tubo a T, mentre il ramo verticale più lungo va a pescare nell' acqua di cui è completamente piena la bottiglia

ed è tenuto fermo da un turacciolo. Oltre che il rifornimento dell' acqua ai gasometri, è necessario mantenere un certo equilibrio di pressione fra l' interno e l' esterno dell' apparato, e a tale scopo è destinato il tubo *h* che è fissato esso pure, mediante un turacciolo, all' altra tubulatura e va a pescare fino al fondo della bottiglia. Questo stesso tubo serve anche ad introdurre dell' acqua quando questa discende sotto un certo livello nella bottiglia.

Siccome nel maneggio di saliscendi dei gasometri qualche goccia di acqua può entrare inavvertentemente nei tubi di gomma che danno accesso al gas e venire spinta nella parte destinata all' assorbimento, quest' acqua viene trattenuta dai due recipienti *m* ed *m'*, che precedono, come si vede, il robinetto doppio *c* e il tubo a tre vie *d*.

Certamente questo apparato non è troppo semplice, tuttavia il maneggio è facile, perchè basta invertire il livello dei gassometri e la chiusura ed apertura dei robinetti per ottenere l' identico effetto. Infatti il gas entra ed esce dai gassometri seguendo sempre la medesima direzione; ciò che, come si vedrà in seguito, non è privo di qualche importanza.

Invero si era pensato in sulle prime di far uso dell' aspiratore doppio di Regnault, modificandolo opportunamente, ma si è dovuto rinunziarvi sopratutto per la difficolià del rifornimento dell' acqua e per conseguenza del mantenimento dell' equilibrio della pressione in tutto il sistema. Tuttavia si sta studiando una disposizione per rendere più semplice e meno ingombrante un apparato aspirante e premente di cui verrà data in seguito la descrizione, non appena sarà stato sottoposto alla prova. È evidente poi il vantaggio che presenta l' apparato sopra descritto di poter far circolare il gas indefinitamente sempre a contatto della stessa acqua, senza che questa si trovi esposta all' aria libera, come avviene adoperando i gassometri comuni.

Nella preparazione dell' argo la velocità di efflusso del gas che lo contiene è necessario che sia regolata in modo da raggiungere certi limiti.

Nelle nostre esperienze noi non abbiamo potuto mai raggiungere la velocità assegnata dagli scopritori; quella più conveniente ci parve di dieci litri per ogni tre ore. Col nostro apparato si ottiene poi la regolarità di efflusso del gas semplicemente regolandola per mezzo dei robinetti fin dal principio e poi aumentando gradatamente il dislivello dei gassometri mediante qualche giro della manovella che muove il rocchetto delle corde; manovra che è richiesta ogni mezz' ora circa.

Si dovette rendere la figura schematica perchè una prospettica non sarebbe riescita sufficientemente chiara per la descrizione del modo di funzionare dell' apparato.

Per la stessa ragione non è stato disegnato il sostegno dei due gasometri, e questi furono rappresentati molto distanti l' uno dall' altro mentre stanno contigui e divisi solo da due piedritti tra cui trovasi fissato il rocchetto, sul quale si avvolgono le corde che tengono sospesi i due gassometri.

La parte dell' apparato che serve all' assorbimento dell' azoto non ha bisogno di lunghe descrizioni, perchè basta l' ispezione della figura per rendersene ragione. La disposizione è quella stessa posta in pratica da Lord Rayleigh e dal prof. Ramsay, salvo qualche accessorio. Il tubo C, di vetro poco fusibile, contiene il magnesio in nastri, il D è per metà pieno di ossido di rame e per l' altra metà di rame metallico sotto forma

di fitta rete ravvolta su se stessa, prima ossidata, poi ridotta coll'idrogeno. Precede il tubo con rame ed ossido una bottiglia di lavaggio g', contenente dell'acido solforico, ed ha un doppio uffizio di servire cioè di disseccatore, ma principalmente d'indicatore della velocità di passaggio del gas, proveniente dal gassometro premente. Tra il tubo con rame e quello con magnesio intercedono due apparati di assorbimento n ed n' contenenti il primo cloruro di calcio, il secondo calce sodata per trattenere l'acqua e l'acido carbonico che si può formare per la combustione d'idrogeno o gas carburati che eventualmente fossero contenuti nel gas che si esamina, prima che questi entri nel tubo C, contenente dei nastri di magnesio, che mette capo al gasometro aspirante. L'apparatino g è un indicatore contenente un po' di acido solforico.

Prima di introdurre l'azoto contenente l'argo si praticava il vuoto mediante una pompa a mercurio per assicurarsi della tenuta del sistema, ma sopratutto per eliminare l'idrogeno incluso non solo nel magnesio [1], ma anche nel rame ridotto; e perciò si portavano tutti e due i metalli al rosso nascente continuando l'aspirazione colla pompa.

Solo dopo cessato lo sviluppo dell'idrogeno si faceva entrare il gas dei gassometri portando i due tubi a temperatura alta. Il magnesio non si combina coll'azoto che a temperatura molto elevata, e fu quindi necessario far uso di tubi assai resistenti, ma, per quanto sieno di buona qualità, non solo non poterono servire una seconda volta, ma non ci siamo imbattuti che assai di rado in qualche pezzo che abbia resistito, senza fendersi, ad un nuovo riscaldamento una volta raffreddato.

Il Ramsay non fa cenno del come abbia proceduto per evitare questo inconveniente; certo è che per far assorbire circa nove litri di azoto non siamo riesciti a poterlo fare mai in meno di sessanta ore. Senza dubbio la rapidità dell'assorbimento dell'azoto per parte del magnesio è subordinata alla temperatura e quindi la qualità dei tubi ha la massima importanza; perciò per evitare la deformazione o, peggio ancora, che vengano perforati per l'attacco del magnesio, fa d'uopo limitare la temperatura a scapito della brevità dell'operazione. L'azione del magnesio sul vetro è talvolta assai profonda ed accade spesso che nei punti più caldi il vetro si gonfia formando delle bolle più o meno estese che finiscono col perforarsi. In quelle porzioni si trovano delle masse bollose, nerastre, dure, ma fragilissime. Benchè si sieno provati tubi di diverse provenienze nessuna qualità offrì una resistenza sufficiente. Per evitare quindi l'attacco dei tubi si dovette moderare la temperatura e per evitare il pericolo di rottura fummo costretti a continuare senza interruzione ogni operazione una volta iniziata, perchè il mutamento di un tubo a magnesio che abbia funzionato per qualche tempo porta con sè la conseguenza della perdita del tubo ed anche di buona parte del magnesio, rimasto inattaccato. Quasi sempre si fece uso di tubi a pareti dello spessore di circa mm. 1,6 caricati della quantità di magnesio un po' più grande di quella necessaria per assorbire dieci litri di azoto [2].

[1] Il magnesio sia in nastri che in fili contiene delle quantità notevoli d'idrogeno e secondo alcuni anche ossido di carbonio ed anidride carbonica. Così pure il rame contiene idrogeno quando si prepara per riduzione dell'ossido lasciandolo raffreddare nell'idrogeno stesso.

[2] Nelle preparazioni ripetute più volte abbiamo verificato l'osservazione di Lord Rayleigh e del Ramsay che in realtà una data quantità di magnesio assorbe meno azoto di quanto il calcolo lascia prevedere, ma senza poter stabilire una regola certa.

Quando il volume gassoso era ridotto ad un litro circa la circolazione diventava difficile nell'apparato ora descritto. Allora il gas residuo si travasava in un gassometro di vetro a mercurio, seccandolo sull'anidride fosforica. Per eliminare il resto dell'az to si possono seguire due metodi, il primo di continuare secondo quello ora indicato col magnesio, l'altro per mezzo dell'ossigeno e la scintilla elettrica. Il primo è molto più rapido e meno costoso del secondo se non si dispone di una forte corrente elettrica, la quale, per Laboratorî che non possono servirsi che di pile, è eccessivamente costosa.

È per questo che il primo era preferibile per noi dal lato della rapidità e dell'economia.

Per procedere secondo il primo metodo si fece uso di un apparato costituito di un tubo poco fusibile che si carica di magnesio, e si tira alle estremità nello stesso modo descritto per il precedente, e si congiunge con una estremità direttamente col gasometro a mercurio contenente il gas. La estremità opposta del tubo stesso si congiunge col gassometro speciale B, tav. II, fig. 3, di cui verrà fatta parola a parte. Prima d'introdurre il gas nel tubo a magnesio si scalda questo, per privarlo dei gas che contiene occlusi, praticando il vuoto. Quando cessa ogni sviluppo gassoso si riempie col gas contenuto nel gassometro di vetro A della fig. 3, tav. II, che deve essere già congiunto col tubo a magnesio fin da principio: si porta il magnesio al rosso e si fa circolare il gas aprendo il robinetto del gassometro B e *a* fig. 3, mentre si abbassa il serbatoio *f* per dar passaggio al gas che va a raccogliersi in gassometro a mercuric eguale od un po' più piccolo di quello raffigurato in A, fig. 3, che si sostituisce al serbatoio rappresentato nella fig. 3, tav. II.

In causa dell'assorbimento dell'azoto, il volume del gas può ridursi al punto da non potersi più far circolare: in tal caso si ricorre al pallone coi poli per terminare l'eliminazione dell'azoto. È difficile che con un solo tubo a magnesio si possa eliminare tutto l'azoto per le ragioni già esposte (in nota) antecedentemente, per cui il magnesio deve essere cambiato uno o due volte (1); ed è allora specialmente che riesce utile il gassometro B nell'evitare perdite, perchè si può vuotare completamente tutta la porzione d'apparato dal robinetto *b'* al gassometro A e trasportare tutto il gas nel serbatoio *g*, e da questo, volendo, nel gassometro C. Allora si può facilmente cambiare il tubo a magnesio, e si può scaldare nel vuoto, come al solito, per espellere il gas, che si svolge, colla pompa. Per evitare che tale gas vada a raccogliersi nella campanella *h*, la porzione inferiore ripiegata del tubo di caduta della pompa, essendo staccata e congiunta con un pezzo di tubo di gomma, si può facilmente spostare e farla sboccare all'esterno della campanella *h*.

(1) È probabile che la temperatura a cui si porta il magnesio sul principio eserciti la più grande influenza sull'andamento del fenomeno di assorbimento, perchè non tutti i tubi, quando si spezzano, presentano lo stesso aspetto nell'interno; essi contengono dei cristalli di magnesio che tappezzano le pareti, e si è osservato che tanto più compatti ed estesi sono gli strati cristallini e tanto minore fu l'assorbimento.

Gassometro di trasporto.

(Tav. II.)

Questo apparato è destinato a servire pel travaso di grandi volumi di gas da un recipiente ad un altro, senza dover ricorrere a spostamenti per mezzo di liquidi, facendo uso della pompa a mercurio.

Nella tav. II, fig. 3, è rappresentato un disegno schematico onde poter dare un' idea più chiara del suo funzionamento. Esso è costituito di un serbatoio *g* sormontato da un rubinetto a tre vie, il quale lateralmente porta due rubinetti *b* e *b'*. Inferiormente vi ha il rubinetto *d* a lume largo, al di sotto del quale termina l' apparato la campanella *h* che si fa pescare in una vaschetta a mercurio *k*. Finalmente alla tubulatura *e* viene congiunto, per mezzo di un tubo di gomma, il serbatoio a mercurio *l*.

Tutto questo apparato viene fissato sopra apposito sostegno, come risulta anche nella figura, e si colloca sul davanti di una pompa a mercurio in modo che la bocca della campanella venga a trovarsi sopra lo sbocco dell' asta discendente della pompa. L' asta alla sua estremità inferiore non è, come al solito, piegata due volte ad angolo, ma termina diritta e vi si applica invece un pezzo di tubo piegato due volte ad angolo e fissato per mezzo d' un pezzo di tubo di gomma all' asta della pompa in modo che questa parte può con facilità venire spostata lateralmente.

Nella figura vi è pure disegnata la parte superiore di una pompa a mercurio E per mostrare in qual modo si possa stabilire la congiunzione di questa coll' apparato ora descritto, che, come si vede in questo caso, viene effettuata saldando autogenicamente il tubo a T *i* al braccio che si protende orizzontalmente dal manometro, che a sua volta si congiunge alla pompa con un sistema di cui in altro articolo viene data la descrizione.

La costruzione dei robinetti presenta qualche particolarità che merita di essere rilevata, non tanto perchè sieno delle vere novità quanto per raccomandarli in vista della sicurezza che offrono nel tenere il vuoto. La fig. 4, tav. II, rappresenta ingrandito a circa due terzi della grandezza naturale il robinetto a tre vie dell' apparato sopra descritto, come pure ingrandita nella stessa proporzione è l' immagine del robinetto del gassometro A. In tutti e due i bordi della capsula sono rialzati in modo che quando il maschio è a posto rimane una vaschetta in cui si versa del mercurio. La fig. 5 rappresenta ingrandito il rubinetto a due vie: è chiuso inferiormente, ed il tragitto del maschio è diagonale. Tale disposizione permette di raggiungere il vuoto più completo possibile colla pompa e mantenerlo pressochè indefinitamente purchè, ben inteso, la costruzione sia accurata e si abbia avuto cura di spalmare con un buon lubrificante il maschio (1).

(1) Si ottiene un eccellente lubrificante per rubinetti, anche metallici, facendo sciogliere a caldo una parte di gomma elastica naturale in una di vaselina, oppure di olio minerale pesante. Aumentando la proporzione della gomma fino ad $1\frac{1}{2}$ parte diventa più vischioso e si presta meglio per rubinetti di vetro che devono essere inseriti in apparati a vuoto.

Nel caso che il robinetto non tenga bene, per mancanza di lubrificante, il mercurio viene spinto nei meati, mette sull' avvertenza del difetto e si può facilmente rimediarvi; purchè naturalmente la costruzione non sia troppo difettosa. Simili rubinetti vengono applicati anche ai gassometri a mercurio come quello disegnato nella fig. 3, tav. II, A.

La stessa fig. 3 è stata disegnata in modo da poter dare un' idea della maniera di procedere per estrarre un gas da un recipiente qualsiasi, per travasarlo in un altro ed eventualmente farlo anche passare sopra una sostanza atta ad assorbire qualcuno dei suoi componenti. Nella figura è disegnato un tubo che può essere riempito di ossido di rame oppure di magnesio: in tali casi va anche collocato su di un fornello. Quando vi ha produzione di acqua e di anidride carbonica, tra il tubo da combustione ed il gasometro raccoglitore vanno inseriti degli apparecchi di assorbimento. Se si tratta di fare assorbire acido carbonico o solfidrico, o tutti e due assieme, si può disporre in modo analogo un tubo contenente della calce sodata.

Le congiunzioni che non conviene o non si possono fare autogenicamente si fanno con pezzi di tubo di gomma da pompa, spalmando prima le estremità dei tubi di vetro da riunire con mastice di gomma elastica e paraffina, e mentre è ancora ben caldo si infila il tubo di gomma e si fa in modo che le estremità dei tubi di vetro vengano a contatto. Operando con qualche destrezza si ottengono congiunzioni che possono mantenere il vuoto indefinitamente, usando certe cautele che verranno descritte in seguito.

Per mettere in azione l' apparato si incomincia dall' aprire tutti i rubinetti in modo da mettere tutte le parti in comunicazione colla pompa; si abbassa il serbatoio del mercurio *l* più che sia possibile e si fa agire la pompa, avendo cura di spostare l' estremità dell' asta *c* della pompa in modo che sbocchi fuori della campanella *h*. Di mano in mano che l' aria viene espulsa il mercurio sale tanto lungo il tubo di gomma che congiunge il serbatoio *l* col gassometro *g* quanto nella campanella. Quando il mercurio oltrepassa il rubinetto *d* si chiude con una pinzetta il tubo di gomma vicino alla tubulatura *e* per cui allora il mercurio viene aspirato soltanto dalla vaschetta K. Anche il riempimento del gassometro A si effettua nello stesso tempo e nello stesso modo, cioè aspirando il mercurio tenendo abbassato il rispettivo serbatoio *f*. Seguendo questo metodo si ha il grande vantaggio di eliminare dai varî recipienti tutta l' aria che inevitabilmente, sia pure in piccola quantità, rimane aderente alle pareti e viene imprigionata dal mercurio quando questo viene spinto nell' interno, specialmente se il mercurio non è molto puro e le pareti non perfettamente pulite.

Nel serbatoio *g* del gassometro B si fa ascendere il mercurio fino al rubinetto *a*, il quale naturalmente deve avere l' apertura inferiore in comunicazione colla pompa; e siccome l' altezza della colonna di mercurio, partendo dal livello della vaschetta, non è sufficiente a raggiungere il rubinetto *a*, si chiude *d*, si apre la pinzetta che tiene chiuso il tubo di gomma *o* e si alza con cautela il serbatoio *l* finchè il mercurio raggiunge il rubinetto superiore *a*: allora si chiude la pinzetta e si mette in posizione il rubinetto *a* per stabilire la comunicazione fra la pompa ed il serbatoio C per estrarre l' aria che ancora vi rimane. Quando tutta l' aria è stata espulsa, si chiude

il rubinetto *a* da quella parte e si rompe la punta del serbatoio C che si trova chiusa nel tubo di gomma di congiunzione. Aprendo il robinetto con qualche lentezza il gas va ad occupare gli spazî vuoti senza violenza. Il gas passa poi nel gassometro A abbassando il serbatoio del mercurio *f* ad un livello opportuno ed aprendo il rubinetto rispettivo.

Per estrarre tutto il gas dal serbatoio C e farlo passare nel gassometro A si fa entrare sotto la campanella *h* la estremità mobile *c* dell' asta della pompa e si mette questa in azione. Il gas viene richiamato sotto la campanella *h*, si apre il rubinetto *d*, ed allora discende il mercurio dal serbatoio *g* e, ad occupare lo spazio libero, va il gas che si fa strada attraverso il rubinetto: dopo ciò si stabilisce la comunicazione fra il serbatoio *g* ed il gassometro A facendo girare il rubinetto *a* in modo da disporre opportunamente le aperture.

Se si tratta di far muovere una quantità limitata di gas l' operazione non richiede un tempo soverchio facendo uso della pompa soltanto; se invece il volume di gas da travasare è di qualche litro conviene eseguire l' aspirazione per mezzo del gassometro B finchè raggiunge una certa pressione a cui cessa di essere utile l' aspirazione fatta in tal modo mentre rende più vantaggiosa la pompa colla quale si può effettuare l' estrazione ed il travaso sino alla fine.

Il modo di procedere per effettuare il travaso per mezzo del gassometro di trasporto B è troppo semplice perchè meriti una particolareggiata descrizione, e perciò si omette; non c' è altra avvertenza da curare se non quella di chiudere il rubinetto *d* per impedire che il mercurio discenda dal serbatoio *l* nella vaschetta.

Del resto in molti casi il gassometro di trasporto B può essere utilmente impiegato anche senza la pompa, purchè si espella l' aria anche dai tubi che congiungono i rubinetti, e si facciano le congiunzioni coi tubi di gomma riempiti prima con del mercurio.

Come si vedrà in altri articoli il gassometro B può venire modificato in più maniere, in particolare quando sia destinato a rimanere in permanenza fissato ad una pompa. Così i due rubinetti laterali possono essere soppressi e restare il solo centrale a tre vie con due semplici braccia, come nella fig. 10, tav. V, oppure sopprimere il centrale e lasciare i due laterali come si vede nella fig. 8, tav. IV.

Riesce poi facile far circolare il gas entro l' apparecchio senza smuovere nessuna delle sue parti, facendogli fare il cammino inverso; ed anche si può far passare per intiero da una parte all' altra introducendo qualche modificazione nel dispositivo, come del resto viene mostrato da altri apparecchi descritti in altri capitoli.

Per le ricerche sui gas naturali il riconoscimento dell' argo e dell' elio è ora divenuto indispensabile, e la loro determinazione quantitativa probabilmente assumerà molta importanza. È evidente che se questi due corpi sono contenuti in piccole quantità in un gas naturale, si rende necessario di maneggiare un grande volume, specialmente quando sul luogo stesso della raccolta non si possa effettuare una prima eliminazione, come p. es., è il caso per gli idrocarburi.

Questo apparato potrà servire, opportunamente modificato, a delle determinazioni quantitative che senza dubbio riesciranno più esatte non solo, ma permetterà anche la determinazione di quei componenti che entrano in un miscuglio in piccole proporzioni. Su questo argomento farà d' uopo ritornare dopo studio più maturo.

È tolta inoltre anche la causa di errore che può portare l'uso dell'acqua, il cui potere solvente sull'argo è ragguardevole, per modo che, se è contenuto in piccole quantità, potrebbe sfuggire ad ogni apprezzamento.

Una obiezione può essere fatta sull'allestimento degli apparati finora descritti riguardo all'uso delle congiunzioni con tubi di gomma. Tale obiezione però cade davanti alle risultanze delle esperienze abbastanza numerose, nel corso delle quali si poterono conseguire dei vuoti persistenti a lungo anche quando si usarono numerose congiunzioni con tubi di gomma, purchè non venissero trascurate le necessarie cautele. La prima condizione è quella, bene inteso, di far uso di tubo di gomma di buona qualità e bene preparato; inoltre di masticare bene il foro del tubo facendo penetrare il mastice di gomma per un tratto sufficiente con un ferro caldo ed applicarlo, ancora caldo, alle estremità dei due pezzi di vetro, possibilmente conformate a ghianda, facendoli scivolare fin che si toccano. Il tubo di gomma che meglio si presta è quello che si adopera per le pompe; quello da noi impiegato aveva il diametro esterno di 15 mm. mentre quello interno non superava i 2 mm.

Un così grande spessore di pareti rende più elastico il tubo e si può applicarlo senza grande sforzo a tubi di vetro di un diametro tre o quattro volte maggiore di quello interno del tubo di gomma specialmente se termina in forma di ghianda.

Niente impedisce di ricorrere alle saldature autogeniche; e questo sistema può convenire per apparati destinati alla immobilizzazione per un uso determinato, ma se un dato organo di un apparato deve servire a più usi si possono, senza inconvenienti, adoperare le congiunzioni con gomma per renderlo smontabile.

In altro luogo vengono date delle indicazioni intorno ai metodi di congiunzioni affatto impermeabili ed ai lubrificanti per rubinetti che furono usati coll'esito migliore nell'allestimento degli apparati che servirono per le nostre esperienze.

Non crediamo inutili alcune osservazioni intorno al gassometro di trasporto il cui uso riescì molto utile in varî modi nel maneggiare rilevanti volumi di gas nelle numerose esperienze condotte a termine ed in corso di esecuzione.

In quanto alle dimensioni possono variare naturalmente; tuttavia quelli da noi impiegati non differiscono molto l'uno dall'altro per questo rispetto. L'altezza totale è di circa m. 1,10 di cui 30 cm. sono per la campanella inferiore, il resto pel serbatoio sopra il rubinetto inferiore. Il diametro interno non oltrepassa i 20 mm., per non dover caricare con un peso eccessivo tutto l'apparato quando si riempie di mercurio. Il diametro del foro del maschio del rubinetto inferiore deve essere di almeno 4 mm. affinchè ci sia spazio sufficiente per lo scambio fra il gas che deve ascendere dalla campanella ed il mercurio che discende dal serbatoio superiore. Le aperture è assai utile che sieno disposte diagonalmente e la capsula (femmina) sia chiusa dalla parte opposta a quella in cui entra il maschio.

Metodo di depurazione dei gas e sistema di congiunzione di alcune parti di apparati a vuoto.

Sono note, a tutti quelli che si occupano del riempimento dei tubi per lo studio dello spettro dei gas, le non piccole difficoltà che si incontrano per eliminare completamente alcune sostanze che costituiscono in molti casi delle impurità la cui pre-

senza può indurre ad errori. Tra le impurità si possono annoverare l'aria, l'idrogeno o meglio il vapor d'acqua, l'ossido ed il biossido di carbonio e gas idrocarburati.

La disposizione data all'apparato che servì a riempire molti tubi di Geissler e Plücker è rappresentata dalla fig. 6, tav. III, la quale può dare inoltre un'idea del modo di funzionare dell'apparato stesso nell'atto di introdurre l'argo nol tubo spettrale come verrà in seguito esposto. In tale figura il pallone A viene rappresentato nell'attitudine in cui trovasi quando l'argo rimane come residuo dopo l'eliminazione dell'azoto coll'ossigeno e la scintilla, e l'eccesso di ossigeno sia stato assorbito dal pirogallato potassico.

Il pallone A non differisce quasi da quello usato da Lord Rayleigh e dal prof. Ramsay che trovasi descritto nella citata loro Memoria. Si è soltanto trovato utile sostituire il mercurio all'acqua, Innanzi tutto i poli destinati a condurre la corrente per far attraversare il gas dalla scintilla sono mobili e sono costituiti di due fili di argento che terminano in due punte di platino e sono racchiusi in due tubi di vetro piegati ad angolo acuto, uniti fra loro con saldature autogene. Vengono introdotti nel pallone capovolgendo questo sui poli stessi in guisa che il collo peschi nel mercurio del bicchiere conico *b*. Mettendo il robinetto saldato superiormente al pallone [1] in comunicazione con una pompa per la rarefazione dell'aria si giunge ad un riempimento perfetto.

Il gas si fa giungere nel pallone sia per la parte superiore, sia per l'inferiore a seconda dei casi, e poi l'ossigeno in proporzioni di quattro o cinque volumi per uno di azoto. Al disopra del mercurio si fa arrivare uno strato di acqua alcalina di circa 1 cent. mediante una pipetta e per la stessa via la quantità di ossigeno che si rendesse necessaria successivamente. Per determinare la combinazione dell'azoto coll'ossigeno con rapidità è necessaria una scarica forte, almeno quella che si può produrre da 6 pile Bunsen grande modello, ed un rocchetto di 60 cent. con interruttore a molla e la distanza dei poli a circa 6 mm. In queste condizioni lo spazio occupato dal miscuglio gasoso si riempie di vapori rossi che vengono assorbiti dall'acqua alcalina di modo che in 10 ore si possono far scomparire fino a circa 300 cc. di azoto [2].

Allorchè ogni assorbimento cessa, ciò che si vede quando il volume non cambia, si introduce mediante pipetta una quantità conveniente di potassa in soluzione satura per ottenere con quella diluita già contenuta nel pallone una soluzione abbastanza concentrata affinchè con una soluzione di acido pirogallico si possa ottenere un miscuglio atto ad assorbire tutto l'ossigeno libero che resta mescolato al gas inassorbibile residuo. Tale residuo può ottenersi esente di azoto fino al punto da non dare lo spettro di questo corpo, limite che si raggiunge anche col passaggio sul magnesio come fu detto altrove: però esso contiene altri gas che costituiscono delle impurità, specialmente dei composti idrocarburati che danno lo spettro loro carat-

[1] Questi palloni a tubulature opposte, una delle quali a robinetto, sono assai comodi pel maneggio dei gas; si possono eseguire dei travasamenti con grande facilità, sia per mezzo della pompa a mercurio, sia col gassometro di trasporto già descritto.

[2] Coi mezzi di cui poteva ultimamente disporre Lord Rayleigh venivano assorbiti 21 litri all'ora! (Lord Rayleigh, *Observations of the Oxydation of Nitrogen Gas*. Journ. Chem. Soc., February, 1897).

teristico e devono essere eliminati perchè la loro presenza, come è noto, riesce dannosa anche se contenuti in piccolissime quantità, in causa del grande numero di righe che si trovano intorno alla D e D′ e per la continuità dello spettro che va dal verde fin quasi al violetto; ciò che impedisce di vedere o di veder bene le righe che si trovano in questi campi, tanto quelle dell' argo quanto, e più ancora, quelle dell' elio.

Il depuratore è formato di due parti, la prima è un tubo da combustioni B, lungo circa 90 cent., la cui porzione anteriore contiene un rotolo di rete di rame ridotto lungo 15 centim.; il resto del tubo è riempito di ossido di rame, per la lunghezza di circa 40 cent. e, lo spazio che rimane, di calce sodata preparata di recente, prima leggermente arroventata insieme col rame e coll' ossido nel tubo stesso nel quale venne anche praticato il vuoto. Per evitare ogni congiunzione con tubi di gomma alla seconda parte del depuratore, si ricorse ad uno spediente di cui verrà fatta parola più sotto. La seconda parte, C, è costituita di una serie di tubi saldati fra loro autogenicamente disposti come lo mostra la fig. 6 in C. Nel I e II tubo è contenuta dell' anidride fosforica frammista a perle di vetro per rendere la massa permeabile; il III tubo contiene del nitrato d' argento mantenuto fuso nel vuoto per qualche tempo prima dell' introduzione e serve per trattenere le traccie di composti fosforati che potessero emanare dall' anidride. Il IV tubo contiene del sodio mantenuto esso pure fuso nel vuoto prima dell' introduzione, anzi scaldato in bagno a 130°-140° lungo tempo per eliminare anche le ultime traccie di idrocarburi che potesse trattenere, benchè si avesse avuto cura di lavare prima un pezzo di grossa sbarra, come trovasi in commercio, ripetutamente un etere di petrolio bollente sotto 60° dopo di avere inoltre staccate delle grosse fette da tutti i lati. Il sodio ancora liquido venne gettato sopra una piastra di porcellana ed appena un po' consolidato si tagliò in pezzetti che vennero introdotti nel tubo. Il V tubo contiene del solfo in frammenti pure fuso previamente nel vuoto; infine il VI tubo contiene un rotolo di rete di rame prima ossidato, poi ridotto coll' idrogeno ed in seguito arroventato nel vuoto. Il solfo è destinato a trattenere i vapori di mercurio che potessero attraversare fino a quel punto tutto il sistema ed il rame per trattenere le traccie di vapori di solfo che esso potesse emanare nel vuoto. L' ultimo di questi tubi viene congiunto con una pompa a mercurio per mezzo di un tubo di vetro sul quale si inseriscono i tubi di Geissler e Plücker. Tutti questi tubi colle sostanze depuranti si chiudono alla lampada.

La pompa mercurio F porta lateralmente un serpentino D di vetro in cui fu introdotto del rame, ridotto dall' ossido granulato e poi scaldato nel vuoto, e sopra questo dei frammenti di solfo fuso prima nel vuoto. L' ufizio di questo serpentino è lo stesso di quello accennato pei due ultimi tubi del depuratore. Questo serpentino poi superiormente termina in un tubo con bolla E che si riempie di anidride fosforica, mista a perle di vetro, per trattenere l' umidità che potesse provenire dal mercurio.

Il riempimento, tanto del serpentino che del tubo a bolla che lo termina, si effettua dalla parte superiore E che poi si chiude alla lampada. Il serpentino potrebbe venire congiunto alla pompa con saldatura autogenica, però si è trovato più comodo di unirlo al barometro G e questo alla pompa per mezzo di un sistema di congiunzione speciale di cui la fig. 7*d* ingrandita può dare un' idea. Il tubo barometrico G termina superiormente a bicchiere al disotto del quale si è praticata l' inserzione

autogenica del serpentino. Nel bicchiere si fa arrivare fino al fondo il prolungamento superiore h della pompa un po' svasato all' estremità.

Naturalmente il barometro coll' annesso serpentino vengono fissati sullo stesso sostegno della pompa. Si incomincia dall' introdurre uno strato di amianto tutto all' ingiro del prolungamento h della pompa comprimendolo con forza; sopra l' amianto si versa del solfo fuso e per mantenerlo liquido si scalda all' ingiro mediante una lampada; allora si aspira per far penetrare il solfo nell' amianto in modo da imbevere questo per un certo tratto, avendo però cura di evitare che non arrivi fino all' imboccatura del prolungamento h per non ostruirlo. Pel raffreddamento il solfo si stacca dalle pareti di vetro lasciando uno spazio vuoto che si cura di riempire versando del nuovo solfo fuso e nello stesso tempo aspirando.

La quantità di solfo che si versa deve esser tale da formare uno strato alto 4-5 mm. sopra l' amianto, e mentre è ancora liquido si versa uno strato di circa 10 mm. di mastice fuso e si lascia raffreddare praticando il vuoto colla pompa stessa. In tal guisa si ottiene un' aderenza perfetta fra il mastice come pure fra il lembo superiore dello strato di solfo ed il vetro. Il mastice che meglio corrispose per lo scopo, e che fu impiegato per questo genere di congiunzioni, è formato di un miscuglio a parti eguali di cera bianca (meglio di cera della China) e di colofonia mantenuta a 120° nel vuoto per un certo tempo. È però proferibile un mastice formato con parti eguali di gomma elastica e paraffina scaldata con cautele fino ad ottenere una massa omogenea.

Lo scopo per cui si introduce nella chiusura lo strato di solfo è quello di evitare che il mastice non abbia ad introdurre nello spazio vuoto delle sostanze volatili, mentre il solfo, anche se dà qualche traccia di vapore, questo viene trattenuto dal rame. Per maggiore garanzia si versa al disopra del mastice uno strato di mercurio, il quale oltre al mantenere una chiusura perfetta, avverte subito se per avventura si sono formate delle vie per le quali possa penetrare l' aria.

Una simile disposizione permette di poter cambiare facilmente i materiali introdotti nel serpentino e nell' annesso tubo con anidride fosforica, perchè si può staccare il tutto dalla pompa; basta per ciò scaldare il bicchiere all' esterno ove si trovano le sostanze fusibili. Questo identico sistema di congiunzione fu adottato anche per unire il tubo da combustione B col depuratore C il quale porta a questo scopo il bicchiere saldato al I° tubo a bolla con anidride fosforica.

L' inserzione dei tubi spettrali viene effettuata lungo il tubo f saldato autogenicamente al depuratore C ad un capo e al serpentino D all' altro.

Per depurare completamente i tubi spettrali viene prescritto di riempirli di ossigeno puro, scaldarli all' esterno e poi praticare il vuoto ripetendo due o più volte tale operazione. Ciò sta bene se si tratta di tubi con poli di metallo inossidabile, ma non così per quelli a magnesio, per esempio. In tal caso i tubi venivano allestiti con fili di magnesio scaldato prima al rosso scuro nel vuoto. Per distruggere più che fosse possibile le sostanze organiche rimaste aderenti alle pareti dei tubi, ad onta delle lavature fatte prima di saldare i poli oppure introdotte durante la saldatura, venivano portati a temperatura elevata. Il riscaldamento veniva effettuato sul tubo saldato autogenicamente alla pompa e vuotato dall' aria circondandolo con una scatola di lamina di ferro che veniva scaldata all' esterno mediante lampade, disposte opportunamente

per un paio di ore mantenendo costantemente il vuoto. Seguendo questo metodo non si è mai osservato la presenza di idrocarburi nei vari tubi spettrali finora riempiti.

Impiegando tubi con poli di magnesio, od anche di alluminio, quando si fa passare la corrente elettrica si osservano costantemente le righe dell' idrogeno, il quale senza dubbio proviene dai poli stessi per quanto sieno stati scaldati nel vuoto. Ne sia prova il fatto che, se si fa passare la corrente nei tubi mentre stanno congiunti alla pompa per un certo tempo, si vede lo spettro dell' idrogeno, insieme con quello del gas che fu introdotto: ma se questo si estrae completamente e se ne fa rientrare un' altra porzione lo spettro dell' idrogeno cessa di essere visibile. Si comprende quindi quanto sia opportuno far passare per un tempo sufficiente la scintilla nei tubi spettrali prima del riempimento definitivo alla pressione voluta che precede la chiusura.

Tubi spettrali abbinati.

In più esperienze che furono eseguite con gas mescolati si fece uso di tubi di Geissler della solita forma congiunti da un tubo del diametro interno di circa 1 mm. I poli dei due tubi possono essere di due metalli differenti per approfittare della proprietà di assorbire certi gas per parte di un metallo sotto l' azione della corrente elettrica, mentre tale proprietà è minore o nulla nell' altro metallo: così si può osservare più netto lo spettro del gas che rimane quale residuo. Fu in tal modo che si potè ottenere l' argo esente di azoto nei casi di miscuglio, anche senza prima procedere ad una completa separazione.

Probabilmente una simile disposizione potrà prestarsi a degli studî non privi di interesse scegliendo poli di metalli convenienti per ottenere delle separazioni di gas mescolati da studiarsi allo spettroscopio. Per evitare la rottura dei tubi in causa del forte riscaldamento dei poli che avviene quando la rarefazione diviene molto forte e sta per cessare la conduttività, i poli devono prolungarsi più del consueto nell' interno, rivestendo il filo di platino, per circa 15 mm. di smalto e su questo inserire un tubetto capillare entro il quale si introduce il pezzo di filo metallico, che deve servire da polo, in modo da metterlo a contatto col platino; e si fissa poi scaldando in giro il tubetto capillare il quale, rammollendosi e restringendosi, imprigiona e ne tiene fissa l' estremità interna.

Mastice per congiunzione di tubi di gomma e lubrificanti per robinetti.

Allorquando si devono fare delle congiunzioni di organi di apparati con tubi di gomma per ottenere una maggiore impermeabilità si ricorre a miscugli di grassi e cera od a grassi duri. Si raggiunge una maggiore impermeabilità e una durata assai più lunga, specialmente in apparati nei quali si pratica il vuoto, facendo uso di mastici formati di gomma elastica ed idrocarburi solidi o liquidi. Si possono ottenere di tali mastici di consistenza e fusibilità diverse variando gli idrocarburi e le proporzioni. La qualità di gomma che mi parve migliore fu quella di un tubo fuori d' uso, ma non indurito, di gomma elastica vulcanizzata bianca un po' grigia proveniente dalla fabbrica di Pirelli di Milano. Fu preparato un mastice facendo fondere parti eguali

di gomma e paraffina mescolando la massa continuamente. Fonde facilmente ed aderisce abbastanza bene al vetro, ma rimane a lungo pastoso.

Un secondo mastice fu ottenuto facendo sciogliere la stessa gomma, in apparato a ricadere, nel cumolo commerciale. La soluzione fu addizionata con ½ parte di paraffina, l'eccesso di cumolo fu eliminato per distillazione ed il residuo mantenuto a 110°-120° a pressione ridotta per varie ore, finchè non distillava più nulla. Venne impiegato per le congiunzioni in apparati che devono mantenere il vuoto a lungo. Fonde meno facilmente del primo, aderisce molto al vetro e perde dopo alcuni giorni quel po' di vischiosità che ha appena applicato.

Si ottiene un buonissimo lubrificante per robinetti di vetro o di metallo fondendo insieme parti eguali di gomma elastica naturale ben depurata con vaselina od olio minerale pesante (bollenti sopra i 300°) fin che la massa fusa diventa perfettamente omogenea. Se si mantiene per qualche ora a 120°-130° a pressione molto ridotta non dà più sostanze volatili in modo sensibile anche nel massimo vuoto.

Apparati per le detonazioni.

Allorquando la quantità di gas disponibile è limitata, o si vuole limitare, a poche centinaia di cc., e contiene dei gas combustibili da eliminarsi, si può ricorrere alle detonazioni mescolandolo colla necessaria quantità di ossigeno, la cui proporzione sarà indicata da saggi eudiometrici preliminari.

I soliti apparati non si prestano affatto o si prestano male per far detonare un considerevole volume di gas, tuttavia è un metodo spiccio e permette inoltre di poter impiegare delle quantità di gas limitate o rilevanti a seconda dei casi.

La disposizione che fu adottata a tale scopo in questo Istituto è indicata nella fig. 9, tav. IV, che rappresenta l'apparato che servì in più occasioni, e funzionò in modo soddisfacente impiegando per ogni esperienza, un volume di gas limitato a 100 o 200 cc., contenente oltre il 90 % di metano, il quale veniva mescolato colla proporzione voluta di due volumi di ossigeno.

Il miscuglio veniva introdotto nel pallone A riempito prima di mercurio e capovolto entro un bicchiere. Il riempimento col mercurio fu effettuato colla pompa aspirando l'aria dalla parte del robinetto mentre il gas fu introdotto per la parte inferiore del pallone. Il pallone B si riempie di mercurio nello stesso modo capovolgendolo prima ancor vuoto sui poli collocati nel bicchiere.

La detonazione coll'apparecchio rappresentato nella fig. 9 si effettua nell'eudiometro C in cui viene richiamato il miscuglio detonante dal pallone A, aprendo il suo robinetto ed abbassando il serbatoio a mercurio D. Con questo apparato abbiamo potuto effettuare delle detonazioni con volumi di 25 a 30 cc. per volta, avendo cura di abbassare molto il serbatoio D in guisa da diminuire fortemente la pressione. Naturalmente la maggiore o minore rarefazione si ottiene subordinatamente alla lunghezza dell'eudiometro C e alla lunghezza del tubo di gomma che lo congiunge al serbatoio D.

Chiuso il robinetto e provocata la detonazione si fa passare il residuo gassoso nel pallone B in cui si introduce della potassa liquida concentrata per assorbire l'anidride carbonica, avendo cura che rimanga tanto gas da impedire che il liquido

alcalino vada a bagnare i fili metallici. Per l' assorbimento dell' azoto mediante l' ossigeno e la scintilla si introduce quest' ultimo nelle proporzioni volute per la bocca inferiore del pallone B.

Per evitare l' azione solvente sui gas per parte dell' acqua conviene anche impiegare il mercurio pel riempimento del pallone stesso e far giungere la potassa sopra il mercurio per mezzo di una pipetta.

Alcuni particolari intorno alla costruzione di questo piccolo apparato non saranno fuor di luogo specialmente in riguardo alle garanzie di resistenza che deve offrire.

Quello da noi usato è stato costruito con un tubo del diametro interno di circa 12 mm., dello spessore di pareti di 1 mm. e lungo 60 cent. Ad una delle cui estremità, soffiata a sfera di pochi millimetri superiore al diametro del tubo, furono saldati due tubi del diametro interno di mm. 1,5 formanti un V, mentre la estremità opposta del tubo finisce in forma di ghianda per l' inserzione di un tubo di gomma per la congiunzione del serbatojo-livello D. I poli sono saldati nel vetro delle pareti della sfera.

Non sarebbe conveniente scegliere un tubo di diametro maggiore per la costruzione dell' eudiometro, anche per impedire una propagazione troppo istantanea della esplosione. Con un apparato delle dimensioni sopra esposte si può seguire coll' occhio la propagazione della fiamma facendo esplodere 20-25 cc. di miscuglio, contenente circa 90 parti di metano, e 200-220 parti di ossigeno e 8-10 parti di gas inerte, rarefacendolo fino al punto da far evacuare tutto il mercurio dal tubo di vetro. Certo non sono necessarie lunghe descrizioni per mostrare come si operi il travasamento del gas; in ogni modo più avanti ne vien fatta parola.

Incidentalmente ricordiamo che questo stesso apparato servì assai bene per far venire un miscuglio gassoso (p. es. argo ed elio) a contatto di una quantità relativamente grande di acqua più volte rinnovata onde togliere al miscuglio gassoso uno dei costituenti più solubili.

L' apparato servì mantenendo la disposizione tal quale è indicata dal disegno, solo che in luogo del detonatore si mise un tubo simile senza elettrodi ed i tubi di gomma che servono alle congiunzioni erano molto più lunghi. In uno dei palloni si trovava il gas sull' acqua distillata, bollita prima per qualche ora, prolungando il contatto ed agitando fin che si satura la prima porzione. Intanto anche il secondo pallone viene riempito di acqua e si travasa il gas incominciando dall' aprire il robinetto del pallone che lo contiene ed abbassando il serbatoio D. Si chiude allora il robinetto del primo pallone, si apre quello del secondo e si alza il serbatoio D per cui allora il gas viene spinto nel secondo pallone. Si toglie facilmente l' acqua saturata dai palloni senza staccare le congiunzioni di gomma, abbassando il bicchiere fin che entra l' aria e si rinnova l' acqua raddrizzando il pallone colla bocca all' insù, si riempie di acqua nuova e poi si rimette nella posizione di prima tenendo chiusa la bocca col dito fin che si immerge nell' acqua contenuta nel bicchiere.

Le precauzioni che furono prese per evitare l' introduzione di aria nel gas in queste esperienze riguardano la solubilità dell' aria nell' acqua fredda e la diffusione e scambio dei gas rinchiusi su un bagno ad acqua e l' aria esterna. Per evitare il primo inconveniente si introdusse nei palloni l' acqua lungamente bollita ancora calda, solo però fino al punto da evitare rotture, e lasciandola raffreddare nel pallone stesso;

il secondo inconveniente col far pescare la estremità inferiore del collo dei palloni in uno strato di mercurio.

Secondo apparato per le detonazioni.

La fig. 8 rappresenta schematicamente la disposizione adottata per procedere alla detonazione di rilevanti quantità di miscuglio gasoso detonante (tre litri circa in un giorno).

L'apparecchio consiste in due palloni: il primo, A, della capacità di circa 4 litri, ed il secondo, E, di 2 litri; nel gassometro di trasporto C e nel detonatore D precedentemente descritto e finalmente in una pompa comune a mercurio di cui nel disegno non c'è altra traccia che nella estremità inferiore mobile dell'asta *m*. Il gassometro C, fissato su apposito sostegno, viene applicato solidamente alla pompa in modo che la campanella *b* si trovi sopra l'estremità mobile dell'asta discendente. Il serbatoio B contenente il gas si inserisce al tubo orizzontale *l* mediante un pezzo di gomma. I robinetti *f*, *g* e *h* sono ad una via mentre *i* è a tre vie e saldato colle sue tre tubulature autogenicamente ai relativi pezzi di riscontro come lo mostra la figura. In tutto il sistema deve essere praticato il vuoto e perciò i robinetti si aprono in modo da stabilire la comunicazione colla pompa. Per evitare che restino imprigionate delle bolle d'aria fra il mercurio e le pareti del gassometro C e del detonatore D si fa aspirare il mercurio nella campanella *b* fin sopra il robinetto *c*, poi si chiude e si abbassa il serbatoio *d*, ed altrettanto si fa con quello *e* del detonatore. Con ciò si ottiene il completo rimpiazzamento dell'aria col mercurio. Allorquando il vuoto è completo si intercetta la comunicazione fra il pallone A ed il gasometro C girando il maschio del robinetto *i* in modo che sia stabilita invece la comunicazione fra il pallone A e il serbatoio B, il quale viene allora aperto rompendo la punta già previamente intaccata colla lima. Il gas si espande nel pallone fin che si stabilisce l'equilibrio di pressione. Per far passare tutto il gas dal serbatoio B nel pallone si gira ancora il robinetto *i* facendo comunicare il pallone col gassometro C il cui robinetto *g* viene chiuso prima; così pure si chiude la morsetta *n* mentre si apre poi il robinetto *c*. Non resta che far agire la pompa per estrarre tutto il gas dal serbatoio e farlo passare nel pallone.

Il miscuglio coll'ossigeno si può effettuare facilmente anche senza staccare il serbatoio B, anzi non conviene affatto, perchè può servire di misura; basta perciò inserire alla punta libera un tubo di gomma a pareti grosse poste in comunicazione con un gassometro pieno di ossigeno. Naturalmente l'aria contenuta nel tubo di gomma deve prima essere scacciata dall'ossigeno. Rompendo la punta l'ossigeno va ad occupare lo spazio vuoto e riempie il serbatoio; da questo poi si fa passare nel pallone nel modo descritto precedentemente. Introdotto che sia il volume di ossigeno necessario si procede alla detonazione richiamando nel detonatore il volume di miscuglio che possa esplodere senza pericolo. I robinetti *h* e *g* devono restare chiusi nel momento dell'esplosione. Si intende che il livello del mercurio nel gassometro C deve trovarsi qualche centimetro sotto le inserzioni delle due tubulature per lasciare il varco al gas.

Il residuo gasoso che rimane dopo avvenuta l'esplosione viene spinto nel pallone E alzando il serbatoio *e* ed aprendo il robinetto *f*. Quando fra i prodotti della combustione si forma dell'anidride carbonica, questa si può far assorbire nel pallone stesso E introducendovi della calce sodata in grani prima di applicarvi il turacciolo col robinetto.

Apparato per la combustione degli idrocarburi del gas dei Bagni della Porretta.

La separazione dei corpi gassosi che formano il miscuglio delle emanazioni terrestri dei Bagni della Porretta non si presentava facile su larga scala, data la natura dei componenti, ma sopratutto riusciva difficile la eliminazione degli idrocarburi. Dalle analisi eudiometriche risulta che in questo gas è contenuto circa il 90 °/₀ di metano, per la cui distruzione non vi ha troppa scelta di mezzi: la combustione è il solo veramente praticabile, sia coll'ossigeno per esplosione, sia coll'ossido di rame a temperatura elevata ([1]).

In altro luogo è stato descritto l'apparato ed il modo di procedere coll'esplosione; qui vien data la descrizione dell'apparato a combustione coll'ossido di rame, rappresentato dalla figura schematica 10, tav. V.

Il gas naturale, raccolto nel modo descritto altrove, è contenuto nella damigiana A ([2]), alla quale venne scambiato sotto l'acqua il turacciolo pieno, con cui fu chiusa sul luogo, con uno a due fori, nei quali passano due tubi, uno arriva fin presso il fondo, l'altro appena sporge sotto il turacciolo tagliato a becco di clarinetto. Mentre si effettua il cambio alle porzioni dei tubi di vetro che devono rimanere esterne sono applicati due pezzi di tubo di gomma muniti di compressori per tenerli chiusi e le porzioni di detti tubi che vanno nell'interno si riempiono di acqua prima dell'introduzione nella damigiana. Il tubo più corto che serve di scarico si vuota facilmente dall'acqua, di cui è stato riempito prima di chiudere la damigiana, se ha un diametro di 6-8 mm.; nel caso che l'acqua non esca spontaneamente, basta premere il pezzo di tubo di gomma. Le poche goccie che rimangono, vengono spinte nel lavatore *c* dal gas che esce dalla damigiana aprendo la morsetta. Il tubo più largo *a* deve servire da sifone e per ciò al pezzo esterno di gomma *a'* si fissa un altro tubo *a''* la cui lunghezza superi di 5-6 cent. quello interno ([3]), che si riempie prima di acqua e si immerge in un vaso cilindrico D di diametro stretto (6-8 cent.) ed alto presso a poco come la damigiana, pieno di acqua. Nel caso nostro importava avere un funzionamento automatico di caricamento dell'acqua e si raggiunse collocando una damigiana B della capacità presso a poco come quelle contenenti il gas,

([1]) Siamo adesso occupati a studiare un metodo rapido e economico per effettuare la combustione degli idrocarburi, facendoli semplicemente bruciare coll'ossigeno.

([2]) Nella figura le damigiane vengono rappresentate con circa la metà della proporzione che dovrebbero avere rispetto alle altre parti dell'apparato allo scopo di evitare l'ingombro che avrebbero prodotto colle proporzioni volute.

([3]) L'esperienza ci ha dimostrato che si ottiene assai maggiore regolarità di efflusso del gas invertendo le braccia del sifone, aumentando, cioè, alquanto la lunghezza del braccio aspirante.

piena di acqua, chiusa con un turacciolo a due fori e con due tubi disposti precisamente come è stato descritto per l'altra damigiana. Il tubo *b* è costituito di tre pezzi, uno di vetro *b''* che pesca fino al fondo della damigiana si prolunga all'esterno in un pezzo di gomma *b'* a cui sta unito il terzo pezzo di vetro *b* che va a pescare fino al fondo quasi del cilindro D. Il tubo funziona da sifone nel modo ordinario in cui l'efflusso viene regolato dal tubo *f* formato da un pezzo di tubo di gomma *f'*, congiunto al tubo corto *f''*, che passa pel turacciolo della damigiana, e munito all'estremità di un pezzo di tubo di vetro *f* che arriva alcuni centimetri sotto il bordo del cilindro D. Si comprende che il sifone *b* non può funzionare se non allorquando resta libera l'entrata dell'aria pel tubo *f* che regola quindi il livello dell'acqua in D. Come si vede non è che il sistema, applicato al caso nostro, di caricamento automatico dei svaporatori di grandi quantità di liquido.

Una volta collocata a posto la damigiana B, in modo che il suo fondo sia un po' più alto del livello a cui giunge l'acqua in D, non c'è più bisogno di muoverla perchè, per ricaricarla, basta congiungere il braccio esterno del sifone *b* (allungandolo nel caso) col braccio del sifone della damigiana A, di cui giunge sino al fondo ed aspirare l'aria di B con una pompa per mezzo del tubo *f*, per cui la stessa acqua serve per tutta l'esperienza.

Naturalmente ciò si effettua quando tutto il gas sia stato espulso dalla damigiana A nella quale viene invece a trovarsi l'acqua della damigiana B.

Il gas in esperienza uscendo dalla damigiana A passa attraverso il lavatore *c*, in cui è contenuto un po' di liquido, che permette di sorvegliare l'andamento del passaggio del gas; questo poi passa attraverso due tubi da combustione con ossido di rame E, E' collocati sopra due fornelli a gas per l'arroventamento dei detti tubi. Nel percorrere che fa il gas il primo tubo, la maggior parte dell'acqua che si forma si condensa e si raccoglie in *d* onde evitare che spinta avanti produca la rottura, che avverrebbe immancabilmente, del secondo tubo con ossido di rame E'. Questo piccolo collettore si scarica rompendo la punta della coda affilata che porta inferiormente, la quale poi si chiude facilmente con la fiamma. È evidente che una volta messo a posto non si ha bisogno di staccarlo altro che nei casi di rottura. Dal tubo E' il gas attraversa i condensatori *g*, *h* ed H. Il primo è una bottiglia di lavaggio col tubo adduttore, accorciato, e lo scaricatore saldato autogenicamente al tappo, che chiude a smeriglio la bottiglia, in cui viene introdotto del solfato di rame anidro per fissare e rendere solida l'acqua che si forma nel secondo tubo da combustioni. Lo stesso sistema di turacciolo chiude il pallone *h* della capacità di circa 500 cc. Qui il tubo adduttore si allarga alla estremità inferiore quel tanto che basti appena da permettere il passaggio per la bocca ed è saldato autogenicamente allo scarico della bottiglia precedente.

La lunghezza data a questo tubo è tale da giungere poco oltre il terzo della parte sferica del pallone in cui si introdusse della soluzione al 60 $^0/_0$ di potassa caustica fino a coprire per circa 2 mm. la imboccatura allargata del tubo adduttore. Il tubo H è lungo 60 cent., del diametro di 3 cent., e contiene nella parte rigonfiata, e più oltre per 10 cent., dei pezzi di potassa fusa a cui fa seguito della calce sodata a completo riempimento. Esso è congiunto col pallone *h* per mezzo di un pezzo di

tubo di gomma, e mette capo al tubo *k* a cui è pure congiunto con gomma. Il tubo H si carica per l' estremità assottigliata *n* che si chiude poi alla lampada.

Per mettere in azione l' apparecchio si deve prima praticare il vuoto in tutto il sistema dalla morsetta *j* fino alla damigiana C ed al pallone F, estraendo l' aria finchè è possibile colla pompa ad acqua e terminando colla pompa a mercurio. Trattandosi di uno spazio grande (quaranta e più litri) il tempo che richiede quest' operazione è molto lungo, ed è perciò importante di poter disporre di una buona pompa ad acqua la quale possa diminuire la pressione fino a 8-10 mm. Nulladimeno è difficile completare il vuoto in un tempo più breve di due giorni.

Dopo accertata la perfetta tenuta di tutto il sistema si chiudeva la morsetta *j*, si faceva entrare il gas contenuto nella damigiana A ad occupare lo spazio vuoto e poi si portavano al rosso scuro i tubi E ed E'. Ciò si faceva per evitare le deformazioni che possono avvenire in causa del rammollimento del vetro, specialmente se non è molto duro, trattandosi di grossi tubi che misuravano, quelli impiegati nell' esperienza, da 16 a 18 mm. di diametro interno, e venviano scaldati per una lunghezza di 76 centimetri. Quando il gas cessa di entrare nei tubi di combustione si apre la morsetta *j*, si lasciano riempire anche i depuratori e, quando questi pure sono riempiti, si apre finalmente la morsetta *o* che chiude la damigiana C, in modo da mantenere una lenta e regolare aspirazione indicata dal passaggio del gas attraverso i lavatori *c* ed *h*. Col gas dei Bagni della Porretta, quando si era effettuato il vuotamento di una damigiana di circa quaranta litri, la riduzione dell' ossido di rame giungeva fin presso all' estremità del secondo tubo e si rendeva necessaria la riossidazione; di più necessitava il cambiamento della damigiana A, in cui era subentrata l' acqua al gas, e naturalmente, quando questa giungeva presso il turacciolo, si impediva che penetrasse nel lavatore *c* chiudendo la morsetta *j*.

Giunti a questo punto si trattava di non perdere il gas contenuto nel sistema dalla morsetta *h* alla morsetta *o* e far circolare l' aria per la riossidazione del rame ridotto in E ed E'. Si incominciava dall' abbassare le fiamme dei fornelli sui quali poggiano i tubi da combustione e si lasciava aspirare tutto quel gas che permetteva la pressione nella damigiana C, tenendo aperta la morsetta *o*; quando l' equilibrio erasi stabilito, la morsetta *o* veniva chiusa e si faceva agire la pompa a mercurio, la quale richiamava il gas rimasto e lo conduceva sotto la campanella *r* del gassometro di trasporto G (di cui è stata data altrove la descrizione), disponendo il robinetto *l* in modo da mettere in comunicazione la spazio *q* del gassometro col pallone F, già perfettamente vuotato fin dal principio.

Dopo che tutto il gas erasi fatto passare in F si staccava la damigiana A, si faceva rientrare l' aria nello spazio vuoto, si staccava la bottiglia G col solfato di rame mentre si metteva il lavatore *c* in comunicazione con una pompa ad acqua e finalmente si alzavano le fiamme; l' aria penetrando nei due tubi E ed E' attraverso *i* passava sul rame rovente ossidandolo. Completata tale ossidazione si sostituiva alla damigiana A una nuova damigiana, munita del suo turacciolo a due fori, colla differenza dal primo che al pezzo di gomma fissato al tubo di scarico si applica un pezzo di tubo di vetro conformato a ghianda alle sue estremità, che serve per l' inserzione col pezzo di gomma, del vaso lavatore, come è rappresentato nella fig. 11, tav. V.

Allorchè tutto era messo a posto si espelleva l'aria colle pompe e si procedeva a far circolare il gas nel modo sopra esposto.

Come si vede dalla figura il gassometro G è sprovvisto di robinetti laterali a quello centrale a tre vie. Si preferì questa costruzione perchè più semplice e perchè più facilmente si poterono eseguire le congiunzioni autogeniche coi varî organi dell'apparato come si vede dallo schizzo. Per quanto riguarda il modo di farlo funzionare nelle diverse contingenze che si presentano è stato altrove descritto.

Il pallone F venne collocato al suo posto una volta per restarvi fino al termine dell'esperienza. Allorchè era pieno si scaricava facilmente nella damigiana C quando vi era un vuoto sufficiente, per modo da tenerlo sempre pronto a ricevere nuovo gas. Questa damigiana dovette essere rinnovata due volte, vale a dire furono sostituite due damigiane alla prima, perchè non riescendo completa la combustione del metano che per metà del volume, esse venivano a riempirsi dopo un certo tempo; per cui fu necessario far passare il gas tre volte sull'ossido di rame prima di ridurre il volume del gas posto in esperienza ad una sola damigiana.

E questa si può considerare come la prima fase dell'esperienza, quella in cui si fece intervenire l'acqua per aiutare lo spostamento del gas, durata fin presso a poco ad avere un miscuglio a parti eguali dei gas combustibili ed inerti, mentre nella seconda fase il contatto del gas coll'acqua fu evitato, durante la eliminazione delle ultime porzioni degli idrocarburi, facendo circolare nell'apparato la massa gassosa senza più frazionarla in varî recipienti, ma lasciandola invece sempre nell'interno dell'apparato stesso. Per raggiungere questo scopo fu necessario introdurre alcune modificazioni nel dispositivo precedente.

In questa seconda fase entrano in azione alcuni organi dell'apparato che prima restavano inattivi; essi sono tracciati nelle due figure e segnati colle stesse lettere (tav. VI, fig. 12).

Quando si diede mano a far circolare il residuo gassoso esso era ridotto a circa trentacinque litri e fu fatto passare per intiero in due palloni di tale capacità, sommati insieme, dei quali uno è rappresentato nella figura, e segnato con F. Tutto l'apparato deve essere vuotato dall'aria nel modo già descritto, dal robinetto W che chiude il pallone F fino al pallone C incluso.

Il primo passaggio venne ad effettuarsi nel modo seguente: si incominciò, dopo espulsa l'aria, dal chiudere il rubinetto a tre vie *s* dalla parte del pallone C ed il rubinetto *y* per separare gli apparati di assorbimento *g*, *h* e H, indi si stabilì la comunicazione fra il pallone F ed i tubi da combustione per mezzo del robinetto a tre vie *t*, regolando la corsa del gas opportunamente finchè si stabilì l'equilibrio di pressione.

Il gas seguiva la direzione indicata dalle freccie pennate »—> tracciate lungo tutto il percorso fino al robinetto *y*, mantenendo le comunicazioni indicate dalla disposizione dei robinetti. A questo punto, facendo girare il robinetto *t*, si fece comunicare il pallone F colla pompa a mercurio, mentre si stabilì la comunicazione fra il serbatoio *q* del gassometro G col braccio *z* congiunto ai tubi da combustione. Il gas rimasto nel pallone F veniva di mano in mano trasportato dalla pompa sotto la campanella *r* e da questa in *q* per entrare poi nei tubi da combustione, che venivano scaldati al rosso. Allora venivano aperti il robinetto *y* e poi *o* che chiude il pallone C; quest'ultimo

essendo vuoto aspirava il gas. A questo punto per mantenere un andamento regolare bastava registrare l' apertura del morsetto *o* e stabilire l' equilibrio fra la quantità di gas che viene aspirata in C e quella che entra nei tubi da combustione ivi trasportata dalla pompa. Era facile accorgersi delle disuguaglianze fra queste due quantità, osservando il livello del mercurio nella campanella *h*, che si cercò di mantenere costante facendo agire più o meno rapidamente la pompa, e, caso occorrendo, col restringere od allargare la morsetta *o*. In tal modo si procedette fino alla completa vuotatura del pallone F.

Il ritorno da C ad F si effettuava secondo la direzione indicata dalle freccie semplici; basta perciò aprire la comunicazione fra il pallone F ed il braccio *z* del gassometro G regolando l' efflusso del gas, il quale arriva in F venendovi aspirato perchè ivi si è fatto il vuoto. Anche in questo caso le ultime porzioni vengono aspirate mediante la pompa a mercurio. L' indizio che i gas combustibili erano stati eliminati venne dato dal manometro della pompa, il quale dopo che tutto il gas fu fatto passare da una parte o dall' altra, segnò la stessa altezza.

Una delle difficoltà che si presenta nell' allestimento di simili apparati è quella di renderli atti a mantenere il vuoto massimo che si può raggiungere, ad onta di numerose congiunzioni con tubi di gomma e l' inserzione di robinetti in più punti. Il metodo che meglio corrispose per le congiunzioni mediante pezzi di tubo di gomma è stato quello di far uso di gomma bianca quale si usa per le pompe da vuoto, quindi a pareti grossissime e col foro di circa 2 mm., ma invece di usare il grasso per facilitare le inserzioni e rendere impervie le congiunzioni si fece uso d' un mastice di cui fu descritta la preparazione.

Per applicarlo col massimo vantaggio si incominciava dallo intonacare l' interno dei pezzi di gomma per mezzo di un filo di ferro caldo spalmato di mastice, si spalmava pure il tratto esterno del pezzo di vetro su cui doveva essere addossata la gomma, e questa si infilava dopo avere bene scaldato il mastice con una lampada. Se la gomma è di buona qualità e molto elastica si può con molta facilità applicare un tubo di questa materia a uno di vetro anche se presenta un diametro superiore 8-10 volte a quello interno del primo.

Questa specie di mastice applicato a caldo aderisce perfettamente al vetro ed alla gomma elastica colla quale forma, per così dire, tutta una massa; di più non si screpola e non si stacca nemmeno dopo lungo tempo e, per la temperatura bassa, non indurisce.

La combustione del gas dei Bagni della Porretta costituito, stando alle analisi, di circa il 90 $^0/_0$ di metano, non fu, come altrove è detto, operazione troppo facile, sia per il grande volume di gas da maneggiare, sia per la difficile ossidabilità del gas stesso mediante l' ossido di rame; nondimeno si giunse ad ottenere un residuo non combustibile, corrispondente al volume di centocinquanta litri, cioè quattordici litri di residuo, costituito di azoto e, come si disse, di argo.

Reputiamo conveniente per ultimo di far notare che le figure, specialmente quella che si riferisce alla combustione degli idrocarburi, rappresentano gli apparati in modo schematico, come già in altro luogo è detto, allo scopo di rendere più evidente la disposizione, per cui talune parti riuscirono o smisuratamente ingrandite o all' opposto impiccolite.

Apparecchi spettrali e misure relative.

Pur troppo noi non abbiamo potuto disporre nè di spettografi, nè di spettroscopi con reticolo di Rowland, o almeno a grandissima dispersione, e nemmeno di prismi e lenti di quarzo come sarebbe stato necessario per uno studio completo degli spettri dei due elementi e per la sicura ricerca eventuale di nuovi. Le nostre ricerche sono perciò necessariamente limitate alla parte più visibile dello spettro e non si estendono al di là della lunghezza di onda di $= \mu\mu$ 393,3.

Gli apparecchi che abbiamo impiegato sono i seguenti.

Spettroscopio a visione diretta di I. G. Hofmann in Parigi. Si vede con esso doppia la riga del sodio quando il campo non sia troppo illuminato: le letture si fanno per mezzo della scala fotografata. Per la rapidità colla quale si può mettere al posto questo istrumento ci fu utilissimo tutte le volte che si trattava di seguire nelle sue varie fasi lo spettro di un gas, variando la rarefazione, adoprando mezzi speciali per l'assorbimento, come pure per assicurarci, prima del riempimento dei tubi di Geissler, se in un dato gas vi era sempre azoto, idrogeno, ecc.

Spettroscopio di Browning con due prismi. Questo apparecchio fu messo gentilmente a nostra disposizione dal prof. Silvio Lussana della R. Università di Siena, al quale porgiamo i più vivi ringraziamenti. Lo spettro è nitidissimo, ma assai piccolo: si ha buona dispersione e poco assorbimento nel violetto. Le letture si fanno per mezzo dell'oculare a reticolo e di un cerchio graduato e di un indice con nonio col quale si possono leggere i gradi e i minuti primi. Dell'ampiezza della fessura si può sempre tener conto mediante un tamburo graduato che gira intorno a un indice.

Spettroscopio di Krüss a un solo prisma. È lo strumento col quale abbiamo fatto la maggior parte delle misure e fu messo gentilmente a nostra disposizione dal dott. G. Rossi, direttore del Laboratorio chimico municipale di Padova, che ringraziamo vivamente. È a un solo prisma semplice e dà uno spettro assai bello, dove si vede benissimo doppia la riga del sodio: nel violetto si arriva sino alla lunghezza di onda di $\mu\mu$ 393,3. Le misure si possono fare per mezzo della scala fotografata che è abbastanza nitida, onde si può con sicurezza apprezzare la metà di una divisione e, in circostanze favorevoli, anche la terza parte; inoltre si possono anche fare per mezzo di un indice, che si muove per mezzo di una vite micrometrica insieme col cannocchiale e che scorre sopra un quadrante graduato in modo arbitrario: coll'indice si hanno direttamente le migliaia e le centinaia di divisioni, mentre coll'aiuto di un altro indice intorno al quale gira un tamburo graduato si hanno le diecine e le unità. L'oculare è semplice, ma, come nello spettroscopio di Browning, così anche in questo, si può sempre tener conto dell'ampiezza della fessura.

Apparecchio spettrale universale di Krüss. Esso si può usare con un solo prisma e con due: nelle nostre prime esperienze potevamo disporre di due prismi di Rutherfurd, più tardi anche di due prismi semplici abbastanza dispersivi, ma poco assorbenti: coi primi invece si aveva il vantaggio di una grande dispersione, ma anche l'inconveniente di un forte assorbimento nel violetto. Usando l'apparecchio con un solo prisma le letture si possono fare anche colla scala fotografata. Il vantaggio

di questo strumento è principalmente quello, per i riguardi puramente spettroscopici, che mediante appositi meccanismi il cannocchiale si muove insieme coi prismi che rimangono sempre alla deviazione minima. Il dispositivo per fare le misure è lo stesso che per il precedente spettroscopio: più tardi abbiamo fatto modificare l'istrumento, ed in quello modificato le letture si fanno mediante un indice con nonio che scorre sopra un arco graduato segnato sullo strumento stesso: l'indice dà i gradi e i mezzi gradi ed il nonio i minuti primi. In questo strumento ci sono diverse particolarità di costruzione assai pratiche: gli spostamenti della fessura si possono ancor qui misurare con tutta esattezza: di più, insieme col solito oculare a reticolo, vi è un altro oculare costituito da due lamine che stringendosi e allargandosi dànno una fessura longitudinale la cui ampiezza si può con tutta esattezza misurare mediante un tamburo graduato che gira intorno ad un indice fisso: in questo modo si possono esaminare successivamente piccole porzioni dello spettro senza che la illuminazione delle altre parti disturbi l'osservatore. Ma pur troppo la costruzione meccanica delle diverse parti dell'apparecchio lascia un po' a desiderare e noi difficilmente lo abbiamo adoperato per fare misure: invece ci è stato utilissimo per la scoperta delle righe e pei confronti.

A proposito dei confronti diremo come, essendo noi nell'impossibilità di fare misure esatte di lunghezza di onda, tutte le volte che eravamo in dubbio abbiamo ricorso al confronto diretto degli spettri mediante il prisma di controllo: così abbiamo sempre fatto per le righe dell'argo e dell'elio, così in molti casi in cui ci sono apparse delle righe dubbie e che potevano attribuirsi, per la grande vicinanza delle lunghezze di onda, ad altri elementi.

Spettrografo. Lo spettrografo, che è quello descritto dal prof. Ostwald nel suo *Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen*, pag. 176, fu costruito dalla Casa Salmoiraghi di Milano secondo le indicazioni date dal prof. G. Magnanini,: questi, a cui apparteneva, ebbe la gentilezza di metterlo a nostra disposizione. Le lenti sono in vetro, ma oltre che un prisma a solfuro di carbonio o a bromonaftalina, si può impiegare anche un prisma di quarzo: si fanno fotografie della lunghezza di 90 mm. e dell'altezza di 9. Le fotografie da noi ottenute compariranno nella 2ª parte di queste ricerche.

Già abbiamo detto che la maggior parte delle osservazioni le abbiamo eseguite collo spettroscopio di Krüss a un solo prisma e per questo abbiamo costruito la curva che ci desse la lunghezza d'onda in funzione della posizione letta sulla scala fotografata o sul quadrante graduato. Per costruire la curva (tav. VII), che si riferisce alle posizioni sulla scala millimetrata, abbiamo determinato 36 punti: le lunghezze d'onda le abbiamo tolte dai trattati più riputati e dalle memorie originali; esse sono espresse in $\mu\mu$: sull'asse delle ascisse sono riportate le divisioni della scala e su quello delle ordinate le lunghezze d'onda corrispondenti. La curva non è stata costruita in base alle letture fatte sul quadrante o sul cerchio graduato stante le incertezze nelle letture nel rosso estremo e nel violetto. Nell'annessa tabella vi sono tutte le spiegazioni necessarie che mostrano quali sorgenti luminose abbiamo adoprato, di quali sali ci siamo serviti e come abbiamo ottenuto lo spettro.

Quanto all'approssimazione che si può raggiungere è differente nelle diverse

parti dello spettro: ammesso che si possa leggere con sicurezza la metà di una divisione si ha che a mezza divisione corrispondono

$\mu\mu$ 0,5 nel rosso
» 0,4 nel giallo-verde
» 0,3 nell' azzurro
» 0,2 nel violetto.

	Natura della riga		Lettura sulla scala fotografata	Lettura sul cerchio graduato	Lunghezza d' onda	Modo per ottenere lo spettro	Sale impiegato
1	Rubidio		21	—	795	Fiamma Bunsen	Cloruro
2	Rubidio	δ	23,5	669 ?	781,1	» »	»
3	Potassio	α	26	697	768,2	» »	Nitrato
4	A		28,5	718	760,7	Spettro Solare	—
5	*a*		41,5	834	718	» »	—
6	B		52,5	932	687	» »	—
7	Litio	α	59	980	670,8	Fiamma Bunsen	Cloruro
8	Idrogeno	α	65,2	1033	656,3	Tubo di Geissler	—
9	Zinco	β	74 5	1112	636,4	Fulguratore	Cloruro
10	Rubidio	γ	77	1132	629,8	Fiamma Bunsen	»
11	Litio	β	87,5	—	610,4	» »	»
12	Cesio	δ	93	—	601,1	» »	»
13	Sodio		100	1330	589,3	» »	»
14	Mercurio	γ	106,8	1395	579	Fulguratore	»
15	Mercurio	γ	108	1400	576,9	»	»
16	Argento	α	130,2	1606	546,6	»	Nitrato
17	Mercurio	α	130	1617	546,1	»	Cloruro
18	Tallio		140	1685	535,1	Fiamma Bunsen	Nitrato
19	Calcio		148	1672?	527	Fulguratore	Cloruro
20	Rame	β	158,5	1856	515,3	»	»
21	Rame	α_2	163,2	1903	510,6	»	»
22	Cadmio	α	165,5	1917	508,6	»	»
23	Idrogeno	β	191,5	2143	486,2	Tubo di Geissler	—
24	Zinco	α	198	2210	481,1	Fulguratore	Cloruro
25	Cadmio	β	199,5	2217	480	»	»
26	Zinco	γ	211	2316	472,2	»	»
27	Cesio	β	230	—	459,3	Fiamma Bunsen	»
28	Ferro		260,5	2758	441,5	Scintilla	—
29	Ferro		262,5	2775	440,5	tra fili	—
30	Ferro		267,5	2811	438,4	di	—
31	Ferro		283	2937	430,8	Ferro	—
32	Rubidio	β	307	3155?	420,2	Fiamma Bunsen	Cloruro
33	Idrogeno	δ	331	3379	410,2	Tubo di Geissler	—
34	Potassio	β	347	—	404,4	Fiamma Bunsen	Nitrato
35	Calcio		370	—	396,8	Fulguratore	Cloruro
36	Calcio		382	—	393,3	»	»

Tenuto conto dei mezzi limitati di cui potevamo disporre per le misure spettrali ci sembra di aver raggiunto una discreta esattezza: infatti ci è riuscito di scoprire e determinare, bene inteso nella parte visibile dello spettro, quasi tutte le righe dell' elio e, per l' argo, diverse che erano sfuggite al Crookes e alcune che non sono state viste che da Eder e Valenta, i quali tutti hanno adoprato strumenti incomparabilmente più delicati e più precisi dei nostri.

Resultati finali.

Dalle nostre esperienze resulta che nei gas delle Terme di Abano vi è circa il 2 per cento di argo, con piccola quantità d' elio, rispetto all' azoto totale, l' 1 $\frac{1}{2}$ per cento rispetto al gas primitivo; circa il 3 per cento d' argo senza elio, o almeno in quantità così piccola che ci è sfuggito, nei gas dell' Appennino bolognese e finalmente circa il 2 per cento di argo e l' 1 per cento d' elio, nei gas dei soffioni boraciferi di Larderello: questi numeri si riferiscono sempre all' azoto totale.

L' ultimo resultato ci sembra di molto interesse per gli studî ulteriori. Noi abbiamo nei gas di Larderello una sorgente assai ricca di elio, non dubitiamo anzi di asserire che è una delle più adatte, tra quelle sin qui conosciute, per preparare grandi quantità di quell' elemento, giacchè trattandosi di gas ricchissimi in anidride carbonica assai facile è la separazione di questa sul posto, e anche facile, mediante la combustione diretta con un apparecchio di cui ci stiamo adesso occupando, riuscirà la eliminazione sul posto degli idrocarburi; l' eccesso di ossigeno si può togliere poi senza nessuna difficoltà e quindi si potrà trasportare in Laboratorio un gas contenente circa l' 1 % di elio e con una forte corrente in poco tempo si avranno dei litri di mescolanza di argo ed elio, da cui, mediante la liquefazione, o col ripetuto assorbimento coll' acqua, o per diffusione, si ricaveranno centinaia di centimetri cubici ed anche un litro di elio puro, che potrà così confrontarsi con quello ottenuto da altre sorgenti o dai minerali, si potrà tentare la separazione degli eventuali elementi che si suppongono costituirlo, studiarlo insomma sotto ogni riguardo. Questa raccolta su larga scala dell' argo e dell'elio ci proponiamo di farla al più presto.

Da altri esperimentatori nei gas che si sviluppano da sorgenti di acque minerali si sono riscontrate quantità più o meno grandi di argo e di elio. Nei gas delle sorgenti di Wildbad nella Foresta Nera trovò H. Kayser il 2 % di argo con dell' elio. In quelli della sorgente di Bath Lord Rayleigh riscontrò 13,6 per mille di argo e 1,2 per mille di elio. Ed argo ed elio è stato trovato da Ch. Bouchard e da L. Troost nei gas delle sorgenti azotate dei Pirenei: quelle di Cauterets, e precisamente le fonti Raillière, Des Oeufs, Espagnol, Caesar, furono studiate anche da W. Ramsay e M. Travers, che constatarono nel residuo gassoso la presenza dei due elementi senza però stabilirne la quantità; non videro però nello spettro nessuna riga nuova, come aveva annunziato di aver visto il dottor Ch. Bouchard. Molto ricca in argo e in elio sarebbe, secondo Ch. Moureau la sorgente di Maizières (Côte-d'Or) che conterrebbe dal 7 al 10 % di miscuglio; ma pur troppo mancano le indicazioni sulle proporzioni relative dell' uno e dell' altro elemento e anche la certezza che il residuo fosse soltanto da essi costituito. Nei gas delle sorgenti di Buxton fu riscontrato circa il 2 %, in quelli delle acque di

Allhusens Well presso Middlesborough dal 0,4 al 0,5 % di argo: i gas di una sorgente bollente di Reykiavik in Islanda avevano l' 1,14 % di argo senza elio. Nel salgemma di Tees presso Middlesborough erano inclusi dei gas, la cui analisi aveva già prima mostrato che vi era in essi il 2,05 % di metano e il 97,95 di azoto; P. Bedson e S. Shaw trovarono nell' azoto 1,24 % di argo. Assai ricche in argo sono pure alcune sorgenti esaminate recentemente da W. Ramsay e Morris V. Travers. Nella Old Sulphur Well, vicino a Harrogate da una damigiana di acqua ebbero 650 c. c. di gas, da cui 45 c. c. d'argo (6,9 %) e nella Strathpeffer Wells pure da una damigiana di acqua ebbero 1 litro di gas e da questo 22 c. c. di argo (2,2 %). Argo nelle proporzioni di 1,04 a 1,16 % trovò M. Bamberger nei gas ricchissimi in azoto della sorgente Pechtoldsdorf vicino a Vienna. Argo fu pure trovato da Schloesing, figlio, nei gas combustibili delle miniere di carbon fossile e veramente, rispetto all' azoto nelle proporzioni stesse che si trova nell' aria, cosicchè non si può escludere, anzi vi è ogni ragione di ritenere, che derivi dall' aria stessa [1]. È facile vedere che le emanazioni dei Bagni della Porretta sono tra le più ricche in argo e quelle dei soffioni boraciferi in elio rispetto al residuo totale non assorbibile nè combustibile. Noi anzi riteniamo, senza escludere che alcuni gas delle sorgenti dei Pirenei possano contenere più elio, che quello dei soffioni di Larderello, considerando che è incondottato, che si può avere sotto fortissima pressione, cosicchè la raccolta e gli assorbimenti sul luogo non presentano nessuna difficoltà, sia da ritenersi come la sorgente più comoda, più abbondante e più economica che sin qui si conosca per ottenere l' elio in forti quantità.

A proposito del riconoscimento e del dosamento dell' argo e dell' elio sarebbe desiderabile, per non introdurre nella scienza dati inesatti, che prima di affermare che in un dato gas vi sono uno o tutti e due questi elementi si facessero delle misure spettrali e non si chiamasse residuo inassorbibile che quello che mostra allo spettroscopio di non contenere azoto oppure soltanto tracce: troppo è facile ingannarsi sulla cessazione definitiva dell' assorbimento e troppe cause possono determinare quella apparente. Anche sarebbe utile che si dessero sempre, almeno approssimativamente, le misure delle lunghezze d' onda delle righe vedute: qualunque spettroscopio è sufficiente. Non staremo a ricordare quante illusioni si sono avute sin qui: righe nuove che appartenevano invece ad elementi conosciuti, righe attribuite all' argo o all' elio o a delle loro ipotetiche combinazioni e che invece spettavano al mercurio, o agli idrocarburi e così via.

In una Memoria di prossima pubblicazione tratteremo dell' esame dei gas e delle sublimazioni del Vesuvio e dei Campi Flegrei. L' argomento è assai interessante giacchè la scoperta dell' elio in terra si deve, come è noto, a un Italiano, al prof. L. Palmieri, che nel 1882 lo intravide collo spettroscopio in una sublimazione vesuviana.

[1] Per la letteratura dell' argomento, Mugdan, loc. cit., Centralblatt, 1896 e 1897. W. Ramsay e Morris V. Travers, *The gaseous Constituents of certain Mineral Substances and Natural Waters* (Proceedings of the Royal Society, vol. LX, pag. 442, anno 1897).

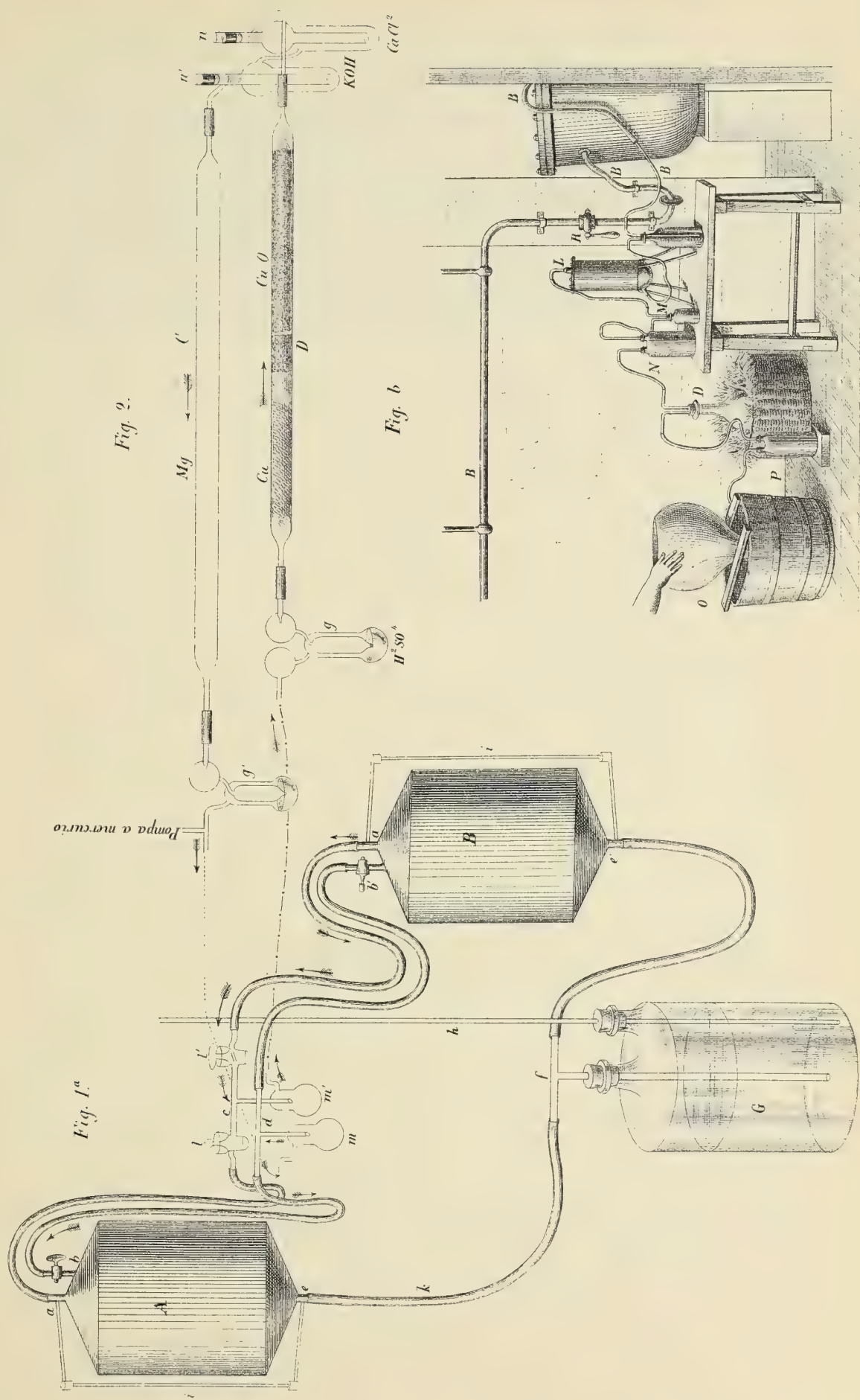
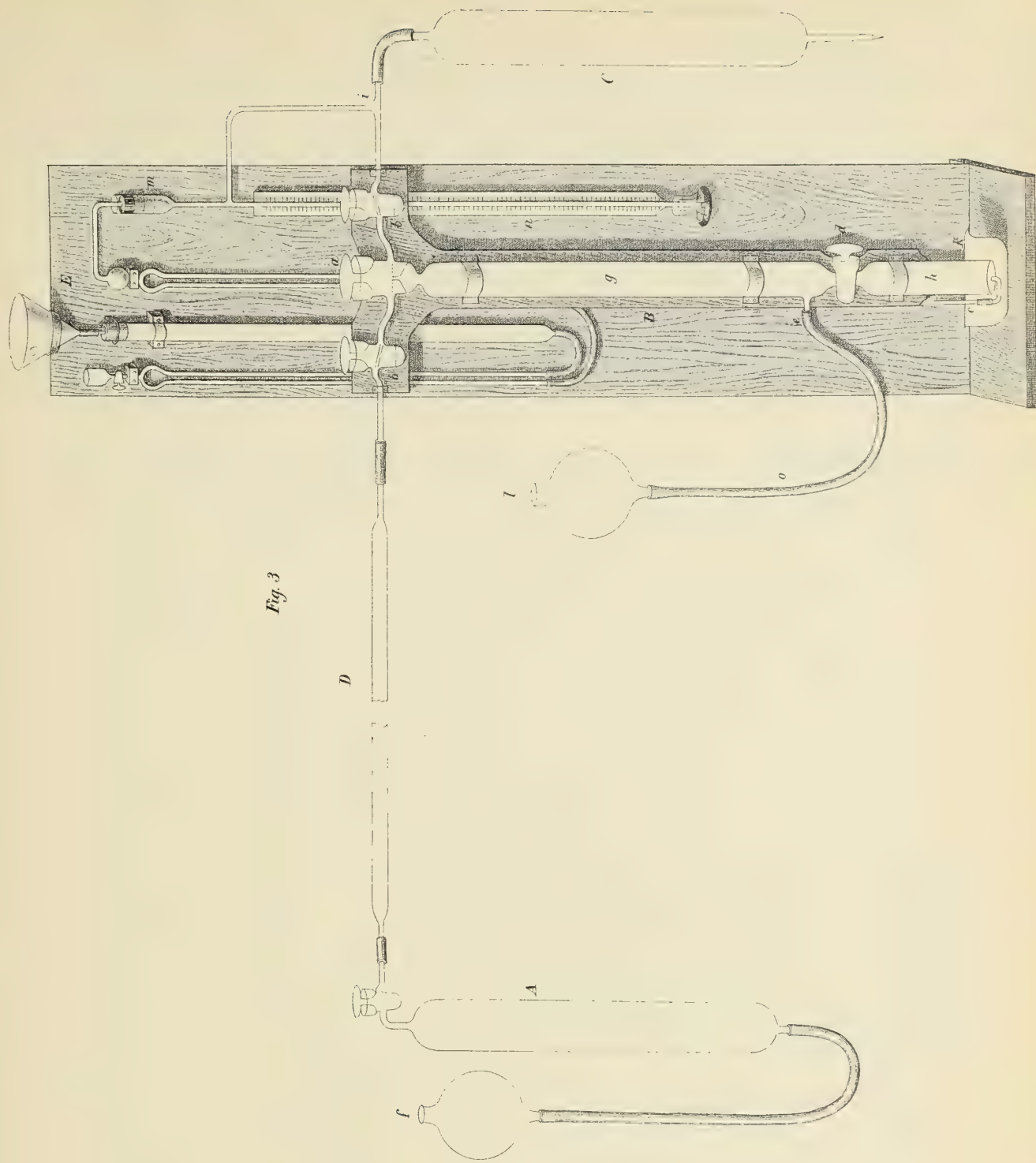
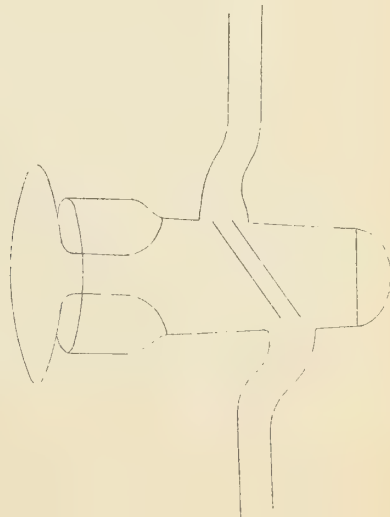
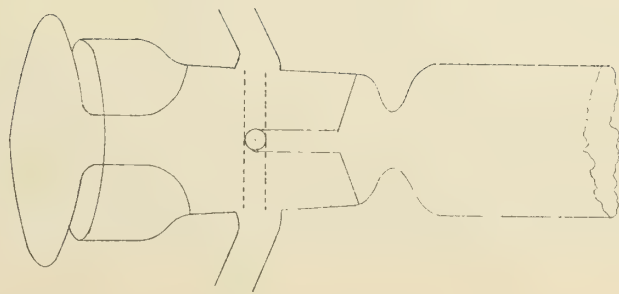
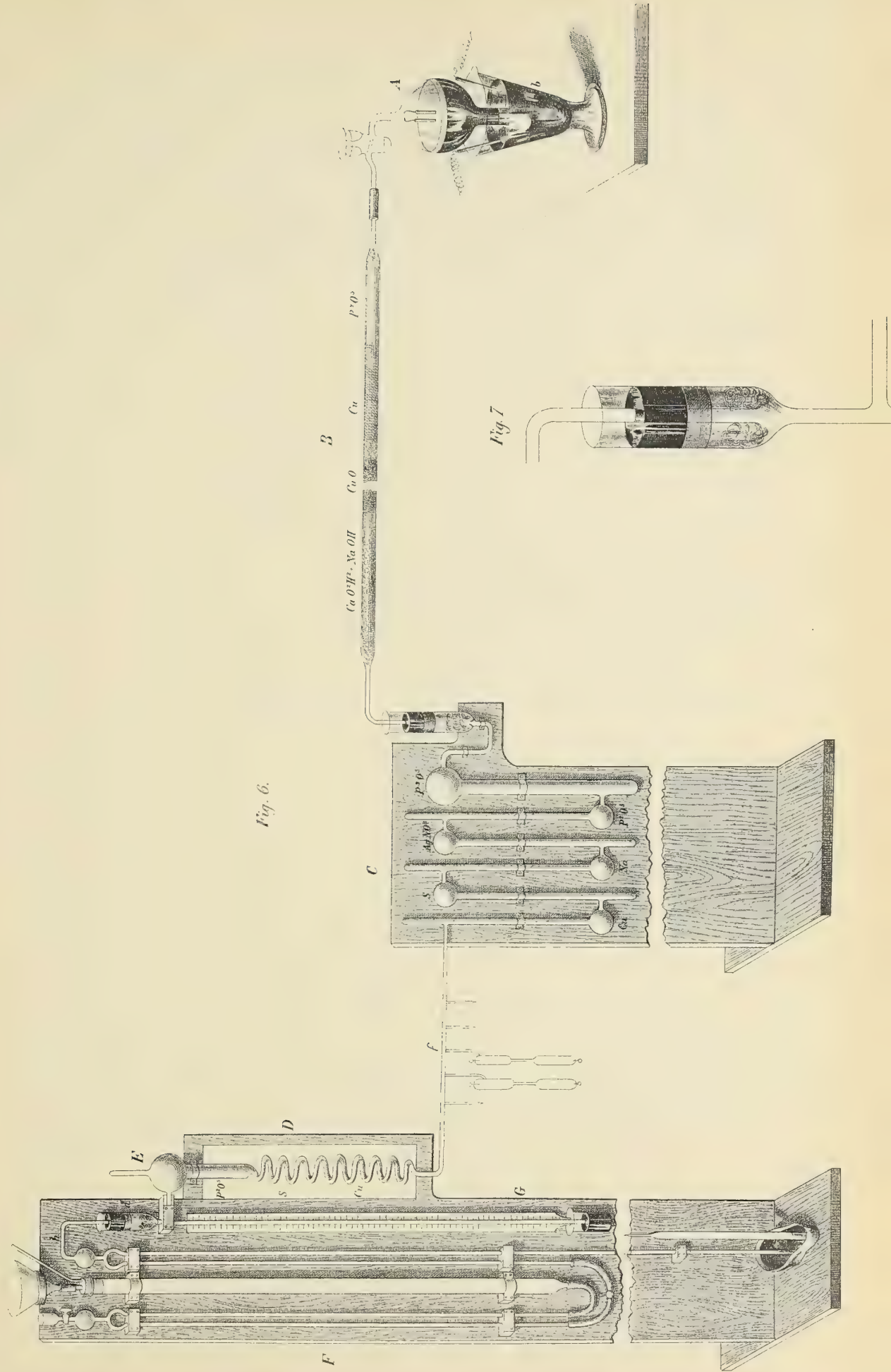
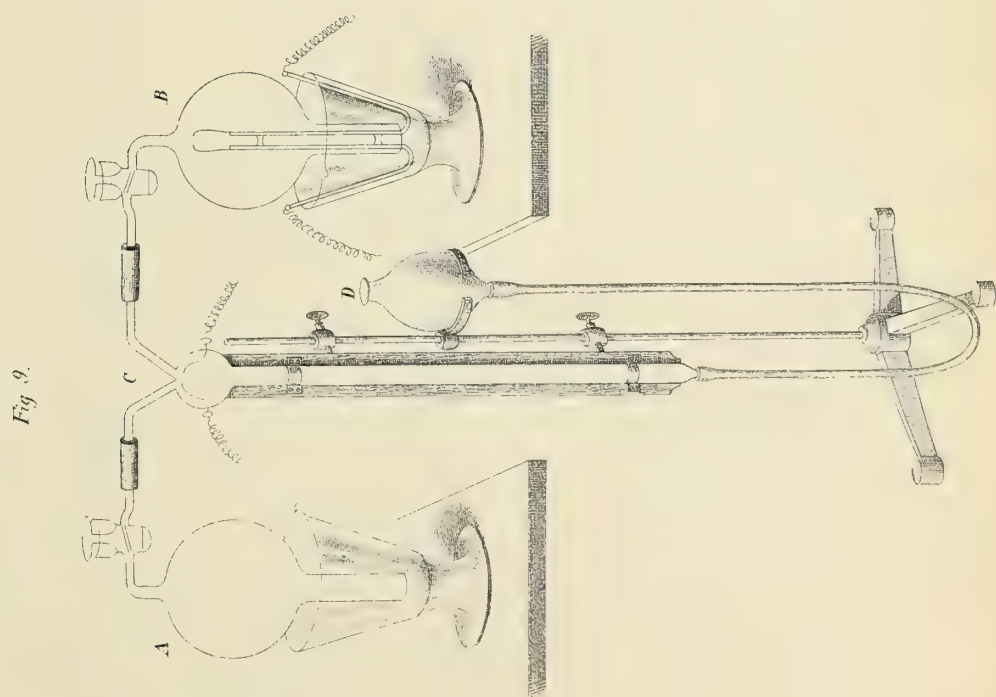
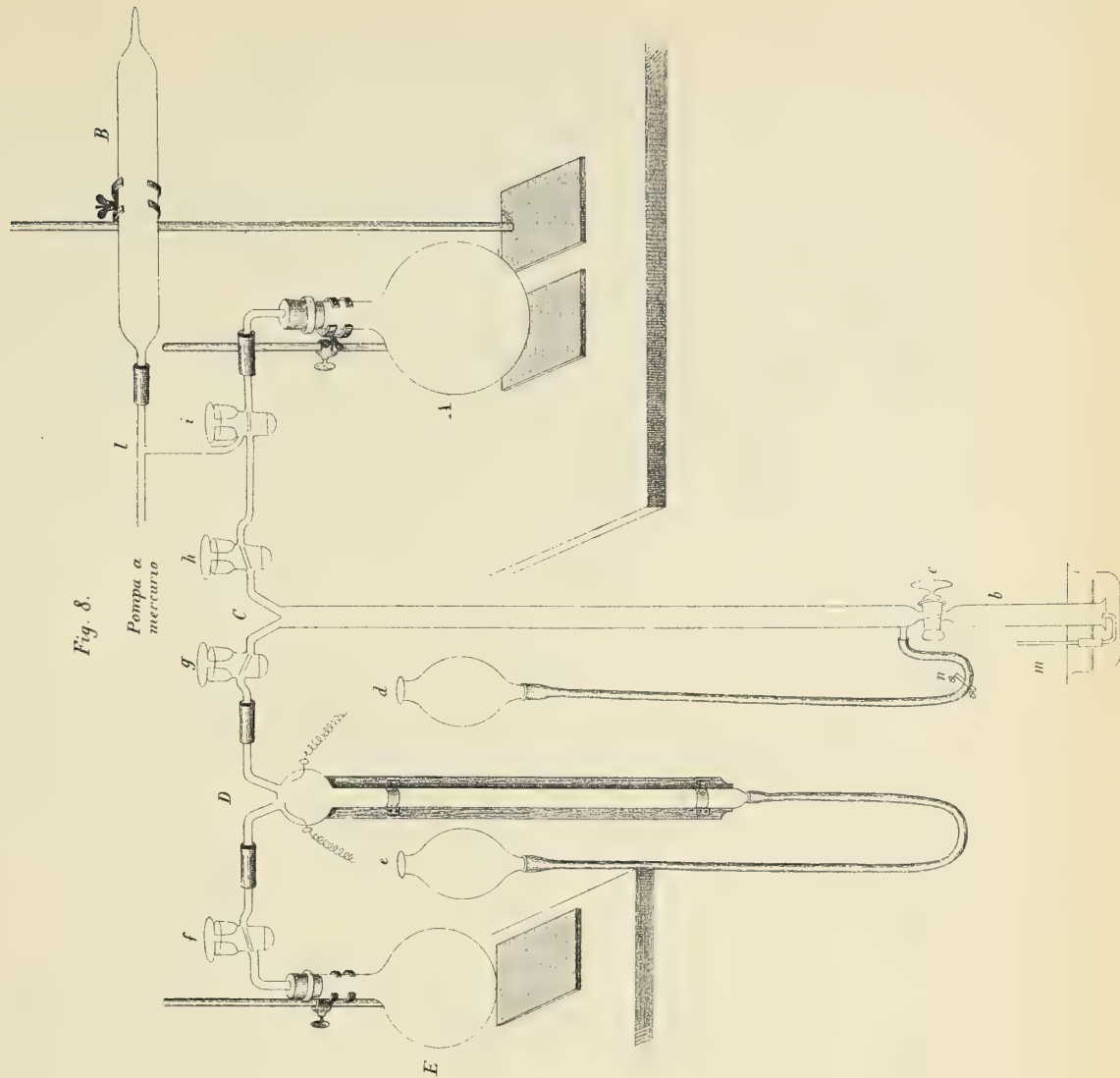
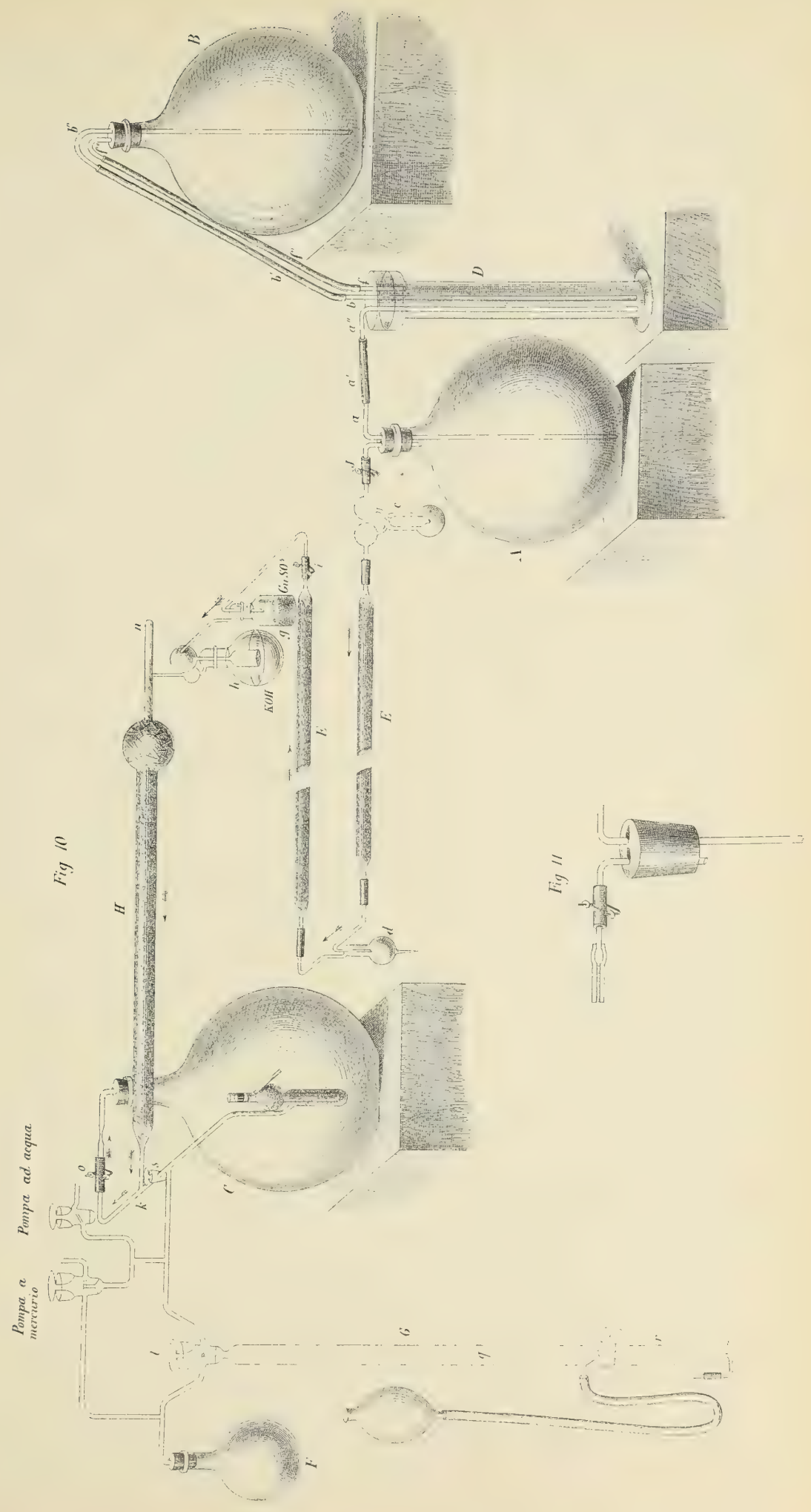



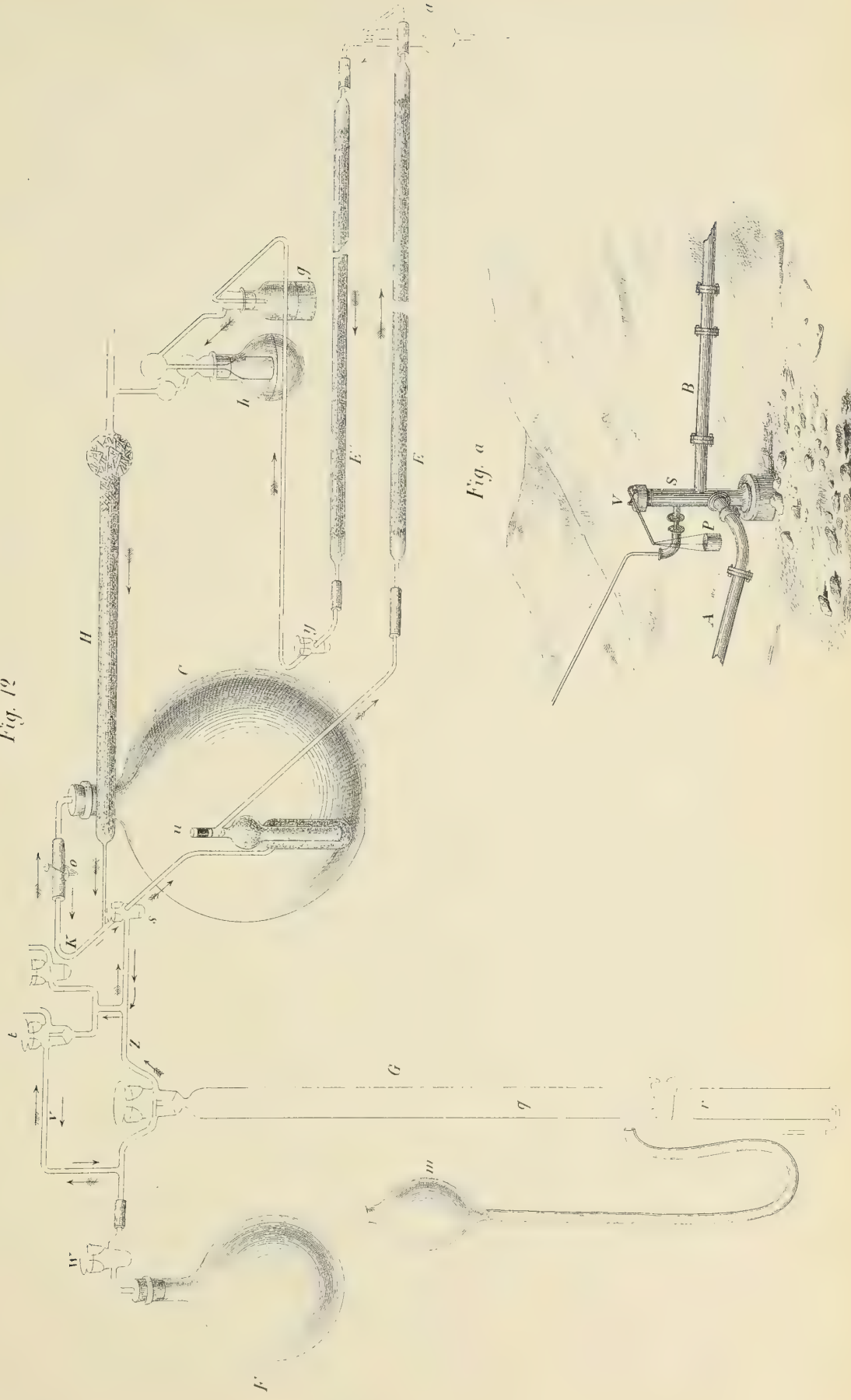
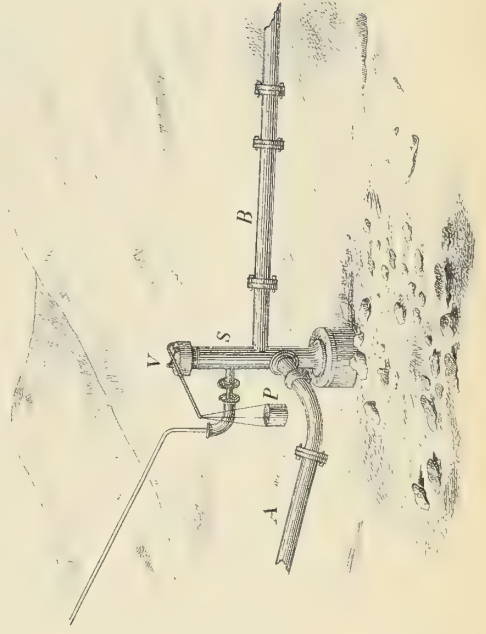
Fig. 1.ª
A
B
G
Pompa a mercurio
Fig. 2.
Mg
C
Cu
Cu O
D
KOH
Ca Cl²
H² SO⁴
Fig. b
B
L
R
N
M
D
O
P

Lit. L. Salomone, Roma.

Fig. 6.
A
b
B
$Ca O^2H^2 \cdot Na OH$
Cu O
Cu
P^2O^5
C
S
Ag NO³
P^2O^5
Cu
Na
P^2O^5
D
E
P^2O^5
S
Cu
F
G
f
Fig. 7

Fig. 9.

Fig. 8.

Pompa a mercurio
Pompa ad acqua
Fig 10
H
KOH
CuSO
E
E
A
B
C
D
F
G
Fig 11

Fig. 12
t
V
W
K
o
H
Z
s
u
C
F
h
g
y
E'
G
E
m
a
q
r
Fig. a
V
S
B
A
P

Lit. L. Salomone. Roma

Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del Pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Milano coll' equatoriale di Merz (opposizione del 1886).

Memoria quinta del Socio G. V. SCHIAPARELLI

letta nella seduta del 16 maggio 1897.

(con quattro tavole)

NOTA PRELIMINARE

696. La presente Memoria, che fa seguito ad altre quattro già pubblicate in questi Atti (1), contiene le osservazioni da me fatte sull' asse di rotazione di Marte e sulle particolarità della sua superficie, in occasione che questo pianeta venne in opposizione col Sole addì 6 marzo 1886; osservazioni che durarono cinque mesi, dal 3 gennaio al 5 giugno del medesimo anno. Fu impiegato anche questa volta il medesimo Refrattore Merziano di 8 pollici d' apertura, che aveva già servito in tutte le opposizioni antecedenti. Soltanto a partire dal 1° maggio s' incominciò a far uso anche del nuovo Refrattore di 18 pollici, di cui allora appunto si era compiuta la collocazione; con questo fu possibile fare ancora alcune utili osservazioni nell' ultimo mese, quando il diametro apparente del pianeta era già ridotto a meno di 10″. Nella totale durata di cinque mesi si ebbero questa volta circa 20 serate di definizione sufficiente, e talora anche di definizione ottima; così che, la posizione del pianeta ajutando, è stato possibile ottenere una prima idea approssimata di tutte le regioni boreali fin quasi al polo, dove la neve faceva poco ingombro, ridotta com' era nel marzo e nell' aprile ad un diametro di forse quattro o cinque gradi.

697. Da parecchi anni il sig. Marth pubblica per ogni opposizione di Marte un' Effemeride corrispondente, dalla quale con grande comodo degli osservatori si possono desumere tutte le circostanze geometriche in cui si fanno le osservazioni di

(1) Memoria I, pubblicata nel vol. II della serie 3ª.
» II » » X » 3ª.
» III » » III » 4ª.
» IV » » II » 5ª.

questo pianeta. Dell' Effemeride calcolata per l' opposizione del 1886, che è pubblicata nel volume XLVI delle Notizie mensili della Reale Società Astronomica di Londra, si appone qui un breve estratto, dove in corrispondenza alle date della prima colonna stanno l' inclinazione dell' equatore di Marte rispetto alla linea visuale, il diametro apparente del disco, e una quantità $\varkappa$ esprimente la distanza angolare, contata in gradi sul lembo del pianeta, fra il polo boreale di esso e il corno boreale della fase oscura. L' uso di tale quantità si vedrà subito al principio del Capitolo seguente.

Data 1886	Inclinazione dell' asse	Diametro apparente	$\varkappa$	Data 1886	Inclinazione dell' asse	Diametro apparente	$\varkappa$
	°	″	°		°	″	°
Genn. 3	+ 23,35	9,04	+ 0,1	Aprile 3	+ 21,86	12,69	+ 12,6
» 13	+ 23,10	9,88	+ 1,7	» 13	+ 22,13	11,81	+ 11,3
» 23	+ 22,81	10,81	+ 3,1	» 23	+ 22,58	10,91	+ 10,2
Febb. 2	+ 22,55	11,79	+ 4,4	Magg. 3	+ 23,16	10,06	+ 9,0
» 12	+ 22,33	12,73	+ 6,4	» 13	+ 23,81	9,30	+ 7,6
» 22	+ 22,14	13,49	+ 11,7	» 23	+ 24,47	8,63	+ 5,9
Marzo 4	+ 21,97	13,92	+ 51,8	Giug. 2	+ 25,06	8,05	+ 4,0
» 14	+ 21,84	13,89	+ 24,9	» 12	+ 25,53	7,55	+ 1,9
» 24	+ 21,78	13,44	+ 15,1				

	Emisfero boreale	Emisfero australe
1885 Settembre 12	Equin. di primavera	Equin. di autunno
1886 Marzo 30	Solstizio estivo	Solstizio d' inverno
1886 Settembre 28	Equin. di autunno	Equin. di primavera

1886 Febbraio 8 — Marte in afelio.

L' inclinazione positiva indica che fu sempre in vista il polo boreale del pianeta. Il valore positivo dell' angolo $\varkappa$ nella quarta colonna indica che il polo boreale si trovò sempre nella parte del lembo libera dalla fase oscura. Tutte le predette quantità sono state calcolate prendendo per la direzione dell' asse di Marte nello spazio gli elementi assegnati nella Memoria II, § 290, secondo le osservazioni fatte a Milano nel 1877 e nel 1879.

CAPITOLO I.

Osservazioni sulla direzione dell'asse rotatorio di Marte.

698. Le osservazioni di posizione della neve polare boreale riuscirono questa volta più facili del consueto, ed anche, a quanto sembra, più concordanti; ciò a causa delle piccole dimensioni di essa neve, che ebbero per conseguenza minori deviazioni della sua forma dalla circolare e minori irregolarità nel suo successivo sfaldarsi. Verso il 25 febbraio cominciò ad essere sensibile all' occhio il suo distacco dal lembo del disco apparente; in conseguenza del qual distacco, volendo applicare il metodo consueto di misura (§ 5), diventò necessario di appoggiarsi col filo micrometrico ad un arco piuttosto considerevole del lembo, non meno di 20° o di 25°. Era quindi necessario che tutto quell' arco fosse intieramente libero dalla fase oscura. Si dovettero pertanto intralasciare le misure tutte le volte che l' intervallo $\varkappa$ del lembo compreso fra la direzione del polo boreale e l' estremità del corno boreale della fase fu minore di 10° a 12°. Questo è il motivo, per cui la serie delle misure di posizione della macchia bianca, incominciata il 25 febbraio, non fu prolungata oltre il 16 di aprile: nel quale spazio di tempo il pericolo di un influsso sistematico della fase non fu a temere, siccome risulta dalla tabella dei valori di $\varkappa$ esposti qui sopra (§ 697). Ciascuna misura risulta per lo più dal medio di due o tre estimazioni; il numero delle misure è 104, e nessuna di esse è stata esclusa dal calcolo dei risultati. Esse stanno registrate nelle quattro prime colonne della Tavola seguente, dove P indica l' angolo di posizione dato direttamente dal micrometro nel momento in cui al centro del disco passava quel meridiano di Marte, che è definito dalla longitudine aerografica ω. — L' ultima colonna della Tavola dà alcune indicazioni che possono servire a stimare il maggiore o minor grado di fiducia che l' osservatore ha attribuito alle singole misure; le quali però tutte furono introdotte nei calcoli col medesimo peso.

699. La discussione di queste osservazioni e la deduzione dei risultati finali è stata fatta con regole identiche a quelle già praticate nelle opposizioni antecedenti (§§ 440 e 581). Essendo P la posizione osservata della macchia bianca; p la posizione dell' asse quale risulta dall' Effemeride del sig. Marth ([1]) per calcolo fondato sui nostri elementi del § 290; dp la correzione incognita (supposta costante per tutto il tempo delle osservazioni) da apportarsi alla quantità p; θ la longitudine areografica del punto centrale della macchia bianca (supposta rotonda), contata al solito modo; λ la distanza di detto punto centrale dal polo boreale di Marte, in gradi del circolo massimo del pianeta; ω finalmente la longitudine areografica del punto della superficie, che occupava il centro del disco al momento della misura; si ha la relazione

(a) $$P - p = dp - \lambda \cos\theta . \sin\omega + \lambda \sin\theta . \cos\omega$$

([1]) *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* vol. XLVI, pp. 29-32.

fra le incognite dp, $\lambda \cos \theta$, $\lambda \sin \theta$ e le quantità note P, p, ω. Ogni osservazione di P dà un' equazione per determinare le predette incognite. Il quadro seguente, analogo a quelli del § 440 e del § 581, dà nella terza colonna il valore di ω per l'istante di ciascuna osservazione, nella quarta il valore osservato di P, nella quinta quello di $P - p$, cioè del 1° membro delle equazioni di cui (a) è il tipo. La penultima colonna dà gli errori che restano nelle equazioni stesse, quando vi si surroghino i valori più probabili (da riferirsi qui appresso) delle tre incognite dp, $\lambda \cos \theta$, $\lambda \sin \theta$.

QUADRO *contenente le osservazioni di posizione della macchia polare boreale fatte nel 1886, e gli elementi pel calcolo di ciascuna.*

Num.	Data: 1886		ω	P	$P-p$	ε	Annotazioni
			°	°	°	°	
1	Febbraio	25	4,98	15,56	— 5,14	— 1,94	difficile: trema.
2	—	25	12,76	15,51	— 5,19	— 1,95	spicca poco sul fondo giallo.
3	—	25	23,94	16,36	— 4,34	— 1,07	molto agitata.
4	Febbraio	26	350,92	17,74	— 2,78	+ 0,28	immagine bella.
5	—	26	356,27	17,76	— 2,76	+ 0,35	bellissima.
6	—	26	1,86	19,16	— 1,36	+ 1,80	bene veduta.
7	Febbraio	27	333,08	17,73	— 2,59	+ 0,19	ondulante, non male però.
8	—	27	346,58	18,70	— 1,62	+ 1,38	oscilla.
9	—	27	46,61	17,75	— 2,57	+ 0,60	immagine mediocre.
10	—	27	52,93	15,50	— 4,82	— 1,70	bene.
11	Febbraio	28	330,83	17,16	— 2,96	— 0,22	immagine cattiva.
12	—	28	338,61	18,36	— 1,76	+ 1,12	bene.
13	Marzo	4	295,85	17,16	— 2,12	— 0,10	agitatissima.
14	Marzo	7	267,63	14,09	— 3,49	— 2,02	molto difficile.
15	—	7	274,67	13,89	— 4,69	— 3,14	meglio.
16	—	7	301,65	14,61	— 3,97	— 1,82	molto difficile.
17	Marzo	8	255,32	15,60	— 2,80	— 1,62	così così.
18	—	8	260,42	18,25	— 0,15	+ 1,13	si vede male.
19	Marzo	9	226,93	17,03	— 1,11	— 0,28	grande ebollizione.
20	—	9	233,25	16,95	— 1,19	— 0,31	abbastanza bene.
21	—	9	243,70	19,63	+ 0,49	+ 1,50	difficile.
22	Marzo	10	219,73	15,80	— 2,15	— 1,39	bolle, si deforma.
23	—	10	227,02	16,15	— 1,80	— 0,97	abbastanza bene.
24	—	10	239,17	15,65	— 2,30	— 1,36	si vede bene.
25	Marzo	11	209,82	18,37	+ 0,67	+ 1,40	bene.
26	—	11	216,87	18,47	+ 0,77	+ 1,53	bene.
27	—	11	226,59	17,80	+ 0,10	+ 0,93	ottimamente.
28	—	11	239,72	17,60	— 0,10	+ 0,86	bene.
29	—	11	248,22	17,20	— 0,50	+ 0,57	bene.
30	Marzo	12	200,65	18,15	+ 0,63	+ 1,37	abbastanza bene.

Num.	Data: 1886		ω	P	P — p	ε	Annotazioni
			°	°	°	°	
31	Marzo	12	208,43	17,60	+ 0,08	+ 0,82	abbastanza bene.
32	—	12	245,85	18,10	+ 0,58	+ 1,62	bene.
33	Marzo	13	190,27	16,90	— 0,36	+ 0,42	non tanto bene.
34	Marzo	16	155,17	18,07	+ 1,41	+ 2,59	bene a quanto sembra.
35	—	16	161,24	16,50	— 0,16	+ 0,92	bene.
36	—	16	170,72	17,65	+ 0,99	+ 1,94	bene.
37	—	16	178,50	16,00	— 0,66	+ 0,21	mediocremente.
38	—	16	187,49	15,05	— 1,61	— 0,81	abbastanza bene.
39	Marzo	17	147,19	16,75	+ 0,29	+ 1,61	bene.
40	—	17	155,94	13,85	— 2,61	— 1,44	ottimamente.
41	—	17	162,98	15,60	— 0,86	+ 0,20	ottimamente.
42	—	17	177,08	15,35	— 1,11	— 0,23	ottimamente.
43	—	17	187,77	15,87	— 0,59	+ 0,19	un po' diffusa.
44	Marzo	18	137,69	13,10	— 3,14	— 1,63	difficile, piccolissima.
45	—	18	141,57	13,45	— 2,79	— 1,37	abbastanza bene.
46	—	18	149,10	15,40	— 0,84	+ 0,45	bene.
47	—	18	157,86	15,53	— 0,71	+ 0,42	bellissima, ellittica.
48	Marzo	19	129,46	14,15	— 1,89	— 0,21	difficile molto.
49	—	19	136,26	15,85	— 0,19	+ 1,35	bene.
50	—	19	145,01	15,30	— 0,74	+ 0,63	abbastanza bene.
51	Marzo	20	121,48	13,95	— 1,89	— 0,04	mediocre.
52	—	20	125,37	11,70	— 4,14	— 2,36	aria poco buona.
53	—	20	129,74	14,05	— 1,79	— 0,11	bene.
54	—	20	139,95	14,25	— 1,59	— 0,13	mediocre.
55	—	20	151,61	13,85	— 1,99	— 0,75	bene.
56	Marzo	21	112,71	11,75	— 3,90	— 1,85	abbastanza bene.
57	—	21	120,00	13,05	— 2,60	— 0,70	bene.
58	—	21	129,72	11,50	— 4,15	— 2,47	aria cattiva.
59	Marzo	22	104,94	13,05	— 2,41	— 0,19	con fatica.
60	—	22	110,53	13,30	— 2,16	— 0,07	sempre difficile.
61	Marzo	23	148,42	13,90	— 1,38	— 1,07	ottimamente.
62	—	23	159,36	12,95	— 2,33	— 1,21	bene.
63	Marzo	25	122,64	12,70	— 2,25	— 0,44	quieta ma confusa.
64	—	25	131,87	12,65	— 2,30	— 0,69	facile.
65	—	25	147,17	13,80	— 1,15	+ 0,17	bene.
66	Marzo	26	69,49	13,40	— 1,37	+ 1,54	ottimamente.
67	—	26	72,89	12,65	— 2,12	+ 0,73	ottimamente.
68	—	26	86,50	13,35	— 1,42	+ 1,20	nebbia.
69	Marzo	27	61,18	11,70	— 2,91	— 0,11	piccolissima.
70	—	27	63,85	11,80	— 2,81	+ 0,19	indubitata.
71	—	27	71,87	13,20	— 1,41	+ 1,44	ottimamente.
72	—	27	83,78	12,30	— 2,31	+ 0,34	ottimamente.
73	—	27	88,40	13,10	— 1,51	+ 1,06	ottimamente.

Num.	Data: 1886		ω	P	P — p	ε	Annotazioni
74	Marzo	27	101°,04	12°,35	— 2°,26	+ 0°,05	aria mediocre.
75	Marzo	28	54,53	12,45	— 2,01	+ 1,09	abbastanza bene.
76	—	28	63,77	12,35	— 2,11	— 0,89	abbastanza bene.
77	—	28	78,81	13,40	— 1,06	+ 1,69	aria già cattiva.
78	Marzo	30	35,86	10,98	— 3,20	+ 1,25	così così.
79	—	30	41,45	10,80	— 3,38	— 0,16	bene.
80	—	30	48,25	11,10	— 3,08	+ 0,09	bene.
81	Marzo	31	26,25	10,55	— 3,51	— 0,24	difficile.
82	—	31	33,78	9,65	— 4,41	— 1,16	molto difficile.
83	Aprile	1	15,65	11,00	— 2,92	+ 0,33	ottimamente.
84	—	1	23,67	11,15	— 2,77	+ 0,50	ottimamente.
85	—	1	30,23	11,25	— 2,67	+ 0,60	ottimamente.
86	—	1	41,86	10,60	— 3,32	— 0,11	ottimamente.
87	—	1	57,20	10,85	— 3,07	0,00	meno buona.
88	Aprile	2	5,81	9,70	— 4,10	— 0,91	abbastanza bene.
89	—	2	12,37	10,00	— 3,80	— 0,56	abbastanza bene.
90	—	2	19,42	9,95	— 3,85	— 0,58	affatto bene.
91	—	2	37,89	10,55	— 3,24	— 0,01	ottimamente.
92	—	2	44,94	9,70	— 3,20	— 0,90	ottimamente.
93	—	2	53,44	9,90	— 3,12	— 0,78	ottimamente.
94	Aprile	5	340,96	9,55	— 2,91	— 1,03	piccola e difficile.
95	—	5	344,60	10,80	— 2,98	+ 0,29	bene.
96	—	5	354,33	12,90	— 3,09	+ 2,50	eccellente.
97	—	5	7,69	11,50	— 3,22	+ 1,23	ottima.
98	—	5	17,65	10,35	— 3,26	+ 0,12	ottimamente.
99	Aprile	7	327,90	11,10	— 2,69	+ 0,47	un po' difficile.
100	—	7	333,73	10,87	— 2,80	— 0,35	abbastanza bene.
101	—	7	342,96	11,80	— 2,94	+ 1,42	così così.
102	Aprile	14	265,16	9,70	— 1,36	— 1.92	difficile.
103	—	14	272,94	11,47	— 1,52	+ 0,01	difficile, aria pessima.
104	Aprile	16	293,90	9,90	— 1,98	— 1,07	immagine cattiva.

700. Le 104 equazioni del tipo (a), trattate col solito metodo nella supposizione che tutte siano di ugual peso, dànno le equazioni normali

$$-217^\circ,55 = +104,00 \cdot dp - 15,03 \cdot \lambda \cos\theta + 0,87 \cdot \lambda \sin\theta :$$
$$+57^\circ,62 = -15,03\ dp + 46,64 \cdot \lambda \cos\theta - 2,07 \cdot \lambda \sin\theta :$$
$$-68^\circ,70 = +0,87\ dp - 2,07 \cdot \lambda \cos\theta + 57,29 \cdot \lambda \sin\theta :$$

e da esse si traggono per le incognite i seguenti valori:

$$dp = -2^\circ,004 \pm 0^\circ,079 \ \ldots \ \text{peso } 99,16 :$$
$$\lambda \cos\theta = +0^\circ,538 \pm 0^\circ,117 \ \ldots \ \text{peso } 44,40 :$$
$$\lambda \sin\theta = -1^\circ,149 \pm 0^\circ,096 \ \ldots \ \text{peso } 65,74 :$$

alle due ultime possiamo surrogare anche queste altre:

$$\lambda = 1^\circ,269 \pm 0^\circ,101 \qquad \theta = 295^\circ,10 \pm 5^\circ,72 .$$

L'error probabile di una delle osservazioni impiegate risulta $\pm 0^\circ,782$, uguale quindi a quello delle osservazioni del 1877 e molto minore dei valori $\pm 1^\circ,24$ $\pm 1^\circ,38$ e $\pm 1^\circ,29$ trovati rispettivamente negli anni 1879, 1882 e 1884. Questa maggior sicurezza delle misure, unita al loro numero considerevole, spiega la piccolezza degli errori probabili delle incognite dp, λ, θ. — Anche la serie degli errori residui ε nella penultima colonna del quadro procede in modo soddisfacente, sebbene i cambiamenti di segno in essa non sian tanto frequenti, quanto si potrebbe desiderare.

701. Malgrado la sua piccolezza, l'eccentricità λ della calotta polare sembra emergere dall'incertezza delle osservazioni con discreta evidenza. Essa è pure indicata dalle osservazioni contemporaneamente eseguite dal dott. Lohse a Potsdam [1], il quale dall'insieme di tutte le sue misure dedurrebbe

$$\lambda = 1^\circ,34 \pm 0^\circ,45 \qquad \theta = 285^\circ,0 \pm 16^\circ,7 ;$$

risultati che si accordano coi precedenti più di quanto si può aspettare dagli errrori probabili assegnati. — È degno di nota che nel 1884 l'eccentricità della macchia polare boreale ebbe luogo quasi nella medesima direzione ($\lambda = 2^\circ,69$ $\theta = 323^\circ,5$), e che qualche indizio del medesimo fatto già si era avuto nel 1882. Veggasi quanto sta esposto su tale argomento nei §§ 582-583.

702. L'incognita $dp = -2^\circ,00 \pm 0^\circ,08$ ci dà la correzione che, stando alle presenti osservazioni, dovrebbe subire l'Effemeride del sig. Marth, e dà anche ad un tempo l'effetto degli errori dei nostri elementi del § 290, su cui tale Effemeride è fondata. Sembra dunque confermarsi quanto già avevano indicato le osservazioni del 1884, che tali elementi abbiano bisogno di una revisione (§ 584). Applicando dp al valore di p dato dall'Effemeride pel giorno 20,0 di marzo 1886, che è $p = 15^\circ,89$, si ottiene il valore dell'angolo stesso quale risulta dal complesso delle osservazioni di questa opposizione

$$p = 13^\circ,89 \quad 20,00 \text{ marzo } 1886 \text{ t. m. Greenwich,}$$

pel momento, in cui le coordinate apparenti geocentriche di Marte erano

$$\text{A. R.} = 163^\circ,55',1 \qquad \text{D} = +11^\circ,2',5 .$$

Tali numeri determinano in cielo un circolo massimo, sul quale dovranno trovarsi (salvo la discordanza proveniente dagli errori di osservazione) le proiezioni areocentriche dei poli di Marte sulla sfera celeste. È la quinta determinazione di questo genere da noi fatta, e potrà servire con le altre ad una determinazione più esatta della direzione di Marte nello spazio.

[1] *Publ. Potsd.*, vol. VIII, p. 121-122. Questo, che noi riferiamo, è il risultato ottenuto dal dott. Lohse dalla prima soluzione ch'ei dà delle sue equazioni. Un altro risultato ($\lambda = 0^\circ,16$ $\theta = 244^\circ,4$) egli deduce escludendo undici misure da lui fatte nell'intervallo 23 marzo - 7 aprile; fondasi però sopra ipotesi inammissibili, come sarà dimostrato più sotto, § 783.

703. Nella sua Memoria qui sopra citata il dott. Lohse dal complesso di tutte le sue osservazioni fatte in Postdam durante l'anno 1886 deduce la correzione dell'Effemeride di Marth, $dp = -0°{,}17 \pm 0°{,}29$, cioè una correzione praticamente nulla. La discordanza col nostro risultato importa quasi due gradi ed è molto superiore a quanto si può aspettare dagli errori probabili assegnati alle due determinazioni. La causa sta probabilmente negli errori sistematici personali, da cui non si possono supporre immuni le misure di questo genere, come in generale nessuna misura astronomica. Per quanto concerne me individualmente, un indizio della mia tendenza a misurare gli angoli di posizione più piccoli del vero risulta abbastanza chiaramente dall'influenza che sul segno e sulla grandezza degli errori residui ε del quadro precedente mostrano le circostanze atmosferiche più o meno buone in cui furono eseguite. Per convincermi di questo io ho raccolto quegli errori ε in cinque classi secondo il grado di fiducia che per ciascuna osservazione è attestato dalle annotazioni registrate nell'ultima colonna; e per ciascuna classe ho fatto la media degli errori corrispondenti. Ecco il risultato:

	Valore medio di ε
24 osservazioni *ottime*	+ 0°,43
24 oss. segnate colla nota *bene*	+ 0 46
14 oss. segnate *abbastanza bene*	— 0 27
10 segnate *così così* o *mediocri*	— 0 24
26 segnate come *cattive*, *difficili* ecc.	— 0 61

Sei osservazioni non si poterono classificare, e sono quelle segnate nel quadro coi numeri 2, 15, 43, 63, 68, 69. Dalle altre 98 risulta manifestamente nell'osservatore una tendenza a diminuire l'angolo di posizione tanto più spiccata, quanto più lo stato dell'immagine si allontana dalla perfezione assoluta. Per questo solo fatto adunque dovremmo aspettarci che il valore sopra assegnato per dp sia (algebricamente) inferiore al vero di circa mezzo grado, anche quando volessimo supporre, che le osservazioni fatte in stato di ottima atmosfera siano intieramente libere da ogni errore sistematico. Ma chi può affermare questo? Egli è anzi da credere, che le agitazioni dell'immagine non abbiano altro effetto, che quello di esagerare una tendenza fisiologica già esistente nell'osservatore anche quando si trova di fronte ad un'immagine perfetta. Pertanto non farei alcuna meraviglia, quando da ulteriori ricerche intorno all'asse di Marte risultasse che il valore di $dp = -2°{,}00$, ottenuto qui sopra come correzione dell'Effemeride, per metà od anche per una parte maggiore della metà debba considerarsi come il semplice effetto di una causa fisiologica inerente alla persona dell'osservatore.

CAPITOLO II.

Osservazioni sull' aspetto presentato dalle varie regioni del pianeta durante l' opposizione 1886.

Sezione I.

Generalità.

704. I giorni di osservazione furono 64, nell' intervallo dal 3 gennaio al 5 giugno. Di essi circa 20 possono considerarsi come di atmosfera sufficientemente buona per osservazioni difficili, e trovansi segnati con asterisco nella Tabella seguente. Nella quale, accanto all' indicazione dei giorni, in cui è stato possibile esaminare il pianeta con qualche utilità, sta scritto per ciascun giorno il valore di ω (longitudine areografica del centro del disco) che ebbe luogo al principio e alla fine delle osservazioni; il diametro apparente del disco; la qualità dell' immagine. Quest' ultima è segnata con I quando fu ottima, con IV quando arrivava a tal punto di agitazione o di diffusione da imporre la cessazione d' ogni lavoro. Sono pure segnate con divisioni la data dell' opposizione (6 marzo) e quella in cui all' uso del refrattore Merz di 8 pollici finora adoperato si sostituì quello del refrattore Merz-Repsold di 18 pollici (1° maggio).

Data: 1886		Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell' immag.
Genn.	3	175°-180°	9″,0	III
Febbr.	2	251-261	11,8	IV
—	25	353-13	13,7	III
—	26	346-2	13,7	II-III: fosco
—	27	333-53	13,8	II-III: fosco
—	28	331-339	13,8	III
Marzo	4	289-296	13,9	IV
Opposizione il 6 marzo.				
Marzo	7	265-308	13,9	III-IV
—	8	255-263	14,0	III-IV
—	9	225-244	14,0	III IV
—	10	219-241	13,9	III-II
—	11	208-251	13,9	II*
—	12	200-209	13,9	III
—	12	245-248	13,9	III
—	13	189-191	13,9	III-IV
Marzo	16	153°-188°	13″,8	III
—	17	147-188	13,8	II *
—	18	135-158	13,8	II *
—	19	127-147	13,7	II *
—	20	121-155	13,7	II *
—	21	112-130	13,6	III
—	22	102-111	13,6	III-IV
—	23	145-160	13,5	III
—	25	122-147	13,4	III-IV
—	26	69-98	13,3	II-III
—	27	58-112	13,2	II-I *
—	28	53 79	13,2	II-III *
—	30	34-49	13,0	II *
—	31	23-34	12,9	III
Aprile	1	14-57	12,9	II *
—	2	5-54	12,8	II *
—	3	355-36	12,7	II (18 poll.) *

Data: 1886	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell' immag.	Data: 1886	Limiti di ω	Diam. appar.	Stato dell' immag.
	° °	″			° °	″	
Aprile 5	339-18	12,5	I *	Maggio 9	27-67	9,6	II-III
— 7	319-29	12,3	III	— 11	9-30	9,5	II *
— 14	261-273	11,7	IV	— 12	2-6	9,4	IV (1)
— 16	267-294	11,5	IV	— 15	331-336	9,2	IV
— 21	200-219	11,1	III	— 16	321-339	9,1	IV
— 24	170-183	10,8	II *	— 17	313-341	9,0	III
— 26	158-168	10,6	III	— 18	305-337	8,9	II *
— 27	137-139	10,6	II	— 19	309-315	8,9	III
— 28	135-138	10,5	III	— 20	300-319	8,8	III
Cominciano le osservazioni col 18 pollici.				— 21	290-294	8,8	II
				— 22	281-300	8,7	II-I *
Maggio 1	105-119	10,2	III	— 23	269-285	8,6	II-I *
— 2	98-105	10,1	IV	— 24	262-265	8,6	IV
— 5	66-82	9,9	IV	— 25	252-267	8,5	II *
— 6	73-75	9,8	IV	— 27	232-239	8,4	III-IV
— 7	47-79	9,7	III	Giugno 1	183-226	8,1	II-I *
— 8	39-62	9,6	III	— 5	145-148	7,9	III

705. Si noterà che delle 64 serate d' osservazione soltanto 7 cadono prima dell' opposizione, nessuna delle quali è distinta come buona. Questa disparità fra il periodo che precede l' opposizione, e quello che lo segue, ha avuto luogo più o meno anche nelle osservazioni degli anni passati ed è una conseguenza inevitabile delle peculiarità del nostro clima. Nei pochi giorni in cui lo stato dell' atmosfera permette di far difficili osservazioni, il tempo buono per osservare non dura che poche ore, e suole cominciare un po' prima del tramonto del Sole. L' intervallo di quiete dura allora per tutto il crepuscolo vespertino, e prolungasi qualche volta entro la notte fino alla durata totale di tre o quattro ore, rarissimamente più di cinque. A notte inoltrata non accade quasi mai di poter fare osservazioni con ingrandimenti di qualche conto: l' agitazione e la deformità dell' immagine durano fino al giorno. — Ora nel tempo che precede l' opposizione Marte si leva sull' orizzonte sempre più tardi del tramonto del Sole (non tengo conto della piccola differenza che proviene dalla latitudine del pianeta e dalla refrazione astronomica), e tanto più tardi quanto più l' opposizione è ancor lontana. Quindi potrà raggiungere l' altezza di 20° a 25° (strettamente necessaria per ottenere una visione sufficiente) soltanto parecchie ore dopo il tramonto del Sole, cioè quando l' intervallo favorevole alle buone osservazioni è già trascorso tutto od in parte. Dopo l' opposizione invece, al tramontar del Sole, Marte è già più o meno alto sull' orizzonte e tanto più vicino al meridiano, quanto maggior tempo è passato dall' opposizione; onde tutte le ore dell' intervallo favorevole diventan dispo-

(1) In questo giorno 12 maggio a 6^h 14^m di tempo medio ho creduto di vedere la parte oscura del disco *più nera* che il fondo del cielo. Il Sole tramontò a 7^h 17^m.

nibili; soltanto il progressivo allontanarsi del pianeta dalla Terra finisce per rendere le osservazioni troppo difficili o di poca utilità ed obbliga a mettervi un termine, e questo ha luogo generalmente dopo la quadratura. — Tutte queste circostanze oppongono alle osservazioni prima dell'opposizione ostacoli tanto maggiori, quanto più bassa è la declinazione. Quando l'opposizione ha luogo nei segni più australi dello zodiaco, esse possono giungere al punto di rendere affatto impossibile uno studio alquanto accurato del pianeta.

706. Nei tre mesi di marzo, aprile e maggio, che permisero di fare, anche con qualche successo, le ricerche di maggior difficoltà, ho esplorato con tutta la cura possibile le alte latitudini dell'emisfero boreale. In quell'intervallo il polo nord si mantenne sempre dentro dell'emisfero visibile a distanza dal terminatore variabile fra 22° e 25°; e la macchia polare, ridotta a men che 10° di ampiezza, fu di assai piccolo impedimento. Per questa ragione si pubblicano questa volta alcuni disegni incompleti sì, ma importanti, che comprendono soltanto la parte boreale del disco. Combinando nel modo più plausibile tutto quello che si è potuto notare e disegnare, si riuscì a riempire il vuoto che prima occupava la parte inferiore della nostra carta areografica. Ma la proiezione di Mercator finora usata, oltre all'essere incompleta ed estesa solo fino al 70° parallelo, ha il grave difetto di esser conforme solo nei minuti particolari, non nella generale disposizione e proporzione delle parti; e non può dare che una idea molto imperfetta delle regioni immediatamente circostanti al polo. Perciò si è creduto necessario di sostituirvi una carta in proiezione polare. La quale non occorre dire che è imperfettissima, prima per la difficoltà di veder bene cose presentate in tanto scorcio con un diametro apparente sempre minore di 14″; secondo perchè in quella parte occorrono mutazioni d'aspetto più radicali e più gravi che in qualsivoglia altra parte del pianeta. Così che non si può esser sicuri che le descrizioni delle diverse regioni corrispondano tutte ad un'epoca identica. Le stesse gravi mutazioni io spero che condurranno col tempo a formar plausibili ipotesi circa la natura dei fenomeni di Marte; nondimeno per adesso offrono anche un altro inconveniente, quello di render impossibile di proporre subito una nomenclatura razionale. Onde per molti oggetti aspetteremo a proporre il nome quando osservazioni ripetute nelle prossime opposizioni abbiano permesso di formare un giudizio sicuro e stabile della loro natura.

Sezione II.

Dalla Gran Sirte all'Indo.

707. La vasta regione qui considerata comprende quasi esattamente un ottante sferico del globo di Marte fra l'equatore e i meridiani 290°-20°. Essa è attraversata tutta intiera dal sud al nord dalla gran linea Eufrate-Arnon-Kison, la quale segue quasi esattamente il meridiano, solo deviando leggermente verso levante nella parte più vicina al polo, in modo da riuscir press'a poco tangente all'80° parallelo. Sotto le latitudini boreali di 40° e di 60° la detta linea si allarga nei due laghi Ismenio e Aretusa, i quali come due stelle formano centro di convergenza a varii canali,

che da quelli si espandono in varie direzioni. Tutta questa distribuzione presenta non so che di semplice e di simmetrico, che non può certamente esser opera del caso. — Nell'opposizione del 1886 le osservazioni di questa parte furono poco favorite dal tempo nel febbraio e nel maggio; ma nei giorni 1-5 aprile una serie di buone giornate permise di descrivere le particolarità in modo abbastanza completo e soddisfacente. Si osservò allora un fatto generale, che sembra di qualche importanza; cioè che tutti i canali della regione collocata fra l'Equatore e il parallelo del Lago Ismenio erano bensì visibili, ma generalmente non molto appariscenti; laddove a partir dal Lago Ismenio e dal suo parallelo sino al polo le linee o striscie erano più nere e più evidenti, quantunque di nessuna si possa dire che fosse proprio ben terminata e regolarmente descritta. Altra cosa degna di nota fu questa, che nessuno dei canali compresi nella regione intiera qui considerata presentò questa volta il minimo sospetto di geminazione, ad eccezione dell'Eufrate e del Phison.

708. L'Eufrate, che molto confusamente era stato intraveduto il 27 e il 28 di febbraio, fu osservato bene nei giorni 2, 3, 5 aprile; nulla parve presentare di notabile fuori della sua presenza come striscia visibile e semplice; come linea semplice è stato disegnato nelle figure III e IV. Dopo di allora non fu più notato che una volta sola il 18 maggio: « visto benissimo: era evidente e largo ». Il diametro apparente del disco essendo allora 9″, si potrebbe inferirne che l'Eufrate fosse geminato in quel giorno, e che apparisse così largo per la confusione dei due tratti in uno. Tale induzione è confermata dal fatto, che il prof. Perrotin, osservando a Nizza con un telescopio di 38 centimetri, vide l'Eufrate doppio prima nel dì 15 di aprile, poi anche nei giorni 19 e 21 maggio [1]. Perrotin osservò, che le due linee dell'Eufrate erano parallele fra loro, in conformità di quanto io aveva veduto nel 1884 (§ 593) e diversamente da quanto aveva avuto luógo nel 1882. — Tutte le volte che l'Eufrate fu da me veduto come linea semplice, mostrava il suo tratto destro od occidentale, cioè quello che arriva direttamente fino al Golfo Sabeo.

709. Rispetto al Phison le cose si presentarono quasi esattamente allo stesso modo, che per l'Eufrate. Osservato in circostanze non troppo buone il 27-28 febbraio, fu delineato distintamente come linea semplice nel disegno del 5 aprile, figura IV, e notato anche il 7 aprile. Tornata in vista questa regione, fu veduto il Phison nei giorni 16, 17, 18, 19, 20 maggio; il 18 era, al par dell'Eufrate, « benissimo visibile, evidente e largo ». Anche qui si presenta la congettura di una possibile geminazione; e anche questa volta la congettura è confermata dal prof. Perrotin con sue osservazioni fatte a Nizza nei giorni 15 aprile e 19-21 maggio. Secondo il Perrotin la linea più occidentale (destra) del Phison era più sottile dell'altra; e forse questo è il motivo per cui a Milano (dove manifestamente le condizioni d'osservazione furono molto men buone) nei giorni 16, 17, 19, 20 maggio in cui fu notata la presenza del Phison, nulla fu veduto o almeno notato che accennasse ad una geminazione, ma soltanto ciò avvenne il giorno 18. Tutte le volte che il Phison fu notato come linea semplice mostrava il suo tratto orientale o sinistro.

[1] Osservazioni riferite da Flammarion nella sua grande ed utilissima opera: *La planète Mars*, pp. 392-393.

710. Il Tifonio fu veduto una volta sola il 5 aprile sotto l'aspetto che indica il disegno di quel giorno, figura IV. Era certamente la più australe delle due linee osservate nel 1882. In quel giorno il Tifonio si continuava senza interruzione nel tratto australe dell'Oronte, del quale inoltre fu osservato più volte il tratto boreale, sotto forma di elegante curva connessa al primo corno del Golfo Sabeo. Ma l'Oronte era molto più visibile del Tifonio. Fu notato la prima volta il 1° aprile, benchè in iscorcio e lungi dal meridiano centrale, essendo in quel momento già $\omega = 25°$. Poi il 3 e il 5 aprile e da ultimo l'11 maggio a $6^h\ 24^m$ di tempo medio, essendo ancora molto alto sull'orizzonte il Sole, che tramontò a $7^h\ 16^m$.

711. Speciale difficoltà offerse quest'anno lo sdoppiamento dei due corni del Golfo Sabeo (*Dawes' forked Bay*); di ciò ebbi la più viva impressione la sera del 1° aprile, in cui tentai indarno tale sdoppiamento sotto $\omega = 20°$ e sotto $\omega = 30°$ circa in momenti, in cui l'immagine era quasi di prima qualità. Come poi risultò da altre osservazioni fatte in momenti anche migliori, i due corni eran benissimo terminati nei loro lati esterni (non contigui al vertice d'Aryn), ma molto male definiti nei lati interni, che fiancheggiano e costituiscono il detto vertice. Questa punta era ottusa e mal definita e i corni anch'essi brevi e poco acuti, molto diversi dalla figura che ne ho dato nel 1879 (Memoria II, Tavola VI). Ciò nullameno nelle giornate 2, 3 e 5 aprile non fu difficile convincersi che perdurava la loro divisione, e si potè anche distinguere con precisione i loro vertici, e il principio dell'Hiddekel e del Gehon Il Gehon fu parecchie volte veduto e disegnato nell'intervallo dal 25 febbraio all'11 maggio; e sempre segnato come debole e difficile. Si accertò che la sua foce era nel Golfo Acidalio al nord del Ponte d'Achille, non nel Lago Niliaco, dove qualche volta parve metter capo negli anni passati. — Invece l'Hiddekel fu descritto poche volte (1, 2, 3, 5 aprile), ma così manifesto, come prima non era mai stato veduto; sempre conservava il suo andamento degli anni passati. — Nei giorni 5 e 7 aprile fu pure veduto l'Astabora, come linea semplice e di non molta apparenza. Metteva capo al lato sinistro (orientale) dell'Ismenio e non, come nel 1884 avveniva, al lato destro (occidentale). Dell'Anubi, veduto nel 1882, non trovo fatta alcuna menzione questa volta.

712. Non mancò mai il Lago Ismenio, e non ebbe mai altro aspetto che di una grossa macchia nera confusa. Della sua forma non trovo altro, se non che il 1° aprile era piuttosto oblungo nel senso del meridiano, e che si estendeva in questa direzione per circa 10°; nel senso trasversale non molto meno. — Anche il Lago Aretusa era grosso ed oscuro e sfumato ne' contorni: rassomigliava all'Ismenio, ma in dimensioni alquanto minori. Ambidue erano oggetti molto prominenti sul disco, e con me li riconobbe facilmente in quel medesimo giorno il prof. Celoria che meco stava osservando. Tali pure rimasero nei giorni consecutivi fino al 7 di aprile; ma sembra che il 18 maggio fossero relativamente meno cospicui, per quanto è stato possibile giudicare in tanta distanza dal pianeta. — L'Arnon, che li congiunge, non aveva più la forma di canale definito vista nel 1884 (§ 595), ma piuttosto sembrava fra i due laghi uno stretto; una striscia larga e sfumata ancor essa. In tale aspetto apparve dal 1° aprile all'11 maggio. Il 18 maggio non fu più possibile di vederlo, malgrado che fossero ancora abbastanza cospicui i due laghi a cui fa capo.

713. Il 1° aprile per la prima volta fu notata l' esistenza del Kison, il quale prolungava l' Eufrate-Arnon al di là del Lago Aretusa sin presso alla neve polare boreale. Non andava dritto al centro di questa, nè verso il polo; ma deviando passava a radere il contorno di quella dalla parte sinistra, come indica il disegno del 5 aprile, figura IV. — Si notarono per Kison esattamente le medesime vicende dell' Arnon; visibile, nero, grosso, irregolare e sfumato dal 1° aprile all' 11 maggio, non fu più veduto il 18 di quest' ultimo mese. Là dove toccava la neve polare, e si confondeva colla zona perimetrale oscura di questa, il Kison formava una specie di nodo oscuro, forse un terzo lago analogo all' Ismenio ed all' Aretusa. Le opposizioni avvenire mostreranno se si tratta qui di una circostanza transitoria o di una formazione permanente. La sua longitudine rispetto al centro della macchia polare era di circa 300°; da esso correva verso destra lungo il parallelo di circa 80° una zona oscura, che metteva capo al Lago Iperboreo verso la longitudine di 30° a un dipresso. In alcuni disegni questa zona è figurata come aderente alla neve polare, in altri come distaccata da essa per mezzo di una sottile striscia gialla (30 marzo, 1 e 5 aprile). Forse abbiamo qui un nuovo canale trasversale vicinissimo al polo; ma prima di pronunciarne l' esistenza attenderemo il risultato delle osservazioni avvenire. In ogni caso è certo, che qui non esiste mare fra le longitudini 250° e 30°; l' area continentale si estende certamente fino a pochi gradi dal polo, se non forse fino al polo medesimo.

714. Il Protonilo e il Deuteronilo furono osservati bene nei primi giorni d' aprile, ed ancora in maggio fino al 18. L' uno pareva sul prolungamento dell' altro, e quanto al Deuteronilo risulta dai disegni e dalle note prese, che formava quasi un prolungamento della curva dell' Oxo, senza apparente discontinuità. Ciò che dava motivo a distinguere l' uno dall' altro era la biforcazione col Giordano nel punto dove l' anno 1884 fu vista la macchia oscura chiamata Fonte Dirceo (§ 605), invisibile adesso, o visibile soltanto come luogo della biforcazione suddetta. — L' Oxo fu veduto bene dal 31 marzo al 5 aprile; il suo corso con quello del Deuteronilo sembrava formare una bella curva continua dal Golfo delle Perle al Lago Ismenio, anzi che un poligono come nel 1884. Certamente poi, quantunque fosse visibile almeno quanto l' Indo, non occupava più nel reticolato dei canali circostanti quella appariscenza preminente che fu osservata nel 1884. L' ultima osservazione dell' Oxo fu addì 11 maggio. — Il Giordano fu osservabile senza difficoltà dal 26 febbraio fino all' 11 maggio, niente mutato da ciò che era nel 1884. Aveva col Gehon la foce comune nel Golfo Acidalio, così almeno sempre mi parve, sebbene fosse cosa difficile a giudicare, attesa la poca visibilità del Gehon.

715. La stella di canali che fanno capo al Lago Aretusa si potè descrivere molto meglio che nella passata opposizione. Veramente lo Xenio non era più tanto evidente come allora fu, anzi soltanto due volte fu intraveduto il 2 e il 3 aprile, e notato con segni di dubbio; nel disegno del 5 aprile fatto in ottime circostanze (figura IV) esso manca intieramente. Ma Callirrhoe si manifestò con un grado straordinario di evidenza, che nei primi giorni di aprile superò quello di tutti gli altri canali circonvicini; era visibile ancora il 18 maggio. Non è questo il solo canale, che metta in comunicazione il Lago Aretusa col Mar Boreale; un altro ve ne ha, che segue quasi il parallelo, di cui già s' era avuto qualche incerto indizio nel 1884

(§ 599), e che anche nel 1886 si trova descritto soltanto una volta nel disegno già citato del 5 aprile. Era all' ultimo limite della visibilità e sulla carta l' ho designato col nome di Cedron.

716. Il medesimo disegno del 5 aprile porta un altro canale che dal Lago Aretusa procede in direzione di Nord-Est. Non essendo stato veduto altre volte, ne attenderemo la conferma da future osservazioni. Invece molto bene veduto e almeno sei volte dal 1° aprile al 23 maggio fu osservato il Pierio, già intravveduto nel 1881 come ramo della Boreosirte (§ 539) e sotto incerta e nebulosa forma descritto nel 1884 (§ 674). Questa volta era un canale bene tracciato, benchè non con intiera definizione ne' lati, come si può vedere nel disegno tante volte citato del 5 aprile.

717. In diverse parti della regione qui descritta è avvenuto di notare un color bianco più o meno pronunciato. Primieramente nel solito luogo di Aeria sulla riva della Gran Sirte, fra la punta australe di Meroe e il corno d' Ammone:

Marzo	9	$\omega = 236^\circ$	Aeria bianca all' orlo destro.
—	10	232	id.
—	11	228	id.
Aprile	14	269	Bianco lucente all' orlo sotto l' Equatore.
Maggio	11	24	Bianco all' altezza del Tifonio.
—	15	335	Bianco fra Meroe e il Corno d' Ammone.
—	16	322	Un po' di bianco, nello stesso luogo.
—	17	317	Bianco in Aeria, nello stesso luogo.
—	19	310	Aeria bianca nello stesso luogo.
—	20	301	Aeria bianca nel luogo solito.
—	22	281	Bianco d' Aeria molto visibile.
—	23	277	Bianco solito fra Meroe e il Corno d'Ammone.
—	24	264	Bianco in Aeria nello stesso luogo.

Un' altra regione fu più volte vista coperta di bianco nei dintorni del vertice d'Aryn: trovandosi il luogo molto prossimo all' orlo sinistro, non è stato possibile giudicare con precisione se fosse in Thymiamata sotto l' Equatore, o sotto Aryn, o nel promontorio di Edom: l'ultima ipotesi mi pare la più probabile. Le osservazioni ebbero luogo addì 7, 8, 9 maggio sotto $\omega = 60^\circ$, 47°, 32°. Il 7 maggio questo albore era intenso quanto quello della neve polare. — Bianca apparve pure il 28 marzo sotto $\omega = 71^\circ$ una parte della regione detta Eden presso il lembo sinistro sotto il parallelo 20° boreale. E anche un po' di bianco fu visto fra il Lago Ismenio e il fine della Nilosirte il 5 aprile sotto $\omega = 341^\circ$. Finalmente bianca apparve la regione Cidonia fra Giordano e Calliroe il 27 febbraio sotto $\omega = 347^\circ$: e simultaneamente Cidonia e la sottoposta Ortigia il 2 aprile sotto $\omega = 25^\circ$. — Quasi tutte le predette regioni imbiancate appartengono alle striscie spirali segnate nella Tavola III della Memoria III (1881-82) come luoghi più soggetti a questo fenomeno.

Sezione III.

Fra l'Indo e il Gange.

718. L'Indo non presentò questa volta alcuna notevole variazione in confronto dell'opposizione precedente; forse però era meno oscuro e meno visibile che nel 1879 e nel 1882. Sempre mantenne la curva regolare degli anni scorsi, nè mai presentò alcuna traccia di geminazione. — L'Idaspe era presente anch'esso in tutte le osservazioni che si ebbe campo di fare in questa parte del pianeta; era, come le altre volte, assai più piccolo e meno distinto dell'Indo; così che in condizioni non buone d'atmosfera e sotto notevoli obliquità facilmente si confondeva con esso in un solo fascio d'ombra mal definita. Questa difficoltà ebbe sempre luogo per le foci dei due canali nel Lago Niliaco, delle quali mai non si potè assegnare la posizione precisa; ciò principalmente perchè il Lago suddetto non ebbe dalla parte australe confini propriamente detti, ma terminava sempre in ombra sfumatissima protesa verso l'equatore più o meno.

719. La Jamuna fu sempre veduta dal 27 febbraio all'11 maggio come una bella linea grossa e larga, tracciata secondo un circolo massimo; così che quando passava pel centro del disco apparente, figurava appunto come un diametro di esso disco. Al sig. Perrotin riuscì di sdoppiarla il 15 maggio, col telescopio di 38 centimetri, a Nizza: ciò che a me non fu possibile. L'angolo ch'essa fa alla sua intersezione coll'Idraote non mi è sempre sembrato il medesimo, anche tenendo il debito conto dell'effetto prodotto dalla prospettiva obliqua. Ho creduto talvolta di vedere, che le due linee fossero perpendicolari fra di loro; altre volte mi parve indubitata una certa obliquità ora nell'un senso ora nell'altro. Io sospetto che la direzione della Jamuna (e forse anche in minor grado quella dell'Idraote) sia variabile; nell'intento di verificar questo dubbio ho fatto della sua direzione, in diverse epoche ed in diverse opposizioni, un certo numero di misure, che a suo tempo daranno oggetto di discussione speciale; e lo stesso ho fatto pure per l'Idraote.

720. Il Lago della Luna si presentò sotto un aspetto nuovo, che forse è il suo naturale; quello di una forte macchia oscura rotondeggiante di contorno irregolarmente sfumato. Il suo diametro (per quanto è stato possibile stimarlo) era di dieci gradi o forse meno; esso passò esattamente al centro del disco apparente il 28 marzo, dal che si deduce, per la latitudine del centro di quella massa nera, 22° Nord. È quindi assai probabile che tal massa occupasse il luogo dove nel 1884 stava il tratto inferiore della geminazione da esso lago formata. Si compari la carta annessa alla presente Memoria con quella annessa alla Memoria IV. Tanto il tratto oblungo orizzontale del 1884, quanto la macchia rotondeggiante del 1886 formavano una specie di capocchia del Nilokeras alla sua estremità superiore. Se dunque la nostra ipotesi è giusta, bisognerà ammettere che dei due tratti orizzontali in cui si risolveva il Lago della Luna nel 1884, il più australe e più lungo fosse interamente scomparso nel 1886. Ciò è confermato da un'altra circostanza nei disegni di quest'anno;

nei quali il tratto superiore della gran geminazione Nilo-Idraote non presenta più col Lago della Luna alcun contatto, mentre nel 1884 era connesso col tratto superiore di esso Lago. Si confrontino le carte, o meglio ancora i due disegni del 9 marzo 1884 e del 28 marzo 1886, l'uno pubblicato nella Memoria IV, l' altro nella presente Memoria V. — Quanto al Nilokeras, che rimase sempre forte e visibilissimo per tutta la durata delle osservazioni dal 25 febbraio all' 11 maggio, la sua posizione e figura non parve nulla cambiata da ciò che si era veduto nel 1884. Era dritto ed anche abbastanza terminato nei momenti d' aria buona; più largo verso la bocca inferiore nel Lago Niliaco, e più sottile dalla parte del Lago della Luna, che gli formava capocchia. Il 28 marzo parve più grosso e più nero che altre volte, ed in questa condizione è rappresentato dal disegno di quel giorno, figura II. Tal forma perdurava ancora il dì 11 maggio, che fu l' ultima osservazione sul Nilokeras.

721. Del Nilo e dell'Idraote non si ebbero dapprincipio che imperfette vedute; il 27 e 28 marzo si presentarono uniti a formare la splendida geminazione descritta nella figura II. I due tratti, assolutamente paralleli ed uguali sotto ogni rispetto, si estendevano attraverso al disco dal Golfo delle Perle al Ceraunio in direzione che nel fare il disegno qui sopra citato dovetti giudicare assolutamente rettilinea. Benchè i loro lati non fossero terminati con intiera precisione, il tracciamento aveva una regolarità geometrica: l' uniformità però non era completa, ma nella parte fra la Jamuna e il Gange erano certamente più prominenti o per maggior larghezza, o per maggior intensità di colore. L' insieme del sistema occupava colla sua larghezza $\frac{1}{6}$ del raggio, cioè circa 10° [1] e l' intervallo fra i due tratti era forse il doppio della larghezza dei tratti stessi. Il colore di questi era un rosso mattone non molto più vivo che il fondo giallo su cui parevano proiettarsi. Il tratto inferiore traversava il Lago della Luna, mentre il superiore non mostrava alcuna particolarità corrispondente. — Il 27 marzo mi parve che le due linee si prolungassero al di là del Ceraunio, il che indicherebbe una geminazione corrispondente anche del Flegetonte; una diretta osservazione di tal fatto sul Flegetonte intiero non mi riuscì di farla, ma soltanto trovo notato che questo canale era larghissimo il 25 marzo. — Il 28 marzo non ho potuto nulla congetturare che accennasse ad un prolungamento della geminazione Nilo-Idraote al di là del Ceraunio; è vero che l' atmosfera era meno buona, mentre fu quasi perfetta il giorno 27. Nei giorni 1 e 2 aprile si potè vedere la duplicazione, ma soltanto per l' Idraote, non per il Nilo. Il 2 aprile stimai che i due tratti fossero uguali in grossezza ad un filo del micrometro (0″ 67). Essendo in quel giorno 12″8 il diametro apparente di Marte, ciò darebbe 6° per la larghezza di ciascuno dei tratti. Eran dunque più larghi che il 28 marzo; l' intervallo frapposto era minore, ed uguale anche a 6°. Non solo eran più larghi, ma anche più pallidi di prima. Il giorno 7 maggio la geminazione esisteva tuttavia, benchè l' aria poco tranquilla impedisse di riconoscerla distintamente; ed ancora il 9 si poteva constatarla fra la Jamuna ed il Gange, non però nelle altre parti: il diametro del pianeta era allora non più che 9″ 6. — La geminazione d' Idraote fu pure osservata a Nizza dal prof. Perrotin.

[1] Per errore nella nostra Carta questo intervallo è stato alquanto impiccolito: l' Idraote superiore dovrebbe esser portato più verso Sud.

722. Parecchie volte si ebbe occasione di osservare il Ceraunio dal 19 marzo al 1° maggio: malgrado la favorevole posizione al passaggio pel meridiano centrale, si mostrò sempre confuso e soltanto il 27 marzo si vide distintamente la sua consueta forma geminata. — Nè il Dardano, nè l'Issedone mostrarono tracce della loro esistenza, benchè anche la regione di Tempe più d'una volta si sia presentata al meridiano centrale in buona posizione. Invece fu vista in Tempe più volte la striscia bianca, che da Tempe suole estendersi attraverso al Nilo nella contigua regione di Tharsis; e precisamente sotto le date 27, 28, 31 marzo, 2 aprile, 11 maggio. Nei giorni 27 e 28 marzo la striscia era completa, dal Tanai all'Agatodemone, e sembrava parallela alla linea Nilokeras-Chrysorrhoas. La geminazione del Nilo-Idraote la divideva in tre parti, delle quali una era in mezzo alle due linee di essa geminazione, un'altra traversava Tempe, la terza Tharsis. Il 2 aprile fu veduta solo in Tempe, e fu notato che la striscia bianca era lunga forse 5° e non si connetteva in alcun modo colla neve polare, ma cominciava soltanto al Tanai. Addì 11 aprile ne fu veduta ancora la sezione inferiore compresa fra il Tanai ed il Nilo. Veggasi su questa striscia quanto se n'è riferito nelle Memorie precedenti, §§ 351, 430, 557, 616. — Da ultimo trascriveremo le note concernenti la bianchezza, che anche quest'anno si mostrò in Chryse veduta sotto considerevoli obliquità:

Febbraio	26	$\omega = 352°$	Chryse bianca all'orlo destro.
—	27	344	Spicca il bianco di Chryse a destra.
—	28	335	Chiaro in Chryse.
Marzo	22	103	Gran bianco in Chryse.
Maggio	11	8	Bianco in Chryse all'orlo destro.

Per confronto colle anteriori osservazioni dello stesso fenomeno vedi le Memorie precedenti, §§ 59, 64, 232, 262, 334, 469, 615.

Sezione IV.

Lago Niliaco, Mare Boreale, Mare Acidalio, Lago Iperboreo.

723. Il Lago Niliaco continuò a mostrarsi sotto la forma notata nelle due opposizioni precedenti, e fu generalmente meno oscuro del sottoposto Mare Acidalio ma pure sempre ben visibile, anzi il 26 marzo più visibile, più largo e più nero che ogni altra volta. Ben deciso e press'a poco rettilineo il limite verso il Ponte d'Achille, indeciso e sfumato nel resto. E forse a questa indecisione di contorno è dovuta la variabile ampiezza che sono stato condotto ad assegnargli in diverse occasioni. Il 1° aprile è notato come « piccolo, ma ben distinto »; nel disegno di quel giorno la massima dimensione Nord-Sud è figurata di circa 12°. Il giorno dopo trovo scritto che « le sfumature del Lago Niliaco arrivano fin quasi al centro del disco »; il che implicherebbe una dimensione verticale massima di quasi 15°. Questa diversità può derivare da una reale variazione, ma potrebbe, almeno in parte, anche di-

pendere da ciò, che le due osservazioni non furono fatte con immagine ugualmente buona, l'atmosfera essendo stata più tranquilla il 1° aprile che il 31 marzo. L'11 maggio il Lago Niliaco, ancora piuttosto lontano dal meridiano centrale ($\omega = 14°$), fu di nuovo giudicato più oscuro e più grosso di altre volte. Se il fenomeno è reale, pare dunque soggetto a fluttuazioni di carattere periodico.

724. La singolare striscia luminosa detta Ponte d'Achille fu sempre veduta con molta facilità, anche quando lo stato dell'immagine non era ottimo. La prima volta venne in vista il 25 febbraio e fu veduto bene, con sufficiente facilità; nell'ultima osservazione, che ebbe luogo l'11 maggio, era ancor manifesto, malgrado che il diametro del disco fosse ridotto a 9″,5. Nell'intervallo fu osservato molte volte, e si confermò quanto già era stato notato nel 1884, che non è esattamente orientato lungo il parallelo, ma sale alquanto nel suo procedere da sinistra a destra. La sua larghezza mi è sembrata uniforme, di circa 3°, ben definiti i due profili superiore ed inferiore. La sua lunghezza mi parve maggiore di quanto fu assegnato gli anni scorsi e dai disegni fatti risulterebbe non occupare meno di 20° in longitudine. I due lati terminano a ponente sotto lo stesso meridiano, ma verso levante il lato inferiore si estende alquanto più: in altri termini, misurato lungo il Ponte d'Achille il Lago Niliaco è alquanto men largo del Mare Acidalio misurato nello stesso modo.

725. Interessantissime furono le osservazioni sul Mare Boreo, di cui si potè, bene o male, esaminare l'intero perimetro. Se dovessimo stare a quanto si vide quest'anno, i limiti del Mar Boreo si dovrebbero estendere assai più di quanto fu fatto nella Memoria precedente (§ 619), cioè molto al di là del 110° meridiano. Infatti durante i mesi di marzo e di aprile tutte le terre boreali di Marte al di là del 50° parallelo, comprese fra i meridiani 110° e 250°, ebbero i loro canali così larghi e fiancheggiati da ombre indistinte così estese, e di tanto eran ridotte in larghezza (in parte anche di splendore) le isole fra essi comprese, da lasciar dubbio se quello dovesse considerarsi come un continente intersecato da vasti canali, o come un mare pieno di grandi e frequenti isole. In tale incertezza io ho posto per principio, che si debba chiamare *continente* ogni parte della superficie del pianeta su cui in qualche stagione si manifesta con qualche grado di stabilità e con tinta schietta il color giallo della zona equatoriale, restringendosi i canali a forma lineare, e dando luogo occasionalmente anche al fenomeno della geminazione. Stando a questo criterio, e profittando anche di ciò che ho veduto più tardi nel 1888, ho attribuito al continente le regioni in questione; soltanto, per soddisfar meglio ai rilievi ottenuti, il Mare Boreo fu esteso alquanto al di là del 110° meridiano, cioè fino alla bocca del Sirenio, che ne formerebbe, fino a nuovi studî, la estremità occidentale. I limiti ad ostro sarebbero quelli già abbastanza bene definiti nel 1884 dalla bocca del Sirenio a quella del Giordano, e così pure quelli verso levante per la parte che va dalla foce del Giordano a quella dello Iaxarte. Il resto dei confini, che nelle altre opposizioni quasi tutto era occultato dalle nevi del polo e dalla zona oscura ad esse circostante, sarà descritto or ora.

726. Niente di nuovo abbiamo a dire sulla parte più oscura e più australe del Mar Boreo, chiamata Mare Acidalio, che è nota da lungo tempo agli areografi. Come sempre finora, era nerissimo e visibile in qualunque stato di atmosfera. Come

sempre formava un pentagono, avente una base retta lungo il Ponte d'Achille, e curvi gli altri quattro lati, connessi fra loro nei punti dove in esso mare entrano Callirroe, il Iaxarte ed il Tanai. Ma questa volta il poligono fu anche più irregolare che negli anni precedenti: perchè la nerissima superficie invase parte dell' isola di Baltia, allargando a spese di questa il Tanai per modo da dar a questo la figura di un ampio stretto che si andava restringendo da levante a ponente in forma di tromba. Si confronti la carta di quest' anno con quella del 1884: o se si vuole, il disegno del 28 marzo 1886 (figura II) con quello del 14 marzo 1884, pubblicato in calce alla Memoria IV. D' altra parte molto più angusta di prima si mostrò la bocca dello Iaxarte, che divide Baltia dal continente di Ortigia. Come nel 1884, mancò totalmente l' isoletta Scheria, veduta nel 1882 (§§ 465, 620).

727. Larghissimo ed oscuro si mostrò il Tanai dal 26 marzo, giorno della prima osservazione, al 2 aprile; e malgrado il suo progressivo restringersi verso occidente, dappertutto apparve quello che è realmente, non un canale dei comuni, ma un vero braccio di mare fino dove riceve il Sirenio nel 120° meridiano, che per ora dobbiamo considerare come suo limite. E tale sembra fosse ancora nei giorni 7, 8, 9 maggio, in cui malgrado il piccol diametro apparente del disco, ancora fu veduto riprodurre esattamente l' aspetto del 28 marzo. Ciò che del Tanai è stato segnato sulla carta del 1881-82 (Memoria III) al di là del 120° meridiano fra il Sirenio e la Propontide non è stato riveduto nè in questa opposizione, nè nella precedente, e dobbiamo quindi su tale proposito ancora riservare il nostro giudizio.

728. Le due isole di Baltia e di Nerigos questa volta apparvero sempre attaccate insieme in modo da formare una sola isola estesa lungo il parallelo per circa 80° di longitudine. Per lo più era terminata in modo alquanto incerto, come spesso avviene delle terre del Mare Eritreo, e come in questo il colore fu abbastanza variabile, giallo vivo, giallo pallido, ombra chiara più o meno. Lungo l' asse la chiarezza era maggiore che ai lembi. Il 26 aprile rassomigliava alla Terra di Deucalione, ma il giorno dopo era assolutamente gialla come i continenti, ed anche ben terminata: dopo d' allora rimase sempre bene illuminata nella parte centrale, perdendo un po' di luce negli orli. Nessuna traccia di divisione si potè sospettare, neppure per un momento. La sua larghezza fu ordinariamente di circa 12°, ma il 28 marzo certamente era più sottile, 8° al massimo: e si proiettava in forma di nube ovale molto allungata. Quest' isola di Baltia-Nerigos, terminava dove ora poniamo il fondo del Mar Boreo, davanti al Sirenio, ad una macchia molto oscura, dove pur mette capo il Tanai, che sulla carta è segnata col nome di Palude Meotide: è uno stretto che divide Nerigos dal continente vicino, appellato Scandia. La Palude Meotide, di cui nel 1884 non si avevano avuti che accenni piuttosto male definiti, apparve adesso come una grossa macchia nera per tutto l' intervallo dal 17 marzo al 1° maggio: anzi fu ancora visibile il 5 giugno, il diametro apparente del pianeta essendo meno di 8″.

729. L' esplorazione fatta quest' anno nelle latitudini boreali, pose in luce la vera natura di ciò che prima avevamo chiamato Iaxarte, e considerato come uno stretto parallelo al Tanai (§§ 467, 620). Quella linea, che formava il limite boreale di Baltia-Nerigos, si trovò constare di 3 parti di diversa natura. La parte più orien-

tale è un vero canale alquanto curvo, cui abbiamo conservato sulla carta il nome di Iaxarte, e divide Baltia dalla regione continentale detta Ortigia. Questo canale, abbastanza largo e sfumato il 26 marzo, divenne stretto, nero, e ben tracciato il 27 e il 28, sottilissimo come tratto di penna il 1° aprile, sottile e debole il 2, dubbioso il 3, e di nuovo visibile il 5 aprile. Nelle osservazioni posteriori di questa parte, fatte dal 7 all' 11 maggio, non si poteva più aspettare di veder un oggetto così difficile, ed infatti nel diario non se ne fa altra menzione. Come l' abbiamo adesso definito, il Iaxarte è un canale assai breve, che mette in comunicazione il Mare Acidalio col Lago Iperboreo: si stende in direzione obliqua fra i meridiani 30° e 50° e fra i paralleli 50° e 70°.

730. La parte più occidentale dell' antico Iaxarte esce dalla Palude Meotide, e divide Nerigos dall' isola nuovamente trovata di Ierne; sulla carta figura come stretto di Ippalo. Fu sempre veduto come porzione del perimetro di Baltia-Nerigos, in generale sotto forma poco definita, come del resto è da aspettarsi in tanta obliquità di visione. Esso fa comunicare la Palude Meotide col Lago Iperboreo.

731. La terza parte dell' antico Iaxarte, quella di mezzo, non è nè un canale, nè uno stretto: forma la linea limite fra Baltia ed un vasto lago, compreso fra i paralleli di 70° ed 85°, a cui conviene pertanto il nome assegnatogli di Lago Iperboreo. Il suo centro, stando alle osservazioni che se n' è potuto fare, sarebbe sotto la longitudine di 55°, la forma sarebbe press' a poco quadrilatera, cogli angoli formanti quattro uscite: due delle quali sono lo Iaxarte e lo stretto d' Ippalo già descritti. Le altre due rasentavano quest' anno la neve del polo, seguendo direzioni poco diverse dal parallelo verso levante e verso ponente. Il lato australe è formato dall' isola Baltia; il boreale quest' anno, se non era formato proprio dalle nevi polari, poco se ne allontanava. Le mie osservazioni di varî giorni non si accordano bene su questo punto; qualche volta mi è sembrato di vedere fra il Lago Iperboreo e la neve una sottilissima striscia gialla, altre volte no. — Il Lago Iperboreo era assolutamente nero, e la vicinanza delle regioni molto luminose di Ortigia e di Ierne, e più ancora la vicinanza delle nevi polari formava un vivo contrasto, che lo rendevano visibile malgrado le piccole dimensioni e la forte obliquità. Il dott. Terby lo osservò nella sua privata specola di Lovanio con un 8 pollici di Grubb ancora il 3 maggio [1], e qui a Milano fu veduto benissimo ancora nei giorni 7-8-9-11 maggio nel Refrattore di 18 pollici essendo il diametro apparente del pianeta fra 9″ e 10″.

732. Il Lago Iperboreo non è sempre ugualmente cospicuo, talvolta perchè è occupato dalle nevi del polo, altre volte per effetto di cause di cui è difficile assegnare la natura, di cui però la realtà risulta in modo indubitabile dalle mie osservazioni. Nel 1884 non se ne vide traccia, quantunque il limite delle nevi, nel tempo in cui meglio si poteva esplorare questa parte, già fosse salito alla latitudine di 75° ed anche più alto [2]. Vero è che allora la parte scoperta del Lago Iperboreo doveva confondersi

[1] Lettera del dott. Terby all'Autore, in data del 4 maggio 1886.

[2] Le migliori vedute di questa parte si ebbero nel 1884 alla fine di gennaio e al principio di febbraio, quando il diametro della macchia boreale era stimato di circa 30°: inoltre in marzo, quando esso diametro era stimato intorno a 25° (§ 677).

coll' orlo oscuro che contornava la neve in tutto il suo perimetro. Tuttavia un certo indizio dell' esistenza di esso lago potrebbe ravvisarsi nella grande spaccatura che si osservò nella calotta polare il 5 febbraio 1884 e di cui ho dato la descrizione nella Memoria IV, § 679. L' osservazione fu fatta nella configurazione $\omega = 15°$; se si costruisce in tale posizione la figura del Lago Iperboreo quale la dà la nostra carta, si vedrà subito che essa coincide bene col disegno della spaccatura dato nel citato § 679. Qui adunque dobbiamo congetturare che la presenza del Lago Iperboreo (o di ciò che si trovava allora al suo luogo) abbia contribuito ad accelerare la sfaldatura della calotta nevata; onde si ha un altro argomento in conferma del fatto già osservato, che le parti oscure della superficie di Marte dette *mari*, sono meno favorevoli che le chiare alla conservazione dello strato bianco cui noi diamo il nome di neve.

733. Nell' opposizione attuale il diametro delle nevi nel tempo in cui fu potuta osservar bene questa regione fu sempre stimato al più di 10° e per lo più anche meno (§ 782). Sembra pertanto che il Lago Iperboreo avrebbe dovuto mostrarsi fin da principio. Invece non fu così; anzi per una fortunata combinazione di cose, mi fu dato di assistere alla sua apparizione, e al suo consecutivo sviluppo. Tali osservazioni essendo sommamente istruttive, io le riferirò tanto esattamente e tanto completamente, quanto il consentono le memorie da me prese in quel tempo. — Le prime osservazioni fatte in circostanze sufficienti ebbero luogo non prima del 26 marzo; in quel giorno il Mar Boreo e le regioni circostanti furono disegnate come le presenta la figura VII, nella quale è ben visibile il Mare Acidalio, una gran parte del Tanai, e dell' isola Baltia-Nerigos, ma nessuna traccia s' incontra del Lago Iperboreo, il quale avrebbe dovuto trovarsi press' a poco al meridiano centrale, o poco discosto. Nel diario si trova la nota seguente: « il Mare Boreo non arriva al polo, e ne resta distante di molto. Credo che negli anni scorsi l' ho visto tutto. La neve mi pare tutta immersa nel giallo ». — Il 27 marzo io feci lo schizzo riprodotto nella figura VIII e scrissi quanto segue: « Sotto $\omega = 81°$ Baltia gialla e ben definita. Il Iaxarte ha una gonfiatura, che va fin presso la neve polare. Certamente a mancina la neve è inquadrata in nero ». Qui il Iaxarte deve intendersi nel significato usato nelle Memorie precedenti, quale sta nelle carte del 1882 e del 1884. — Il 28 marzo fu fatto il disegno completo della figura II, nel quale si vede il Lago Iperboreo già quasi interamente formato. In quel giorno fu osservato il passaggio del suo mezzo al meridiano centrale nell' istante in cui era $\omega = 54°$: appariva il lago sovrapposto alla neve con un diametro poco diverso da quello della neve stessa. — Il 29 marzo non si fecero osservazioni: il 30 si vedeva bene, e malgrado l' aria non ottima, sotto $\omega = 40°$ se ne fece una schizzo abbastanza soddisfacente, che lo presentava nella forma completa data dalla nostra carta; veggasi anche la figura IX: nelle note è detto visibilissimo. Il 31 marzo l' atmosfera non fu abbastanza buona per l' esame di oggetti così difficili. — Il 1° aprile, essendo $\omega = 28°$, feci lo schizzo riprodotto nella fig. X, e scrissi: « Contro Ortigia vi è l' isola di Ierne, tutte due sotto Baltia fiancheggiano il Lago Iperboreo: la neve pare tutta inquadrata di nero dal Lago Iperboreo e dai suoi due rami inferiori: di questi due il destro (passo di Arione) è molto più nero e più grosso del sinistro. Il canale fra Baltia e Ierne (stretto d' Ippalo) si vede bene ». Sotto $\omega = 52°$ passò al meridiano centrale il mezzo del lago: questo pareva a contatto colla neve polare, il suo diametro tra-

sversale fu stimato uguale a quello della neve, od un po' meno. — Nei giorni 2, 3, 5 aprile il Lago Iperboreo fu veduto e disegnato ancora, ma in posizioni troppo lontane dal meridiano centrale per poter ottenere schiarimenti utili intorno alla sua forma e grandezza. Veggasi il disegno del 5 aprile nella figura IV: nel qual giorno il Lago Iperboreo fu notato come « nerissimo e grosso ».

734. Abbiamo qui dunque un esempio ben documentato ed incontestabile dell'apparizione, compiuta in due giorni (dal 26 al 28 marzo), di una macchia nera del diametro di 600 chilometri almeno, nel luogo della quale prima la superficie del pianeta era luminosa e ad ogni modo non molto diversa dal solito giallo dei continenti. Questo colore giallo è positivamente attestato dall'osservazione del 26 marzo. Non sembra probabile che si tratti qui di una repentina invasione di acque provenienti dalla fusione di supposte nevi: queste erano molto ridotte di ampiezza, e nelle giornate in questione non parvero punto diminuite nè di intensità luminosa, nè di diametro (1). Se quella è stata una espansione di liquido, ha dovuto probabilmente aver origine da altra causa. Ma potrebbe anche ottenersi una spiegazione plausibile del fatto nella subitanea fusione della superficie congelata del Lago, che ne abbia mutato il colore dal giallo al nero. Come poi la superficie agghiacciata fosse prima gialla, rimarrebbe a spiegare, e non mancherebbero le ipotesi adatte a chi volesse cercarle. Nel grande arbitrio che in tale materia è concesso alle speculazioni ipotetiche, una cosa mi pare sicura: che quella superficie così nereggiante non ha potuto esser quella di un corpo solido.

735. Sopra la diramazione che dal Lago Iperboreo, rasentando la neve polare (o ad ogni modo tenendosi a poca distanza da questa), andava a raggiungere l'estremità boreale del Kison, già si è detto di sopra, § 713. L'altra diramazione più larga, che sotto il nome di Passo di Arione forma una notevole estensione del Lago Iperboreo verso il Lago Arsenio, è stata constatata prima nella sua estremità occidentale-australe sotto questo ultimo lago, nei giorni 19, 20, 21, 23 marzo come zona alquanto oscura, benchè non nerissima. Dopo il 23 marzo non se ne potè veder altro per qualche tempo; sembra però che se la parte contigua al Lago Iperboreo avesse esistito il 26 marzo, già avrebbe dovuto rendersi visibile in quel giorno, quando fu fatta la figura VII. Ma non ne fu nulla; e bisogna dire che in quel giorno, insieme con tutto il Lago Iperboreo, fosse ancora invisibile anche la parte orientale del passo di Arione. La quale, come si disse, non comparve che il 28 marzo in forma di sottile orlo della neve polare, siccome mostra il disegno di quel giorno, figura II, e come tale fu visibile anche il 30 marzo. Il 1° aprile sotto $\omega = 30°$ apparve larghissima, e tale risulta ancora da uno schizzo fatto il 5 di quel mese. — L'altra estremità del Passo di Arione verso il Lago Arsenio fu veduta ancora un'altra volta il 27 aprile presso l'orlo sinistro ($\omega = 140°$): una visione simultanea di tutto il passo non mi fu dato di ottenerla nel corso di questa opposizione.

(1) Anzi, se dovessimo stare alle estimazioni fatte, il diametro delle nevi sarebbe stato nei primi giorni di aprile maggiore che negli ultimi di marzo. Vedi più basso le osservazioni sulla neve polare, § 782. Forse quella fu un'apparenza dovuta al maggiore distacco che la neve faceva sul fondo nero del Lago Iperboreo e dei suoi rami inferiori.

736. Nella descrizione del Mare Boreale comprendo questa volta anche l' isola di Ierne, sebbene sia possibile che costituisca piuttosto una parte dei continenti vicini. La sua separazione da questi mi apparve sempre come striscia larga e diffusa ed anche piuttosto oscura, tutte le volte che si potè averne veduta nei giorni 19, 20, 21, 23 marzo e 27 aprile: suppongo quindi per ora che sia una specie di stretto e non un canale di quelli che usano solcare i continenti equatoriali. Gli altri confini di Ierne si poterono determinare abbastanza bene dalle osservazioni della fine di marzo e del principio di aprile, e son formati dallo stretto d' Ippalo, dal Lago Iperboreo e dal Passo di Arione, già descritti di sopra. Nelle osservazioni or ora accennate la parte visibile di Ierne apparve sempre con contorni piuttosto bene determinati; il colore era giallo chiaro più vivo e più scevro d' ombre che quello di Baltia, e non inferiore a quello di Ortigia. L' osservazione fatta il 13 marzo 1884, e riferita nel § 618, di una sottile striscia gialla che sarebbe stata veduta fra la neve polare e quello che oggi chiamiamo stretto d' Ippalo, forse si riferisce ad un piccolo lembo, che allora sarebbe stato veduto, dell' isola di Ierne.

737. Nè Baltia, nè Nerigos, nè Ierne, nè alcuna altra parte delle regioni considerate in questa sezione al di fuori della neve polare, mostrò nel 1886 alcuno indizio di quei veli bianchi o biancastri, così frequenti in altri luoghi del pianeta, anche sotto l' equatore. Degno di nota è sopratutto, che il 27 e il 28 marzo essendo comparsa la nota striscia bianca che tante volte si è vista attraversare obliquamente le regioni di Tempe e di Tharsis (disegno del 28 marzo, fig. II) intersecando anche il Nilo geminato, nulla di simile si vide su Baltia, tanto più boreale e giacente in quella direzione; la striscia si arrestava netto al Tanai. Con questo pare accertato, o almeno probabile, che quella striscia non abbia colla neve polare la connessione già da noi altra volta congetturata (§ 351, 430, 557, 616, 722). Invece si trova qui un nuovo argomento per credere, che le aree di tinta oscura, quali erano allora il Tanai e il Mare Acidalio, presentino circostanze sfavorevoli allo sviluppo di macchie bianche, come poc' anzi, indotti da altre considerazioni, abbiamo già avuto occasione di accennare (§ 732).

Sezione V.

Dal Gange al Fasi.

738. Di questa regione così interessante abbiamo ben poco da riferire nella presente opposizione. La grande ovale di Thaumasia fu sempre veduta male a causa della grande obliquità, e il suo contorno non si potè mai seguire distintamente tutto intiero. Niente del Golfo Aonio, del Fasi, dell'Ambrosia, del Nettare. Anche l'Agatodemone, che formava la parte meno lontana dal centro, non fu mai osservato distintamente. Il Lago del Sole come massa compatta d' ombra abbastanza oscura fu distinto parecchie volte dal 18 marzo al 7 maggio in forma di rozza ovale (ovale per lo scorcio di prospettiva), in cui nulla parve degno di esser particolarmente notato, che prima già non si sapesse. Nulla dell'Aurea Cherso e della Fonte di Gio-

ventù e del Lago Titonio. L'esistenza del Lago della Fenice continuò ad esser schematica; cioè quel luogo fu distinto come punto di riunione di varie striscie oscure, null'altro. Sotto forma di strisce visibili, benchè pochissimo determinate, si presentarono l'Irido, il canale della Fortuna, e l'Uranio un paio di volte ciascuno, nell'intervallo dal 19 al 28 marzo. Più distinti invece risultarono il Gange (dal 27 febbraio al 30 marzo) e il Chrysorrhoas (dal 27 marzo al 6 maggio). La loro apparenza era quella che sta disegnata nel disco del 28 marzo, figura II. Nessuno dei canali veduti presentò traccia di geminazione: sola e grande campeggiava quella già descritta del Nilo Idraote (§ 721).

739. Nella regione di Tharsis fu osservata per tutta la seconda metà di marzo con molta persistenza una macchia bianca, che mostrò grande lucentezza tutte le volte che si approssimava all'orlo del disco. Ecco le note prese in tale occasione:

Marzo	17	$\omega = 163°$	Bianco a sinistra a circa 90° dai poli.
—	18	139	Bianco all'orlo manco a 90° dai poli.
—	19	140	id.
—	20	126	Gran bianco in Tharsis.
—	23	158	Bianco in Tharsis.
—	25	125	id.
—	27	61	id.
—	27	74	Striscia bianca in Tempe e in Tharsis.
—	28	64	id.
—	30	34	Grande albore in Tharsis.

Questa macchia probabilmente era la parte australe della striscia bianca descritta nel § 722, e di cui anche la sezione boreale, collocata in Tempe fu più volte veduta in prossimità dell'orlo come si narra nello stesso §. Soltanto sembra che per la sezione australe l'apparizione si sia ripetuta con maggior insistenza nella seconda metà di marzo, ed anche a quanto sembra, con maggiore intensità. Nessun'altra macchia bianca è stata osservata durante il 1886 nella parte considerata in questa sezione.

Sezione VI.

Mare Eritreo.

740. Malgrado la considerabile obliquità, il Mare Eritreo si mostrò questa volta sempre di tinta spiccatamente oscura, quantunque la sua nerezza non potesse mai compararsi a quella che contemporaneamente mostrava il Mare Acidalio; i Golfi delle Perle e dell'Aurora non parvero punto meno distinti che nelle opposizioni precedenti. Solo nel Golfo Sabeo poche volte si poterono separare i due corni; operazione che negli anni trascorsi si soleva fare con sufficiente facilità anche in condizioni non ottime d'atmosfera. L'impressione fu che tale fatto dipendesse non tanto dalla qualità dell'immagine telescopica, quanto da un profilo realmente meno bene determi-

nato e da una mutazione avvenuta nella figura dei corni; veggasi su tale proposito il § 711. — Fra i tre predetti golfi spiccavan bene le due regioni di Deucalione e di Pirra; la prima, giallo-pallida e benissimo formata, fu veduta tutta intiera; la seconda, giallo-grigia, fu veduta soltanto fino alla piegatura, per esser la parte più australe in posizione troppo obliqua. E forse per la medesima ragione non fu mai notata in quest' anno la presenza della Terra di Proteo.

741. Come al solito Argyre, quantunque collocata in posizione ancora assai più obliqua, pure si rese osservabile pel suo color bianco lucente presso l' estremo orlo del disco: non tuttavia con tanta frequenza quanta si poteva aspettare dall' esperienza fatta nelle opposizioni precedenti.

Febbraio	25	$\omega = 358^{\circ}$	Argyre bianca in alto.
—	26	352	A. più debole (o più piccola) della neve boreale.
—	27	347	Veduta benissimo: uguale alla neve boreale.
—	28	335	A. bianca all' orlo destro.
Marzo	30	40	Proprio sul vertice culmina al meridiano centrale una macchietta bianca infinitesimale, senza dubbio Argyre.

Tutte queste osservazioni, eccetto l' ultima, sono state fatte quando Argyre già si trovava sul limite estremo dell' emisfero visibile, od era in parte anzi già nascosta. L' osservazione del 28 febbraio potrebbe piuttosto riferirsi a qualche parte dell' isola posta fra Argyre e Noachide: perchè Argyre in quella configurazione doveva essere occultata quasi tutta. Notevole è, che mentre Argyre fu veduta in posizioni così estreme alla fine di febbraio, nei giorni 26 marzo-2 aprile, in cui essa passava al meridiano centrale in posizione molto più favorevole (ed in cui si ebbero buone e talvolta ottime condizioni di visione) non sia stata notata affatto. Ciò sembra indicare una mutazione delle condizioni d'Argyre dalla fine di febbraio alla fine di marzo. In maggio essa non fu più veduta; le condizioni a ciò favorevoli non sarebbero mancate, specialmente nei giorni 9 ed 11 del mese.

742. Frequentemente invece quest' anno vedemmo brillare all' orlo del disco la Terra Noachide, con splendore ed ampiezza apparente molto variabile: ne trovo nel diario d' osservazioni le annotazioni seguenti:

Febbraio	27	$\omega = 48^{\circ}$	Bianco all' orlo sinistro su Noachide.
Marzo	30	39	id.
—	31	24	Bianco in alto, forse Noachide.
Aprile	1	14	In alto gran massa bianca, che rappresenta Noachide: proprio singolare!
—	2	6	In alto Noachide biancastra.
—	5	8	In alto Noachide (od una delle sue isole) brilla come punto di neve opposto alla neve boreale.
Maggio	8	45	Noachide bianca in alto.
—	9	34	N. chiara all' orlo superiore sinistro.
—	11	9	N. bianca, un po' a sinistra.

Simili fenomeni non erano stati osservati in Noachide in nessuna delle opposizioni 1877, 1879, 1881-82; la prima volta si manifestarono nel 1884 (§ 635). Qui

un fattore importante è senza dubbio l'obliquità dei raggi solari. Si noterà che in tutte queste osservazioni Noachide si trovò a sinistra del meridiano centrale, da essa attraversato qualche ora prima. Al meridiano stesso non fu vista brillare; in ciò i suoi fenomeni concordano con quelli di Argyre I e di Argyre II (§§ 352, 353 e 482).

Sezione VII.

Dal Fasi al Titano.

743. Di tutta questa parte, comprendente lo spazio che va dal Mare delle Sirene fino al polo boreale fra i meridiani 100°-170° a un dipresso, non si potè aver alcuna veduta, nè buona nè cattiva, nè totale nè parziale, prima del 16 marzo. Fra le osservazioni non numerose che se n'ebbero, le più interessanti cadono nell'intervallo 17-25 marzo. Qualche altro poco s'è potuto notare nell'intervallo 26 aprile-1° maggio. Anche questa volta nelle regioni circostanti al Mare delle Sirene molte cose non furono più visibili, in parte certo a cagione della troppa obliquità, ma forse non tutto: anche questa volta nulla possiamo riferire del Fasi, del Golfo Aonio, dell'Arasse, delle Colonne d'Ercole, del Gorgone, dell'Erinni. Il Mare delle Sirene però fu sempre veduto, ed il suo colore oscuro abbastanza spiccava sui contorni delle sue sponde, specialmente sulle regioni australi (Icaria, Fetontide) che sempre furon molto chiare, ed anzi il 26 aprile apparvero affatto bianche, quantunque non lucenti. — In basso, fra il polo boreale ed il 50° parallelo si mostrò per lo più intorno alla macchia polare l'apparenza generale di un segmento grigio, il quale però, appena l'aria fosse alquanto quieta, si risolveva facilmente in una rete di canali più o men definiti, e di macchie oscure, il tutto tramezzato da spazi gialli; rete che la grande obliquità della vista rendeva molto difficile decifrare.

744. Lo spazio di mezzo fra il Mare delle Sirene e il 50° parallelo Nord mostrò sempre, come al solito, una notevole uniformità d'aspetto. Generalmente esso suole esser meno vivacemente colorato che le altre parti del pianeta sotto eguali latitudini: e questa meno viva colorazione, può diventar sensibile anche all'occhio nudo, quando tutta la regione di cui qui si discorre occupa l'emisfero visibile di Marte ([1]). Nei giorni 18, 19, 20, 21 marzo l'aspetto di questa parte fu ben diverso dal consueto. Il colore generale della superficie era altrettanto giallo (o rosso, se si vuole), che nelle altre regioni equatoriali del pianeta; nè a questa regola si sottraeva pure la Memnonia, generalmente così distinta pel suo eccezionale color bianco ([2]). I lunghi canali, che solcano qui il pianeta in varie direzioni, apparivano delineati abbastanza

([1]) Trovo scritto nel mio libro di osservazioni, che la sera del 28 gennaio 1884 intorno a 10^h del tempo medio di Roma, stando il dott. Porro a discorrere con me sul terrazzo della Specola, egli guardò Marte e mi disse che gli pareva meno rosso del solito. Facendo il calcolo della configurazione del pianeta, si trova che in quel momento passava al centro di Marte il meridiano 128°, che quasi corrisponde al mezzo tra il Fasi ed il Titano. Sul colore di questa regione vedi il § 494.

([2]) Vedi su ciò i §§ 122, 373, 504, 645.

bene come strisce di color rosso mattone vivo, e nei loro punti d'incontro formavano delle macchie di rosso più intenso, che volendo si sarebbero potute considerare come altrettanti laghi. Soltanto la loro enorme piccolezza li rendeva estremamente difficili a fissare colla vista. Il 19 marzo specialmente quelle strisce parvero così larghe, che il sospetto di una geminazione strettissima avrebbe potuto sembrare abbastanza plausibile per la maggior parte di esse. Ma questo stato di cose non durò molto. Comparvero qua e là macchie bianche, da cui il pianeta finì per esser in buona parte imbrattato il 25 marzo, così che vi era più bianco assai, che rosso o giallo. Non posso dire quanto tempo abbia durato questa imbrattatura, non avendo potuto fare, dopo quel giorno, altre osservazioni sino al 24 e al 26 aprile: nei quali giorni si accertò esser biancastra la regione intorno al Nodo Gordiano. Il 1° giugno, sotto $\omega = 183°$, trovandosi tale regione nella parte sinistra del disco, Marte apparve tutto bianco da quel lato, e specialmente verso l'orlo c'era un contorno di bianco più vivo, che andava da un polo all'altro; sopra tutto il resto spiccava più fortemente il bianco di Memnonia.

745. Durante l'accennato periodo 18-25 marzo il Piriflegetonte si mostrò sottile, bello, e ben formato, il che finora non era mai avvenuto di osservare (§§ 500, 639); era sottile anche il giorno 19, quando quasi tutti gli altri canali di questa regione si mostrarono più larghi del solito, come fu detto di sopra. Fu visto ancora il 26 aprile, senza che nulla offrisse di notevole; nell'ultima osservazione, che fu addì 2 maggio, è segnato come largo e confuso.

746. Il Flegetonte, che nel 1884 era rimasto invisibile, nel 1886 si presentò sempre con facilità ed era ben formato. Il 18 marzo è notato come « bellissimo, sottile abbastanza, nero e ben definito »; il 20 era « semplice e sottile », il 23 era « bellissimo ». Si mutò quindi, e il 25 marzo, attraverso ai campi biancheggianti di quella regione, sembrò più largo di prima. Fu visto ancora il 26 aprile e il 2 maggio. — È mio dovere notare, che la disposizione del Flegetonte non fu la medesima in tutti i disegni di quest'anno. Nei giorni 17, 18, 19 marzo mi parve facesse capo alla Propontide inferiore, come ho indicato sulla carta; invece il 20 e 23 marzo è terminato alla Propontide superiore. Nei giorni 17 e 19 marzo mi parve talvolta che dalla Propontide inferiore si dirigesse all'intersecazione dell'Acheronte col Sirenio, tal altra mi parve seguire una linea più bassa che dalla stessa Propontide si dirigesse verso Tempe. L'una e l'altra linea figurano nel disegno del 19 marzo (figura I), ed anche sulla Carta annessa alla presente Memoria. La difficoltà di queste osservazioni era sempre grande.

747. L'Acheronte fu veduto con qualche difficoltà il 17 marzo; nella sua intersezione col Sirenio formava una piccola macchia confusa, che non fu possibile di esplorare altre volte in miglior posizione. Il 18 marzo era distintamente visibile, ma più grosso nella parte compresa fra il Sirenio ed il Ceraunio. Il 19 marzo era largo tutto quanto, il 20 ancora tutto ben visibile. Il 23 invece non fu possibile di trovarlo, benchè contemporaneamente benissimo si vedessero il Flegetonte ed il Piriflegetonte. Il 1° giugno credetti di rivederlo, ma era debolissimo.

748. Del Gigante si cominciò a vedere il 17 e 18 marzo la parte occidentale dal Mare delle Sirene al Nodo Gordiano. Il 19 marzo fu visto tutto, largo come pa-

recchi de' suoi vicini; il 20 era come un nastro di color rosso mattone molto manifesto. Dopo il 20 marzo una sola volta, il 26 aprile, fu veduto ancora il Gigante, « che forse è doppio », dice la nota di quel giorno.

749. L'Eumenide non si riuscì a metterlo in evidenza che tre volte, il 17, 19 e 20 marzo. Nella seconda osservazione era largo e rosso come parecchi altri furono in quel giorno. — Il Nodo Gordiano, formato dall' intersezione dell' Eumenide col Sirenio, col Gigante e col Piriflegetonte, fu veduto parecchie volte, sempre come macchia sfumata ed indecisa: come altre volte, si presentava meglio per contrasto a sinistra del meridiano 30° o 40° dal centro, quando il pianeta in quella parte era velato di bianco.

750. Notevoli furono questa volta i fenomeni presentati dal Sirenio. Il punto in cui esso è intersecato simultaneamente dall' Acheronte e dal Flegetonte, e il punto in cui esso incontra il Nodo Gordiano, lo dividevano in tre sezioni, che mostrarono apparenze diverse.

Marzo 17, $\omega = 158°$. Veduto e disegnato la sezione media, molto lontano dal meridiano centrale; è larga, e appena più scura che il fondo circostante. — *Marzo* 18, $\omega = 142°$. Il Sirenio si vede tutto giù fino alla Palude Meotide come striscia molto irregolare, ma larga e rossigna. — *Marzo* 19, $\omega = 140°$. Il tronco medio del Sirenio è più oscuro che l'altra parte al di sotto: ha un aspetto suo particolare, pieno di minute irregolarità. — *Marzo* 20, $\omega = 122°$. Tronco di mezzo del Sirenio più grosso, ma più brutto dell' inferiore. — *Marzo* 21, $\omega = 117°$. Veduta la parte media del Sirenio. — *Marzo* 23, $\omega = 154°$. Veduto il Sirenio medio, grosso e distinto e bello e cospicuo per dimensioni. — *Marzo* 25, $\omega = 130°$. Veduto prima il tronco medio, poi tutto il Sirenio, che va d'alto in basso obliquamente; pare sottile, o almeno men largo di prima.

Aprile 26, $\omega = 167°$. Visto il pezzo grossolano del Sirenio, già disegnato tempo fa. — *Aprile* 27, $\omega = 140°$. Visto il Sirenio fra Flegetonte ed Eumenide. — *Aprile* 28, $\omega = 137°$. Visto il solito pezzo del Sirenio. — *Maggio* 1. Sirenio inferiore largo e confuso.

751. Risulta, confrontando queste note coi disegni presi (uno dei quali abbiamo riprodotto nella figura I), che il tronco superiore del Sirenio al sud del Nodo Gordiano fu sempre poco visibile: anzi non fu veduto il 21 marzo, e neppure in alcuna delle osservazioni dell' aprile e del maggio. Il tronco inferiore era sempre visibile, benchè di colore poco marcato; il 1° maggio fu notato in modo speciale. Il tronco medio durante le osservazioni del marzo e dell' aprile fu di gran lunga più visibile che gli altri due tratti. Ma nelle osservazioni dal 17 al 21 marzo questa parte del Sirenio presentò l'aspetto di una striscia larga rossa, tutta piena di macchie e di nodi irregolari, che non si potevano ben distinguere un dall' altro. Ciò spiega le qualificazioni di « brutto e di grossolano » che si trovano nel diario, e che si comprendono col concorso dei disegni, i quali benchè in fretta e rozzamente eseguiti indicano abbastanza di che si trattasse. Niente di simile mi è avvenuto d' incontrare nelle mie osservazioni di Marte in tanti anni; a meno che non si voglia trovar qualche analogia colle macchie di cui erano sparse nel 1882 le due striscie del Ceraunio (§ 480), e che corrispondevano ai luoghi delle loro intersezioni alle linee per lo più doppie dell' Uranio-Gigante, del Dardano-Acheronte, e del Nilo-Flegetonte. Se l'assimilazione fosse giusta, converrebbe concluderne, che le macchie ed i nodi del Sirenio fossero determinati dalle intersezioni sue con tutti i tratti molteplici, che costituiscono il

viluppo di linee detto Nodo Gordiano; tratti di cui si conoscono gli appartenenti al Piriflegetonte, al Gigante, all' Eumenide, al Gorgone; a questi si dovrebbero aggiungere le intersezioni coll' Acheronte e col Flegetonte. — Notisi che contemporaneamente (21 marzo) si resero visibili le intersezioni reciproche dei canali non solo lungo il Sirenio, ma in tutta l' area qui considerata, come si è detto sopra (§ 744).

752. Il Titano fu sempre veduto dal 16 marzo al 1° di giugno, e sempre con molta difficoltà. Molte volte appena si poteva congetturarne l' esistenza, senza che si possa decidere se ciò provenisse dal colore scialbo o dall' estrema sottigliezza della striscia colorata che lo rappresentava. Il 21 aprile ($\omega = 202°$) non si vedeva affatto e il 1° giugno ($\omega = 200°$) non si potè vedere che dall' Acheronte-Erebo in giù. Tuttavia ambedue queste osservazioni furon fatte quando il Titano era già a 30° al di là del meridiano centrale, col diametro apparente del pianeta ridotto ad 11″ ed 8″ rispettivamente; il che le rende meno decisive. Il Titano sempre fu veduto formare il lato orientale delle due Propontidi; al di là di queste formava un prolungamento molto grosso e visibile, che non andava dritto al polo, ma sembrava congiungersi a sinistra di questo col prolungamento analogo di Hades; ambi i prolungamenti insieme congiunti davano origine a ciò che sopra (§ 735) abbiam chiamato Passo di Arione fra la neve boreale e l' isola di Ierne. Veggasi per queste particolarità la carta in proiezione polare, aggiunta a corredo della presente Memoria.

753. Niente fu veduto in quest' anno (e, come credo, niente si era veduto nel 1884) di una linea, che secondo il tracciamento del 1882, unirebbe la foce settentrionale del Sirenio e la Palude Meotide con una delle Propontidi. Bensì ripetute volte è stata osservata una forte striscia, ora più ora meno definita, che congiungeva la detta foce del Sirenio e la parte australe della Meotide col Lago Arsenio: striscia già indicata anche dalle osservazioni del 1884. L' abbiam denominata Ilisso. Qualche volta ebbe forma di canale abbastanza definito, facilmente visibile e pel colore e per la grossezza; tanto che al 1° giugno ancora si potè segnarlo come presente. L' Ilisso sembra alquanto inclinato al parallelo di Marte e separa le regioni d' Arcadia da quelle di Scandia. Quest' ultima formava una specie d' isola piuttosto grande, compresa fra l' Ilisso, la Meotide, il Titano prolungato, il Lago Arsenio, e un altro canale che la separava dall' isola di Ierne. A cagione della grande obliquità non fu possibile definire esattamente la sua forma; il colore era chiaro, anzi il 25 marzo fu segnata come brillante.

754. Chiazze bianche appartenenti alla regione qui descritta furon vedute in Arcadia il 25 marzo e forse anche il 17 marzo. La Memnonia, come già dicemmo di sopra, non mostrò il solito bianco, nelle osservazioni dei giorni 17-21 marzo; però durante l' imbrattatura generale del 25 marzo (§ 744) Memnonia brillava all' orlo manco più di ogni regione circonvicina. Anche il 1° giugno, veduta pure all' orlo manco, parve più chiara del consueto.

755. Parecchie volte nel corso di questa opposizione fu osservata sull' alto del disco una piccola macchia bianca, di cui il luogo non sembrava riferibile ad alcuna delle isole conosciute del Mare Australe. Ecco le note che ne furono prese e gli angoli di posizione, che ne furono misurati.

Marzo	19	$\omega = 140°$	Nel disegno fatto in questa posizione è segnata all'orlo superiore una macchia bianca larga forse 20°. L'angolo di posizione, misurato su di esso disegno, sarebbe circa 207°.
—	20	126	Bianco piccolo, ma vivo, nella direzione quasi di Thyle I.
—	20	138,25	Più piccola e più difficile della neve polare: pare un punto indivisibile. Posizione 211°25.
—	21	124	Piccola macchia bianca all'orlo superiore.
—	22	106,15	Piccola macchia bianca. Posizione 183°20.
—	23	153,77	Punto di neve in alto a sinistra; Pos. 227°80.
—	25	123,85	Poco brillante, ma più larga di prima; Pos. 201°80.
—	25	127,01	Posizione 205°80: bianca quasi come la neve polare.
—	25	135,51	Posizione 211°80.
—	25	146,44	Posizione 218°30.
—	26	98	Punto bianco sul vertice.
Aprile	28	135	Neve in alto del disco.
Maggio	1	113,04	Macchia bianca quasi esattamenue opposta alla neve polare. (Quindi si deduce la posizione di 194° a un dipresso).
Giugno	5	145	A manca in alto brilla una macchia bianca.

756. Adottando ora gli angoli di posizione del polo australe p quali risultano dall'Effemeride del sig. Marth [1] e calcolando con essi le digressioni della macchia bianca dal detto polo (cioè la quantità $P - p$), aggiungendo in fine gli altri dati in forma tabellare, si hanno i risultati che seguono:

Data: 1886	ω	Posizione osservata P	p	$P - p$	$\omega - 117°$	ε
	°	°	°	°	°	°
Marzo 19	140,00	207,00	196,04	+ 10,00	+ 23,00	(— 10,0)
Marzo 20	138,25	221,25	195,84	+ 25,41	+ 21,25	+ 5,7
Marzo 22	106,15	183,20	195,46	— 12,26	— 10,85	— 2,1
Marzo 23	153,77	228,00	195,28	+ 32,72	+ 36,77	+ 1,1
Marzo 25	123,85	201,80	194,95	+ 6,85	+ 6,85	+ 0,3
— 25	127,01	205,80	194.95	+ 10,85	+ 10,01	+ 1,3
— 25	135,51	211,80	194,95	+ 16,85	+ 18,51	— 0,3
— 25	146,44	218,80	194,95	+ 23,35	+ 29,44	— 2,9
Maggio 1	113,04	194,00	193,63	+ 0,35	+ 3,96	(+ 4,2)

Costruendo poi una serie di punti avente per ascisse le quantità ω e per ordinate i corrispondenti valori di $P - p$, si trova che essi formano una serie sufficientemente regolare, e che la curva a cui si adattano meglio taglia l'asse delle ascisse prossimamente in $\omega = 117°$. Tale è dunque il valore di ω, per cui la macchia passava al meridiano centrale, o in altri termini, la longitudine areografica della macchia [2].

[1] *Ephemeris for Physical Observations of Mars*, Monthly Notices of the R. Astron. Society, vol. XLVI, pp. 30-31.

[2] In questo procedimento abbiam supposto costante l'inclinazione dell'asse alla visuale, ed uguale a 68°.

Di qui è facile dedurre anche la sua latitudine, che risulta di 36° australe. Queste ipotesi sulla posizione della macchia lasciano gli errori residui indicati nell'ultima colonna della tabella qui sopra; i quali, quando si escludano il primo e l'ultimo che derivano da stime d'occhio e non da misure regolari, sono sufficientemente piccoli per render plausibile che tutte le accennate osservazioni si riferiscano ad un medesimo oggetto non molto variabile di forma e di luogo. La macchia bianca adunque si trovava nella regione Icaria, presso la riva del Golfo Aonio: essa durò certamente dal 19 marzo al 1° maggio, e probabilmente esisteva ancora il 5 giugno.

Sezione VIII.

Eliso e regioni circostanti fra il Titano e la Piccola Sirte.

757. La regione circolare detta Eliso si mostrò sempre uniforme di colore e di chiarezza in tutta la sua estensione; nessuna traccia fu veduta neppur quest'anno del Galaxias (§ 530). Il diametro della regione mi pare che fosse alquanto maggiore di altre volte, ma non avendo fatto misure in proposito mi è impossibile affermare la cosa in modo preciso sulla sola fede dei disegni. Dal 7 marzo al 1° giugno fu posta mente alle consuete variazioni di albore, che distinguono questo luogo: ecco le note fatte:

Marzo	7	$\omega = 265°$	Eliso bianco-pallido, ma ben distinto, al lembo sinistro.
—	9	228	Eliso nel mezzo: il suo bianco non è molto apparente.
—	10	227	Circolo bianco d'Eliso si distacca bene.
—	12	207	E. non più bianco delle regioni circostanti.
—	13	195	E. bianco a destra.
—	16	157	E. bianco all'orlo destro.
—	17	150	id.
—	19	127	E. bianco all'orlo estremo destro.
—	20	125	Bianco poco sensibile dalla parte di Eliso.
—	23	158	Bianco in Eliso.
Aprile	21	202	Nessuna traccia di bianco.
—	24	180	Un po' più chiaro che gli spazi circostanti.
Giugno	1	195	Non molto chiaro.

758. I canali che determinano il perimetro dell'Eliso furono in questo anno sempre poco ben definiti quanto a forma e contorno, tutti però bene visibili, quantunque non sempre tutti in egual grado d'intensità e di larghezza. Perciò il loro insieme produsse sempre l'impressione piuttosto di una circonferenza di circolo, che di un poligono ad angoli marcati. Nelle diverse parti si notarono più volte sensibili diseguaglianze. Il 9 marzo sotto $\omega = 228°$ si riuscì a constatare solo una parte del perimetro di Eliso, mentre un po' più tardi sotto $\omega = 236°$ fu possibile vederlo tutto intiero. Il giorno 10 marzo la cornice circolare si vedeva tutta, ma nella parte in-

feriore dal Trivio all' Efesto era molto più larga e visibile, che nella parte superiore fra i medesimi limiti; il che significa, esser stati in quel momento lo Stige, il Boreas e l' Ibléo più appariscenti del Cerbero e dell' Eunosto. Tutte le linee in questione erano pallidissime « come cenere sopra giallo di cromo ». — Del Cerbero e dell'Eunosto non furono mai vedute che le parti contigue all' Eliso; quindi di Cerbero restò sempre invisibile la bocca nel Mare Cimmerio (segnata x sulla carta del 1882); così pure di Eunosto mancò affatto il prolungamento verso il Mare Cimmerio, detto Anteo; e l' altro prolungamento opposto, se vi fu, fu certamente molto confuso e nei disegni non risulta chiaramente. Lo Stige fu sempre ben marcato, così pure l' Ibléo, benchè non terminati con precisione, e così pure la sezione del Boreas contigua all' Eliso, ma non l' altra, la quale fu per lo più invisibile, e soltanto qualche volta (23 marzo, 1° giugno) era indicata da un' ombra rara e diffusa.

759. L' Etiope ed il Lete furon veduti alcune volte fra il 10 marzo e il 25 maggio. L' Etiope fu talvolta abbastanza scuro e cospicuo, specialmente nei giorni 11-12 marzo e 23 maggio. — Ma più cospicuo assai di questi due fu il Ciclope, osservato la prima volta il 9 marzo, l' ultima il 1° giugno. Era perfettamente dritto, ben tracciato, nero; e per quanto si è potuto capire, anche non geminato. Nei giorni 9 e 10 marzo pareva di vederlo seguire il meridiano approssimativamente, ma più diligente esame nei giorni seguenti fece riconoscere una inclinazione di circa 12°, che durò poi costante fino alla fine delle osservazioni. Ritengo come certo, che l' unica linea visibile (delle quattro note nel fascio del Ciclope) fu quella obliqua che congiunge l' estremità inferiore del tratto II con la superiore del tratto I (vedi la carta del 1882), la quale anche per lungo tempo si mostrò durante l' opposizione del 1884. Il suo prolungamento ideale verso nord non si scostava gran fatto dal centro dell' Eliso. Per questo motivo escludo che essa linea abbia ad identificarsi col tratto a del 1882; al quale probabilmente essa è parallela, e collocata circa 4° più a ponente.

760. Il Trivio di Caronte non si mostrò altrimenti che sotto forma di macchia oscura allungata trasversalmente e mal definita; soltanto il 17 marzo gli trovo attribuita la forma di rettangolo. Malgrado il suo aspetto piuttosto confuso, fu facilmente veduto in ogni occasione, dal 9 marzo al 1° giugno. — Invece l' Efesto (il quale secondo le osservazioni del 1884 ha col Trivio una probabile relazione) fu veduto poche volte con qualche distinzione; addì 11 marzo si mostrava anch' esso come macchia oblunga trasversale poco definita, allungata nella stessa direzione che il Trivio.

761. Ad eccezione dell'Averno, di cui non trovo nota, tutti i canali collocati fra il Titano e l' Eliso sono stati riveduti. — L'Orco una sola volta, il 17 marzo in aria ottima; era molto difficile, e appena si poteva affermarne l' esistenza. — Evidente e ben delineato il Tartaro, che fu facilmente distinto in più occasioni, la prima volta il 16 maggio, e l' ultima volta il 1° giugno, con un disco apparente di soli 8″. — A quella data era pure ancora visibile il Lestrigone, che sempre si era mostrato molto facile fin dal 10 marzo: il 16 marzo era grossissimo. Il suo corso era sempre lo stesso che nel 1882 e nel 1884; imboccava lo Hades, e non lo Stige, come faceva nel 1879. — Poco notabile invece fu l' Erebo, che appare sui disegni del 17 e del 19 marzo come una striscia leggera formante continuazione dell'Acheronte.

762. L'Hades, prolungamento boreale del Lestrigone, non solo si mostrò sempre evidente e grosso in tutte le osservazioni dall' 11 marzo al 1° giugno, ma pose questa volta in evidenza tutta la sua lunghezza, dal Trivio fino all'immediata prossimità della neve polare. Esso correva verso il polo, non tendendo tuttavia direttamente a questo, ma lasciandolo a destra (come già vedemmo fare il Kison ed il Titano), andava a congiungersi coll'analogo prolungamento del Titano, formando con esso il Passo di Arione, che è un ramo del Lago Iperboreo (§ 735). Veggasi la carta in proiezione polare e i disegni del 17 e del 19 marzo (fig. I e VI). La parte estrema che fiancheggia le Propontidi e il Lago Arsenio era anche più visibile del resto, e formava una striscia scura, larga, mal terminata, e confusamente intrecciata colle altre ombre diffuse che occupavano quella regione.

763. Tutta l'area dal 40° parallelo fino al polo, compresa fra i meridiani 150° e 250° ha presentato gravi difficoltà all'esame telescopico. Due sistemi d'ombre lunghissime, diffuse, e complicate si mostrarono dapprincipio (10-11-12 marzo, vedi la fig. V). L'uno comprendeva più nuclei oscuri fra i prolungamenti del Titano e dell'Hades, connettendosi, presso la neve polare, col Passo di Arione; l'altro seguiva il corso dell'Anian prolungandolo verso nord, e si estendeva in quella direzione fin quasi a contatto colla neve polare, connettendosi ivi presso al nodo oscuro, dove dicemmo (§ 713) terminare verso settentrione il Kison. Non vi eran nuclei di qualche conto, ma solo linee di maggior densità; una seguiva press' a poco la direzione dell'Anian, formandone quasi il prolungamento boreale, e poteva considerarsi come l'asse longitudinale di tutta l'ombra; altre linee, il cui numero non era facile a definire, parevano seguire direzioni poco diverse dal parallelo. La figura V può dare un'idea dell'aspetto che presentava quella regione il 12 marzo. Nel mezzo fra i due sistemi d'ombre rimaneva una zona relativamente chiara di non molta larghezza, della quale l'asse seguiva presso a poco il 210° meridiano. Era questa zona solcata da parecchie strisce d'ombra diffusa, correnti in direzione poco diversa dal parallelo, le quali dipartendosi dalle grosse macchie o nuclei dell'ombra di sinistra, andavano a raggiungere (o così pareva) l'asse longitudinale dell'ombra di destra. Devo ora esporre separatamente i fenomeni che si svolsero nella prima e nella seconda ombra.

764. I contorni diffusi dell'ombra di sinistra non tardarono a ritirarsi, concentrandosi poco a poco sui nuclei neri che abbiam detto, e finirono per uscirne, nettamente terminate in campo giallo, almeno sopra una parte del loro perimetro, le due Propontidi ed il Lago Arsenio, che occupavano il luogo dei nuclei sopradetti. La metamorfosi era press'a poco compiuta il 16 marzo, e lo stato delle cose, rappresentato il meglio che si è saputo nei disegni del 17 e del 19 marzo (figure I e VI), non cambiò più gran fatto, per quanto si è potuto vedere, sino alla fine delle osservazioni. Tutte e tre le grosse macchie summentovate erano oscure, il 21 marzo furon dichiarate nerissime. Esse terminavano dal lato sinistro sulla linea del Titano con contorno rettilineo abbastanza preciso, e si protendevano verso destra in direzione press' a poco ad esso perpendicolare in forma di larghe e corte zone d'ombra fra loro parallele. Le due Propontidi erano divise da un piccolo intervallo chiaro, e formavano a loro due una geminazione imperfetta e tozza, simile a quelle già vedute in altri laghi, ma di una larghezza di cui finora non si aveva avuto ancora alcun esempio. Io stimo

che dall' orlo superiore della Propontide I (australe) all' inferiore della Propontide II (boreale) l' intervallo non fosse minore di 12° o 15°. La Propontide I fu da principio (16-17 marzo) incompleta; come si vede dal disegno di quel tempo (figura VI) era più stretta dell' altra e più breve; e non raggiungeva lo Hades, al quale tuttavia arrivò nei giorni seguenti. In questo stato iniziale, e anche dopo che fu completa, la sua tinta non era dappertutto uguale: l' oscurità era forte e massima in riva al Titano, donde andava digradando verso destra in modo da perdersi in una sfumatura, che più tardi si rinforzò e si prolungò fin all' Hades, connettendosi al Boreas, che qualche volta fu visibile come rarissima striscia continuante la Propontide I al di là dell' Hades. Ma la tinta sull' Hades rimase sempre più chiara che sul Titano. Simile decremento di tinta da sinistra a destra era già stata osservata il 27 febbraio 1884 in ambedue le Propontidi, siccome risulta dal disegno di quel giorno, annesso alla Memoria IV. — La Propontide II (o boreale) si mostrò fin da principio (16 marzo) completa dal Titano fino all' Hades, più larga e più scura della Propontide I; la sua tinta parve già allora più uniforme in tutta la sua lunghezza; il confine destro però non terminava nettamente all' Hades, ma talvolta parve spingersi con sfumatura indeterminata anche al di là di questo per formare la linea sfumata e nebulosa segnata col nome di Gyndes. — Malgrado la differenza d' aspetto, io considero le due Propontidi di quest' anno come due parti di una medesima geminazione colossale, la quale imperfettamente si prolungava nelle due linee, parallele o quasi, del Boreas e del Gyndes. Confrontando l' aspetto di essa geminazione con quanto ne fu osservato nel 1884, si trovano grandi differenze. Quindi si avrebbe un nuovo esempio della variabilità delle geminazioni da un' epoca all' altra, da aggiungere a quanto su tale proposito già si è riferito nella Memoria precedente, § 694.

765. Il Lago Arsenio anch' esso si estendeva fra le linee del Titano e dell' Hades: siccome però in così alta latitudine queste linee si avvicinano molto fra di loro, la sua dimensione nel senso del parallelo era molto minore che per le Propontidi. Era però maggiore nel senso del meridiano. Dalle Propontidi lo separava uno spazio giallo; così pure gialla era la regione Scandia che lo limitava dalla parte del Titano. Verso occidente usciva dall'Arsenio una zona nebulosa e rara, press' a poco simile e parallela al Boreas ed al Gyndes, ma molto più larga, che sulla carta è segnata col nome di Cefiso. Il limite dell'Arsenio da questa parte era poco ben definito; meglio lo era sotto il Cefiso e dalla parte orientale. Del resto in tanta obliquità e col diametro apparente di soli 14″ era difficile rendersi conto esatto di tutte le relazioni esistenti fra spazi chiari, ombre oscure ed aree di tinta intermedia, specialmente dove mancavano linee precise e ben definite. La carta in proiezione polare dà il risultato delle congetture più plausibili che si trassero da uno studio diligente dei disegni fatti nei giorni 16-23 marzo. — Nei giorni 21-27 aprile si potè ancora fare qualche esame così dell'Arsenio, come delle Propontidi, il quale confermò a un dipresso le cose prima vedute; nè alcuna grande mutazione aveva avuto ancora luogo il 1° di giugno, in cui per l' ultima volta fu possibile veder alquanto bene i particolari di questa regione.

766. Nell' altro sistema d' ombre della figura V, che dicemmo allungarsi verso il polo dall' Eliso nella direzione dell'Anian, poco si è potuto discernere fuori della

generale giacitura e della estensione, che da principio (11-16 marzo) fu grandissima, come dalla detta figura si vede. Nell' aprile le osservazioni in questa parte furono quasi totalmente impedite dal cattivo tempo, ed una sola volta (21 aprile) ho potuto constatare che l'ombra in discorso si era già ristretta notabilmente, crescendo in definizione di contorni ed in intensità, e formando una zona di forse 10° di larghezza, posta come prolungamento dell'Anian. Lungo essa due nuclei di maggior intensità si eran formati, l' uno in corrispondenza della Propontide inferiore, collegato con essa per mezzo di una striscia poco definita, che risultò esser il Gyndes già nominato; l' altro in corrispondenza del Lago Arsenio, collegato con esso per mezzo di altra zona nebulosa più larga, che era poi il Cefiso. Fra il Cefiso e la neve polare non furono vedute ombre di grande oscurità. Una lieve striscia obliqua, notata il 19 marzo (fig. I) è stata segnata anche sulla carta; osservazioni ulteriori indicheranno, se ad essa corrisponde qualche cosa di permanente. — Più tardi (20 maggio-1° giugno) si ebbero varie occasioni di esaminare questa parte, e specialmente il 1° giugno. Fu allora constatata la connessione dell' ombra grande, e della sua linea longitudinale più scura, col Kison presso la neve polare, e furono riveduti il Cefiso ed il Gyndes, i quali col Boreas press' a poco loro parallelo davano alla parte inferiore del disco un' apparenza striata. Nessuna delle predette linee si presentò mai sotto forma di canale ben definito, e tutte conservavano sempre un aspetto più o meno nebuloso. — Le connessioni del Gyndes colla Propontide II, del Boreas colla Propontide I e del Cefiso col Lago Arsenio già del resto erano state osservate più volte anche nel marzo, e sono rappresentate nella fig. I e VI, in forma di appendici nebulose di quei tre laghi verso l' occidente.

767. Oltre al già descritto albore dell' Eliso, altre macchie bianche in questa regione furon vedute soltanto nella parte contigua al Mare Cimmerio; il 23 maggio ($\omega = 277°$) fra l' Etiope ed il Lete, il 24 maggio ($\omega = 264°$) fra l' Etiope ed il Ciclope, il 25 maggio ($\omega = 260°$) fra l' Etiope e il Lestrigone dalle due parti del Ciclope; sempre quando le regioni bianche erano prossime al lembo sinistro. È curioso che negli stessi giorni nulla fu notato del color bianco d' Eliso, quantunque la posizione del medesimo rispetto al meridiano centrale fosse a ciò abbastanza opportuna.

Sezione IX.

Mari interni e terre australi dal 130° al 310° meridiano.

768. Durante l' intiera serie d' osservazioni l'obliquità dell' asse di Marte essendo stata molto grande (fra 22° e 25°), il Mare delle Sirene si trovò sempre in posizione fortemente obliqua, in modo da riuscire bene definito soltanto in condizioni favorevoli d'atmosfera. In tale obliquità esso appariva come una sottile striscia molto oscura quasi all' estremo limite superiore del disco, o di un *verme nero*, come trovo scritto nel diario sotto la data del 18 marzo. Similmente la parte del Mare Cimmerio compresa fra le longitudini 170° e 210° si presentava tanto obliqua, da riuscir visibile solo con qualche attenzione, specialmente nell' aria non intieramente buona. Niente è

dunque da meravigliare, che l'Atlantide in quest'anno non sia stata veduta, anche ponendo a scoprirla tutta la possibile attenzione. — L'altra parte del Mare Cimmerio, che più si approssima all'equatore, fu invece sempre facile a distinguere e abbastanza oscura; nessuna traccia vi era dell'isola Cimmeria veduta nel 1882. — Fra il Cimmerio ed il Tirreno spiccava abbastanza la penisola Esperia, in forma di sottile lingua gialla alquanto più larga in basso che in alto; tanto era distinta, che ancora il 25 maggio, quando il diametro del pianeta era ridotto a 8″5 si potè (col Refrattore Merz di 18 pollici) vedere il taglio oscuro che l'attraversa sotto la latitudine di 22° in direzione quasi perpendicolare alla sua lunghezza (§§ 527, 390). — Nello stesso giorno 25 maggio fu veduta bene la parte media di Ausonia, e notato in essa l'Euripo, che è la continuazione del predetto taglio di Esperia. Per le diramazioni boreali di Ausonia a traverso della Gran Sirte, vedi qui sotto § 773.

769. La zona formata dalle regioni Fetontide, Elettride, Eridania, Ausonia superiore e Chersoneso si confondeva coll'orlo luminoso del lembo superiore; in quella parte non si vide altro che alcune macchie bianche di cui si dirà fra poco. L'Ellade apparve sempre come una nube ellittica di bianco or più or meno pronunziato, come risulta dalle note seguenti:

Febbraio	2	$\omega = 262°$	Biancastra.
Marzo	4	291	Biancastra.
—	7	304	Nube bianco-grigia.
Aprile	5	339	Grossa nube bianca.
—	7	338	Bianco schietto, quasi brillante.
—	16	294	Quasi come neve, irregolare.
Maggio	15	335	Grossa e biancastra.
—	16	322	Biancastra.
—	17	314	Grossa, bianco schietto, benchè non brillante.
—	18	336	Bella, bianca quanto la neve polare.
—	19	310	Bianca al solito.
—	20	301	Bella bianca, molto più grande che la neve boreale.
—	21	294	Neve sull'Ellade.
—	22	282	Tutta bianca, di bianco però non continuo, ma diffuso e mal terminato.
—	23	274	Bianco non brillante.
—	24	264	Comincia a comparir in alto il bianco d'Ellade.

Generalmente, per quanto si poteva stimare, la macchia bianca rappresentante l'Ellade aveva un diametro assai minore di quello con cui questa grande isola è figurata sulle carte, che ne danno l'estenzione quale si mostra nelle sue apparenze ordinarie. — Non è necessario dire, che nulla si vide dei due canali formanti croce in Ellade, l'Alfeo ed il Peneo.

770. Oltre a questa, parecchie altre macchie bianche si presentarono lungo la linea che va dal Golfo Aonio all'Ellade. Una si trovava in Icaria, ed è già stata descritta nei §§ 755, 756. — Un'altra apparve il 24 e il 26 aprile al sud del Mare delle Sirene, essendo ω rispettivamente 178° e 159°; al momento dell'osservazione l'attribuii a Thyle I, ma questa forse era troppo vicina al terminatore, onde credo più probabile che occupasse qualche parte della Fetontide; non avendo preso misure, è ora impossibile decidere la cosa. — Il 1° giugno sotto $\omega = 190°$ fu veduto del bianco

sopra il Mare Cimmerio, probabilmente nell' Elettride. — Finalmente un' intiera serie di osservazioni fu fatta sopra un' altra macchia che durò per due mesi e mezzo, e di cui espongo qui i particolari:

Marzo	7	$\omega = 271°$	Un po' a sinistra della direzione del polo australe si vede l' orlo bianco.
—	8	256	Macchia bianca in alto, non molto splendente, però distinta.
—	9	239	In alto macchia bianca quasi altrettanto bella che la neve boreale.
—	10	220	In alto chiaro che par neve.
—	11	222	Simile alle neve boreale, ma molto più piccola.
—	12	204	Poco visibile: assai più piccola della neve boreale.
Maggio	25	256	Macchia bianca in alto, esattamente opposta alla neve boreale.

771. Di questa macchia furono determinati i 12 angoli di posizione segnati nella Tabella seguente sotto l' intestazione P: accanto è indicato il valore di ω che corrispondeva al momento della misura. Adottando per la posizione p dell' asse di Marte i valori dati dall' Effemeride del signor Marth, si formarono le digressioni $P - p$ della macchia dalla direzione del polo, assegnate nella Tabella medesima. Nell' ipotesi (ammessibile senza grave errore nel caso presente) che l' inclinazione dell' asse di Marte rispetto alla visuale potesse riguardarsi come costante, abbiamo considerato i valori della digressione $P - p$ come funzioni del solo ω; e abbiamo concluso, che la serie di punti costrutti con ω per ascissa e con $P - p$ per ordinata dovrebbe dare una curva continua, se non fosse degli errori di misura dell' angolo P. Ciò si verificò con sufficiente approssimazione per tutte le misure, salvo che per la seconda del 12 marzo, in cui sembra sia occorso un errore piuttosto grave. La curva in questione mostra, che P-p era nullo, e la macchia passava al meridiano centrale quando $\omega = 253°$; tale era dunque la sua longitudine areografica. Di qui fu facile dedurre la latitudine, che dal complesso delle osservazioni (esclusa la seconda del 12 marzo) risulta di 55°3 australe. Affinchè si possa giudicare del grado di esattezza con cui queste coordinate rappresentano le osservazioni, ho apposto nell' ultima colonna della Tabella gli errori ε, che restano nei valori osservati di $P - p$ quando si confrontano con quelli calcolati prendendo le dette coordinate per base.

Data: 1886		ω	P	$P - p$	$\omega - 253°$	ε
Marzo	8	256°,05	199°,10	+ 0°,70	+ 3°,05	— 0°,95
Marzo	9	228,39	184,70	— 13,74	— 24,61	+ 0,16
—	9	239,57	189,80	— 8,34	— 13,43	— 0,61
Marzo	10	220,22	180,10	— 17,85	— 32,78	+ 0,26
—	10	240,38	190,80	— 7,15	— 12,62	+ 0,37
Marzo	11	211,03	174,90	— 22,80	— 41,97	— 0,35
—	11	222,46	181,55	— 16,15	— 30,54	+ 0,83
—	11	237,53	189,35	— 8,35	— 15,47	+ 0,56
—	11	250,65	197,89	+ 0,19	— 2,35	+ 1,97
Marzo	12	203,81	171,80	— 25,72	— 49,19	— 0,20
—	12	246,82	188,10	— 9,42	— 6,18	(— 5,82)
Maggio	25	255,80	197,33	± 0,00	+ 2,80	— 1,63

La piccolezza veramente inaspettata di questi errori residui (i quali forse con ulteriore elaborazione si potrebbero ancora ridurre, se ne fosse prezzo dell'opera) mostra che la macchia dall'8 marzo al 25 maggio rimase aderente col suo centro al punto, di cui le coordinate sono prossimamente

Longitudine 253° Lat. australe 55°,3;

punto collocato, secondo la nostra carta, nel Golfo di Prometeo, in un luogo dove non è alcuna terra. Siccome però tali macchie bianche, stando all'esperienza sin qui fatta, risultano sempre formate sopra aree continentali o sopra isole, o insomma sulle aree gialle di Marte; converrà ammettere, o che si debba portare alquanto più al mezzodì la costa del Chersoneso vicino, la quale non dista più di due o tre gradi dal punto suddetto; oppure che si debba collocare in quelle parti del Golfo di Prometeo qualche isola ancora sconosciuta; la quale, se esiste, non mancherà di rivelarsi ai futuri osservatori.

772. Considerando la Tabella qui sopra e specialmente la colonna delle quantità $\omega - 253°$, si troverà che esse sono quasi tutte negative: il che indica, la macchia bianca essere stata quasi sempre osservata a destra del meridiano centrale, sebbene le opportunità di osservarla anche a sinistra non siano certamente mancate in tutto il tempo che fu visibile. La ragione di ciò si vedrà facilmente, notando che nelle configurazioni comprese fra $\omega = 260°$ e $\omega = 300°$ (nelle quali la macchia avrebbe dovuto essere facilmente osservabile), essa si trovava projettata sull'orlo del disco in grande vicinanza dell'Ellade, macchia bianca anch'essa, e di diametro e visibilità molto maggiore; colla quale senza dubbio è stata confusa dall'osservatore non edotto di queste circostanze. Ed è anzi possibile, che le irregolarità notate nell'apparenza dell'Ellade il 16 aprile ($\omega = 294°$) e il 21 maggio ($\omega = 282°$) fossero dovute all'impressione prodotta nel mio occhio dalla discontinuità confusamente intraveduta fra l'Ellade e la macchia in questione (v. § 769). — Un'altra cosa può sembrar notevole; cioè che la macchia bianca, osservata nella prima decade di marzo e nell'ultima di maggio, non sia stata veduta affatto nella seconda decade di aprile, quando si presentavano al centro del disco i meridiani compresi fra 220° e 260°. A ciò risponde bastantemente la Tabella del § 704, dalla quale si vede, che a cagione del cattivo tempo che dominò in quell'epoca, non è accaduto mai di poter osservare il pianeta sotto valori di ω compresi fra 200° e 260°, fatta eccezione della giornata 21 aprile. Le osservazioni di quel giorno furono fatte da $\omega = 200°$ a $\omega = 219°$; ed è facile convincersi, che in tali configurazioni, a cagione della fase già grande, la macchia doveva essere immersa nell'ombra. — Non vi è dunque alcun motivo di supporre che la macchia osservata in marzo ed in maggio abbia cessato di esistere durante l'aprile; è anzi assai più plausibile credere, che essa sarebbe stata osservata anche in quel mese, quando il tempo fosse stato più favorevole alle osservazioni.

Sezione X.

Gran Sirte e sue adiacenze.

773. Della Gran Sirte trovo riferito nel giornale d'osservazioni ripetute volte, che il suo colore era nero, o almeno molto oscuro (marzo 4, 6, 7, aprile 5). Malgrado questo, od anzi forse per cagione di questo, spiccava in essa con evidenza insolita la lunga e sottile striscia chiara, detta Enotria, che forma prolungamento del lato inferiore d'Ausonia. Di questa Enotria nessun indizio si era veduto nell'opposizione precedente (§ 668). Ora non solo era molto evidente, ma ancora tanto continua e regolare, da formare una specie di argine obliquo attraverso alla Gran Sirte, dividendo questa in due parti affatto separate l'una dall'altra. Riferisco testualmente le osservazioni.

1886, *Marzo* 7, $\omega = 265^\circ$: Gran Sirte molto oscura. $\omega = 307^\circ$: pare che l'Enotria sia molto luminosa e tenda a chiudere la Gran Sirte verso Sud-Ovest: peccato che l'immagine sia così cattiva. — *Aprile* 16, $\omega = 294^\circ$: Riveduto il velo di Enotria attraverso alla Sirte: immagine cattiva. — *Maggio* 21, $\omega = 294^\circ$: Vedesi Enotria chiara, così che la Nilosirte pare quasi chiusa in alto. — *Maggio* 22, $\omega = 288^\circ$: Enotria affatto gialla; chiude quasi completamente la Gran Sirte. Non resta più fra essa e la Libia che un filetto nero, il quale forma prolungamento del Mar Tirreno. La maggiore macchia oscura è ancora di fronte alla foce del Nepente. — *Maggio* 23, $\omega = 284^\circ$: Vi è la solita apparenza della Gran Sirte chiusa da Enotria: il suo bacino è ridotto ad una piccola estensione fra Enotria e Libia, formante quasi una continuazione del Mar Tirreno, il quale poi è ridotto ad un filo sottilissimo.

774. Sopra la Nilosirte nei mesi di marzo e di aprile non trovo notato nulla d'insolito: dagli schizzi fatti risulterebbe ch'essa era sempre visibile, non però così larga ed appariscente come nelle opposizioni precedenti. Soltanto il 5 aprile trovo notato ch'essa era interrotta nella parte giacente sotto il 25° parallelo, e tale circostanza è pure indicata nel disegno di quel giorno. Sventuratamente l'osservazione ebbe luogo sotto $\omega = 354^\circ$, quando questa parte era già vicina al lembo sinistro, e la visione assai obliqua. Simili interruzioni della Nilosirte furono notate in ogni tempo e già si trovano presso gli antichi osservatori Maedler e Kaiser. Io mi son domandato se questa volta l'interruzione sia stata reale, o non sia stata conseguenza della grande vicinanza di quella parte della Nilosirte al lembo del pianeta; e sarei più inclinato a quest'ultimo modo di vedere. Talvolta avviene, che una simile apparenza è prodotta, in momenti di visione imperfetta, dall'irradiazione fittizia di macchie più chiare, che spesso compaiono in quelle parti. Sarebbe un fenomeno analogo a quello che in alcuni telescopi presenta la macchia polare, la quale a molti osservatori è sembrata protendersi fuori del disco. Non avendo mai avuto occasione di studiare il fatto con osservazioni proprie, eseguite in buone condizioni, debbo lasciare la questione indecisa. Del resto, simili interruzioni *reali* hanno luogo in altre parti del pianeta; un esempio se ne ha nella Nilosirte medesima, là dove essa termina e comincia la Boreosirte. Forse anche questa interruzione della Nilosirte si connette in

qualche modo col decremento della sua larghezza e della sua intensità; decremento il quale, già abbastanza sensibile nei mesi di marzo e di aprile, ancora più notevole diventò nel maggio. Sotto il 22 maggio, dopo una descrizione della Boreosirte e delle sue ramificazioni, trovo nel diario le seguenti parole ($\omega = 297°$): « in tutto questo è da meravigliarsi come la Nilosirte sia poco spiccata ». E il giorno seguente 23 maggio sotto $\omega = 284°$: « La Nilosirte è poco visibile, e pare più stretta di prima ». Osservazioni che sono confermate dagli schizzi fatti contemporaneamente. — L'Astusape fu veduto in tutte le circostanze d'atmosfera sufficiente, dal 7 marzo in poi, e ancora il 23 maggio col Refrattore di 18 pollici appariva sottile, ma distinto; era incurvato, come nell'opposizione del 1882, e l'Isola di Meroe presentava la forma di mandorla simmetrica dai due lati.

776. L'Alcionio non mancò mai di mostrare la sua punta caratteristica: talvolta apparve nero come la Sirte e ben terminato, altre volte pallido confuso e grigio quale per la prima volta era stato da me veduto nel 1879, ed anche imperfettamente descritto (§ 395). — L'Eliconio fu visto più volte senza difficoltà in varie occasioni (8 marzo, 22-23 maggio): nelle quali occasioni fu distinta bene anche l'isola Utopia, formata dall'Alcionio, dall'Eliconio, e dalla Boreosirte. Invece la regione Uchronia, che sta immediatamente a settentrione dell'Eliconio, il 22 maggio pareva coperta di ombra leggera. — L'Astapo fu notato soltanto nei giorni 21, 22, 23 maggio; bello e sottile alla sua radice nella Nilosirte, si allargava anche questa volta a foggia di pennacchio dalla parte dell'Alcionio con corso fortemente ricurvo. In questa estremità più larga era ridotto d'intensità e faceva un grande contrasto colla punta molto più nera dell'Alcionio. — Nessuna menzione dell'Asclepio, nè nelle osservazioni, nè nei disegni.

777. Il Thoth fu sempre visibile dal 2 febbraio al 23 maggio, benchè sotto aspetto di una striscia piuttosto diffusa e poco ben formata. In corrispondenza al Nepente per un breve tratto pareva rigonfiarsi e formava un nucleo più oscuro, rappresentante dell'antico Lago Tritone del 1877-79 (§§ 161 e 400). Questo nucleo si potè constatare nei giorni 19-20 maggio, coll'aiuto del Refrattore di 18 pollici. — Per tutta la durata delle osservazioni (2 febbraio - 22 maggio) si potè constatare anche la presenza del canale Tritone, almeno nella sua parte compresa fra il Thoth e la Piccola Sirte. Dall'altra parte fra la Piccola Sirte e il Mare Cimmerio non trovo alcuna annotazione; onde pare, che di questo canale sia stata visibile solo la parte destra, come nel 1877 (§ 161).

778. Del Nepente si può dire che fu sempre assai cospicuo dal 7 marzo al 23 maggio sotto forma di striscia abbastanza larga ed oscura, leggermente arcuata, come nelle opposizioni precedenti. Il 17 maggio era grosso e più cospicuo ancora del solito. Il Lago Meride, al quale la forza del Refrattore di 8 pollici questa volta non aveva più potuto arrivare, fu svelato da quello di 18 pollici nei giorni 22-23 maggio, quantunque il diametro apparente del disco fosse già ridotto ad 8″6. In questa osservazione fu impiegata da me per la prima volta l'amplificazione di 1050, che per Marte ben di raro può esser di qualche utilità in questo nostro clima. Apparve il Lago Meride come un bel punto nero, molto vicino alla Gran Sirte; l'intervallo fra i due fu stimato minore del diametro del lago stesso. Da questa osservazione, comparata con

quella degli anni precedenti (§§ 535, 672) appare, che in questa parte il profilo della Sirte non ha più subìto grandi variazioni. — Nulla si vide dell' Athyr, osservato finora soltanto nel 1882. Tuttavia un indizio della sua larga foce nel Nepente credo di averlo ravvisato il 22 maggio.

779. Nella piccola Sirte non furono notate circostanze o mutazioni rilevanti; il 22 maggio essa formava sul disco una macchia oscura molto cospicua. La Libia continuò ad esser rossa ed oscura come nelle ultime opposizioni. Il suo profilo parve meno arrotondato, ed anzi alla fine di maggio pareva che formasse verso Sud-Ovest (dove il Tirreno si congiunge colla Gran Sirte) un angolo piuttosto sentito. Ma neppur questa volta mi riuscì di veder quest' angolo aguzzato e prolungato al punto da tagliare la comunicazione fra il Tirreno e la gran Sirte nel modo notato da molti osservatori (v. § 392).

780. Nei giorni 11-12 marzo notai per la prima ed unica volta, che il colore oscuro della Libia pareva estendersi a sinistra fino al Lete, occupando tutta la regione detta Amenti; e del pari si estendeva anche sulla Regione d' Iside sotto il Nepente. Tale stato di cose non fu più notato altre volte. Il 22 maggio anzi l' Amenti era bianco. La Regione d' Iside anch' essa, nell' intervallo dal 16 al 23 maggio fu quotidianamente descritta come bianco-splendente, nel modo tante volte notato durante le precedenti opposizioni. Questo bianco parve specialmente intenso dopo il 20 maggio nelle parti più vicine al Nepente. Il 22 credetti possibile una risurrezione della neve Atlantica, già osservata nelle opposizioni 1877, 1879, 1882, e più tardi scomparsa: ma questa aspettazione non fu confermata nel giorno seguente 23 maggio.

CAPITOLO III.

Osservazioni concernenti la costituzione fisica del pianeta e della sua atmosfera.

Sezione I.

Osservazioni della macchia polare boreale.

781. Una cosa che già ci è occorso di notare nella macchia polare boreale è la sua eccentricità rispetto al polo. Questa, sebbene molto piccola, tuttavia è risultata con sufficiente certezza dalle osservazioni che ne furono fatte dal 25 febbraio al 16 aprile; ed i dati ad essa relativi sono confermati dalla determinazione indipendente fattane dal dott. Lohse in Potsdam (§§ 700-701). Inoltre, elementi molto simili si son ricavati per questa eccentricità anche nell' opposizione precedente. Tutte queste determinazioni offrono il seguente confronto:

	λ	±	θ	±
1884 Schiaparelli . . .	$\lambda = 2°,69$	$\pm$ 0°,23	$\theta = 323°,5$	$\pm$ 5°,3
1886 Lohse	1 ,34	0 ,43	285 ,0	16 ,7
1886 Schiaparelli . . .	1 ,27	0 ,10	295 ,1	5 ,7

La somiglianza dei risultati, ed il fatto che nell'opposizione 1881-82 si è avuto pure indizio di qualche cosa di simile (§§ 582-583), lasciano adito alla congettura, che anche per le nevi boreali esista una causa di posizione asimmetrica rispetto al polo, sebbene non così pronunziata come quella che produce analogo e assai più manifesto effetto sulle nevi australi (§ 209). Il centro delle nevi boreali tenderebbe ad allontanarsi dal polo circa un centinaio di chilometri nella direzione della Gran Sirte o del Corno d'Ammone. Le osservazioni avvenire faranno vedere se questa congettura è abbastanza fondata.

782. Le annotazioni fatte sul diametro (estimato) della macchia polare e sull'aspetto della medesima si trovano raccolte sotto forma tabellare nel quadro seguente. Vi ho aggiunto per ogni osservazione il valore di ω, cioè della longitudine areografica di quel punto che occupava il centro del disco al momento dell'osservazione. Vi è inoltre indicato per ogni osservazione di quanti giorni essa ha preceduto o seguìto la data del 30 marzo, in cui per l'emisfero boreale di Marte ebbe luogo il solstizio d'estate.

Macchia polare boreale, 1886.

Data 1886	Dal Solstizio estivo giorni	ω	Diametro angolare	Annotazioni
		°	°	
Gen. 3	— 85	175	30	grande, circondata di tinta oscura.
Feb. 2	— 55	251	21	fra 1/5 e 1/6 del diam.: circondata da ombra oscura.
— 25	— 32	358	14	stimata 1/8 del diametro.
— 25	— 32	9	10	meno che 1/10 del diam.: tutta sul disco, su fondo giallo.
— 26	— 31	351	8	un filo e mezzo, cioè 1″.
— 26	— 31	356	....	bellissima, ellittica, tutta sul disco: spicca poco su fondo giallo.
— 27	— 30	52	6	un filo, cioè 0″67.
— 28	— 29	339	8	1″ al più.
Mar. 4	— 26	268	6	un filo appena, 0″67: tutta sul disco, piccolissima.
— 8	— 22	255	....	appena si vede: temo che abbia a sparire.
— 9	— 21	227	....	tutta sul disco, piccola.
— 10	— 20	227	....	ben discernibile.
— 11	— 19	217	5	tutta sul disco in campo giallo: certamente meno di un filo.
— 12	— 18	201	6	poco più d'un filo? piantata sul giallo.
— 13	— 17	190	....	appena discernibile.
— 16	— 14	155	8	forse 1″: tutta sul disco.
— 16	— 14	178	6	forse un filo: 0″67.
— 17	— 13	147	....	tutta sul disco.
— 17	— 13	177	6	un filo: 0″67.
— 18	— 12	138	5	bellissima, ellittica, un filo, 0″67, al più.
— 19	— 11	136	4	meno d'un filo: forse 0″5: a sinistra limitata dal mare, a destra dal giallo.
— 20	— 10	152	7	almeno un filo: forse 0″8.

Data 1886	Dal Solstizio estivo giorni	ω	Diametro angolare	Annotazioni
Mar. 23	— 7	148°	7°	poco più d' un filo, forse 0''8: pare più grande di prima.
— 25	— 5	123	....	cresciuta e brillante: si vede bene.
— 26	— 4	73	5	piccolissima, meno che un filo: par tutta sul giallo.
— 27	— 3	88	6	inquadrata in nero a mancina: ovale: un filo.
— 28	— 2	79	6	bella: cresciuta: forse arriva ad un filo.
— 30	— 0	48	6	un filo: meno bella di jer l'altro.
Apr. 1	+ 2	30	....	tutta inquadrata dal mare: pare ancor cresciuta: facilissima.
— 2	+ 3	6	9	un filo e mezzo?
— 2	+ 3	12	6	un filo.
— 5	+ 6	12	10	tutta sul disco: o destra incorniciata di nero.
— 7	+ 8	338	....	tutta sul disco: men visibile, forse perchè incorniciata di giallo?
— 7	+ 8	28	....	si vede assai meglio, malgrado l'aria pessima.
— 14	+ 15	265	....	certamente tutta sul disco: ben visibile malgrado l'aria cattiva.
— 16	+ 17	294	....	un punto e nulla più: tutta sul disco.
— 21	+ 22	200	....	tutta sul disco in campo giallo: forse cresciuta.
— 24	+ 25	173	....	molto bella e facile, anche col Sole sull'orizzonte.
— 26	+ 27	159	....	bella e visibile, pare un po' cresciuta.
— 27	+ 28	140	...	perfettamente visibile, bene spicca sullo scuro di sinistra.
— 28	+ 29	137	....	ben visibile malgrado l'aria cattiva.
Fin qui coll' obbiettivo di 8 pollici: ora comincia l'uso dell' obbiettivo di 18 pollici.				
Mag. 1	+ 32	122	....	tutta sul disco: col crescere dell'oscurità diventa più bella e manifesta.
— 6	+ 37	75	....	si vede bene, malgrado la terribile agitazione.
— 7	+ 38	47	....	visibile a Sole alto.
— 8	+ 39	40	....	benissimo a Sole alto.
— 9	+ 40	27	....	evidentissima, benchè l'imagine sia pallida e il Sole alto.
— 11	+ 42	8	....	bellissima.
— 12	+ 43	2	....	visibile, benchè il pianeta sia pallido tra le nubi.
— 15	— 46	331	....	visibile, malgrado il Sole alto e l'agitazione.
— 16	+ 47	322	....	visibile, imm. pallida, Sole alto, aria agitata.
— 17	+ 48	314	...	bella, Marte molto pallido, Sole alto.
— 20	+ 51	301	....	ben visibile, malgrado le nuvole.
— 21	+ 52	290	3,5	ben visibile, ma piccolissima, 3° o 4° al più: inquadrata di nero a sinistra.
— 22	+ 53	281	5,5	piccolissima, 5° o 6°, tutta sul disco, inquadrata di nero a sinistra.
— 23	+ 54	270	....	piccola, ma distinta, incorniciata di nero a sinistra.
— 24	+ 55	262	....	visibile.
— 25	+ 56	252	....	veduta.
— 27	+ 57	233	....	veduta, è l'oggetto più cospicuo del disco.
Giug. 1	+ 63	184	9,5	bellissima, sempre piccola, non più che 1/12 del diametro.
— 5	+ 67	145	....	in alto brilla Thyle I: in basso la neve consueta più bella di Thyle I.

783. Comparando questo quadro coll' analogo dell' opposizione precedente (§ 677) si desume che il decremento delle nevi boreali all' avvicinarsi del solstizio estivo fu questa volta alquanto più precoce che nel 1884. Dal 3 gennaio al 25 febbraio tale diminuzione si mostrò rapida e progressiva, ed importava ogni giorno circa 20 chilometri sul diametro della calotta; il lembo dunque andava ritraendosi quotidianamente di circa 10 chilometri verso il polo, tutto intorno. A partir dal 26 febbraio fino al 5 giugno non ebbe più luogo diminuzione regolare: i diametri estimati presentano fluttuazioni irregolari che in parte senza dubbio derivano dalle circostanze dell' osservazione, in parte tuttavia possono essere reali. Una di esse fu certamente reale, e diede luogo ad un *minimum* nello splendore apparente della macchia verso la metà di marzo. Questo *minimum* fu osservato anche meglio a Potsdam, dove dal 13 al 23 marzo il dott. Lohse dovette cessare dalle misure, per esser la macchia diventata invisibile in quel telescopio [1]. Fuori di questa, non è possibile indicare con certezza altre variazioni, e dai salti che si osservano nella serie dei diametri non è possibile trarne alcuna conclusione ad esse relativa. La visibilità della macchia dipende infatti da molte circostanze, alcune delle quali son di carattere affatto accidentale, come il grado di chiarezza del fondo del cielo (di giorno la macchia nevata si vede assai men bene che a notte oscura), dallo stato dell' immagine, e specialmente dal suo grado di diffusione, che influisce molto anche sulla stima del diametro. A questo si aggiunga il fatto, che non sempre si vide la macchia su fondo o contorno oscuro, ma spesso tutta apparve proiettarsi sul giallo (nelle longitudini intorno a 350° e 205°); tal altra volta il fondo era oscuro a sinistra, giallo a destra (nelle longitudini 140° e 280° circa); in queste occasioni il poco contrasto del bianco sul fondo giallo ha dovuto di certo rendere meno apparente la calotta nevosa. Tutto questo indipendentemente dalle variazioni reali nell' area della macchia, nell' intensità della sua albedine, nella trasparenza dell' atmosfera di Marte, nell' inclinazione della visuale, e nella distanza del pianeta dalla Terra. Circostanze tutte che influiscono anch' esse, e di cui solo una parte è calcolabile nel suo effetto; su di che veggansi cenni più particolari nella Memoria II, § 415.

784. In conseguenza di tutte queste difficoltà è anche difficile dire, se nell' in-

[1] *Publ. Potsd.*, VIII, p. 119 e 121. Il dott. Lohse rivide la macchia il 23 marzo e continuò ad osservarla fino al 7 di aprile. L' accordo non soddisfacente di alcuna fra queste ultime sue misure colle altre, fatte prima della disparizione, lo indusse a pensare che la macchia veduta dopo la disparizione potesse esser diversa da quella che precedette la disparizione stessa. In questa ipotesi egli calcolò separatamente le osservazioni della prima e della seconda macchia, e trovò che le loro posizioni sul pianeta eran alquanto diverse e distanti fra loro circa 6°. In tal circostanza egli credette di veder una prova della non identità delle due macchie — Tuttavia io non posso accostarmi a questo suo modo di vedere. A Milano infatti la macchia fu veduta senza alcuna interruzione, e nel tempo in cui essa era invisibile a Potsdam se ne fecero qui 28 misure (vedi il quadro a § 699), che non riuscirono meno soddisfacenti delle altre; i loro errori residui sono quali si possono aspettare, e formano buona serie con quelli delle osservazioni anteriori e posteriori, nè si osserva alcuna soluzione di continuità nell' andamento di questi errori dal principio delle misure sino alla fine. Pertanto io penso che la posizione discordante ottenuta dal dott. Lohse per la macchia osservata dopo la disparizione sia dovuta al piccol numero delle misure da cui dipende (undici in tutto) e dal fatto che esse occupano coi loro ω un intervallo di soli 138°. Le discordanze poi che tali misure presentano colle altre non sono tanto grandi, che non si possano spiegare con gli ordinari errori d' osservazione.

tervallo di circa 100 giorni che trascorse dal 26 febbraio al 5 giugno la macchia polare siasi piuttosto venuta aumentando o diminuendo di splendore apparente. L'insieme delle indicazioni (necessariamente molto vaghe) registrate nell'ultima colonna del quadro precedente, porterebbe a concludere che la macchia era a un dipresso altrettanto visibile al principio di giugno, quanto alla fine di febbraio. Essendo però in tale intervallo scemato il diametro apparente del pianeta da 14″ ad 8″, e l'area apparente diminuita nel rapporto di 3:1, alcuno potrebbe addirittura concludere che in totale, malgrado la fase di *minimum* avvenuta in marzo, abbia avuto luogo un accrescimento nello splendore reale della neve, o più probabilmente un'estensione dell'area da essa occupata. Tale conclusione potrebbe aver un certo grado di probabilita, quando tutte le osservazioni fossero state fatte col medesimo strumento. Ma non è a dimenticare, che le ultime, dal 1° maggio al 5 giugno son state fatte con un obbiettivo di 18 pollici, dove che per le antecedenti si era adoperato uno di 8.

785. Comunque sia la cosa, anche volendo supporre che alcun accrescimento non abbia avuto luogo, non senza meraviglia si vedrà perdurare per tutti intieri i tre mesi di marzo, aprile e maggio la piccola macchia sotto l'influsso di una radiazione, che con eguale, od anzi con minor grado d'intensità aveva potuto nei due soli mesi di gennaio e di febbraio ridurre la medesima da 30° a meno di 10°. — Notisi a questo proposito, che il solstizio estivo per quelle regioni ebbe luogo il 30 di marzo; quindi l'inclinazione dei raggi solari sulla macchia, e la forza della radiazione (in quanto dipende dall'inclinazione) ha dovuto essere maggiore nei mesi di marzo e di aprile, che in febbraio, e maggiore nel mese di maggio, che in gennaio. — Notisi inoltre, che il pianeta essendo passato al suo afelio addì 8 febbraio, il suo raggio vettore fu in marzo minore che in febbraio, in aprile e maggio minore che in gennaio ([1]). Quindi tanto sotto il riguardo dell'inclinazione, quanto sotto il riguardo della distanza dal Sole, la radiazione solare su quelle regioni ha dovuto nel suo complesso essere più intensa nei tre mesi di marzo, aprile e maggio, che in quelli di gennaio e di febbraio.

786. Nel 1879 il decremento delle nevi australi diede luogo ad un fatto presso a poco analogo. Come si può rilevare dalla tabella dei diametri allora estimati (§ 425) le dimensioni di quella calotta polare, ridotte anche questa volta a meno di 10°, rimasero press'a poco costanti dal 12 ottobre al 2 gennaio per lo spazio di 82 giorni. Vero è che più tardi, nei mesi di febbraio e di marzo essa parve diminuita di splendore apparente (il diametro non si poteva più estimare in alcun modo) ed anche finì per scomparire affatto; ma ciò era dovuto sicuramente al suo avvicinarsi al limite d'illuminazione ed al suo ingresso nella fase oscura, siccome un accurato esame di tutte le circostanze ha dimostrato (§§ 416-424). In questo caso lo stato stazionario delle nevi ha durato almeno dal 59° al 141° giorno dopo il solstizio estivo di quell'emisfero; dico *almeno*, non essendone stato osservato nè il principio, nè la fine. — Però sembra che il principio dello stato stazionario per la neve australe sia stato osservato nelle opposizioni del 1862 e del 1877. Esaminando infatti pel 1862 le serie di dia-

([1]) Raggi vettori di Marte nel primo semestre 1886:

Gennaio	1	1,66	Febbraio	15	1,67	Aprile	1	1,65	Maggio	15	1,62
Gennaio	15	1,66	Marzo	1	1,66	Aprile	15	1,64	Giugno	11	1,60
Febbraio	1	1,67	Marzo	15	1,66	Maggio	1	1,63	Giugno	5	1,59

metri di essa neve quali risultano dalle determinazioni di Lockyer e di Lassell (§ 213), si trova che in quell' anno la neve cessò la sua diminuzione intorno al 25 di settembre, diciassette soli giorni dopo il solstizio d' estate [1]. Un risultato identico si ha pel 1877 delle mie proprie osservazioni [2].

787. Il problema di spiegare come queste macchie polari, dopo un periodo di rapida e regolare diminuzione, tutto ad un tratto si arrestino in questo processo, e per più mesi si conservi quasi intatto quel piccolo residuo a cui si erano ultimamente ridotte, malgrado l' influsso di una radiazione costante od anche accresciuta, è uno dei misteri del pianeta Marte. Se veramente, come pare, quelle son nevi che vanno sciogliendosi per la forza dei raggi solari, un tal fatto indica che in tale processo entra qualche circostanza a noi sconosciuta. Secondo le idee che noi possiamo farci intorno alla cosa, e stando alle analogie di ciò che in simili circostanze accadrebbe sulla Terra, il decremento delle nevi dovrebbe procedere con rapidità accelerata nelle sue ultime fasi, quando il loro strato è diventato più sottile e discontinuo, e l' estremo residuo di esse dovrebbe sparire in pochi giorni. Per produrre sulla Terra qualche cosa di simile a ciò che si osserva in Marte bisognerebbe che l' accumulazione delle nevi non fosse di uguale potenza in tutta la loro area, ma fosse molto maggiore nelle parti centrali. Ed anche questo non basterebbe, ma dovrebbe in una certa area centrale di limiti ben definiti l' altezza delle nevi accumulate essere molto maggiore che nell' area circostante, od almeno offrire una maggior resistenza alla fusione. Ciò si potrebbe ottenere facendo che l' area centrale fosse un' isola, sulla quale (come da noi avviene nella Groenlandia) si accumulasse la neve di più anni (o anche di più secoli se si vuole), circondata da un mare agghiacciato soltanto periodicamente, o almeno da un suolo solido di natura diversa e tale da assorbire facilmente il calore del Sole e favorire la dissoluzione delle nevi in modo speciale. Se un tal caso (o un caso analogo) si avverasse in Marte, dovrebbe la posizione del nucleo residuo essere sempre costante. Quindi appare l' utilità di determinare ogni volta ch' è possibile questa posizione con esatte misure. Ed è in generale dallo studio diligente di tutto ciò che accade intorno alle calotte polari, che potremo principalmente sperare di ottenere il principio di una razionale spiegazione dei fenomeni di questo pianeta.

Sezione II.

Sopra alcuni risultati delle osservazioni fatte in questa opposizione.

788. Il risultato di maggior importanza fu la disparizione quasi totale delle geminazioni, ancora così numerose durante l' opposizione precedente. Infatti, anche contando quelle di osservazione incerta, e quelle d' imperfetta formazione, non si registrarono questa volta che sei geminazioni. Sono: 1° Quelle dell' Eufrate e del Phison (§§ 708 e 709) delle quali appena si può dire che siano state qui vedute, e rimar-

[1] Vedi Memoria I, § 213. Nelle due Tabelle delle osservazioni di Lockyer e di Lassell, ai numeri della seconda colonna (giorni dal solstizio australe) bisogna aggiungere algebricamente la quantità —8, in conseguenza della rettificazione fatta più tardi (Memoria II, § 292) alle epoche degli equinozi e dei solstizi di Marte.

[2] Vedi Memoria I, §§ 211 e 212: e l'avvertenza della nota qui sopra.

rebbero dubbie, se non avessero concorso, a certificare la loro esistenza, le osservazioni di Nizza. 2° Quella dell'Oronte fra il 1° corno del Golfo Sabeo e l' Eufrate. 3° La grande geminazione del Ceraunio, e l' altra anche molto cospicua della Propontide (§§ 722, 764); l' una e l' altra indubitabili, quantunque molto imperfettamente costituite. 4° La colossale e nello stesso tempo molto regolarmente formata geminazione dell' Idraote-Nilo (§ 721), della quale è stato possibile aver buone osservazioni, e che fu veduta anche a Nizza. Le date limiti di queste osservazioni (comprendendo anche quelle di Nizza), sono

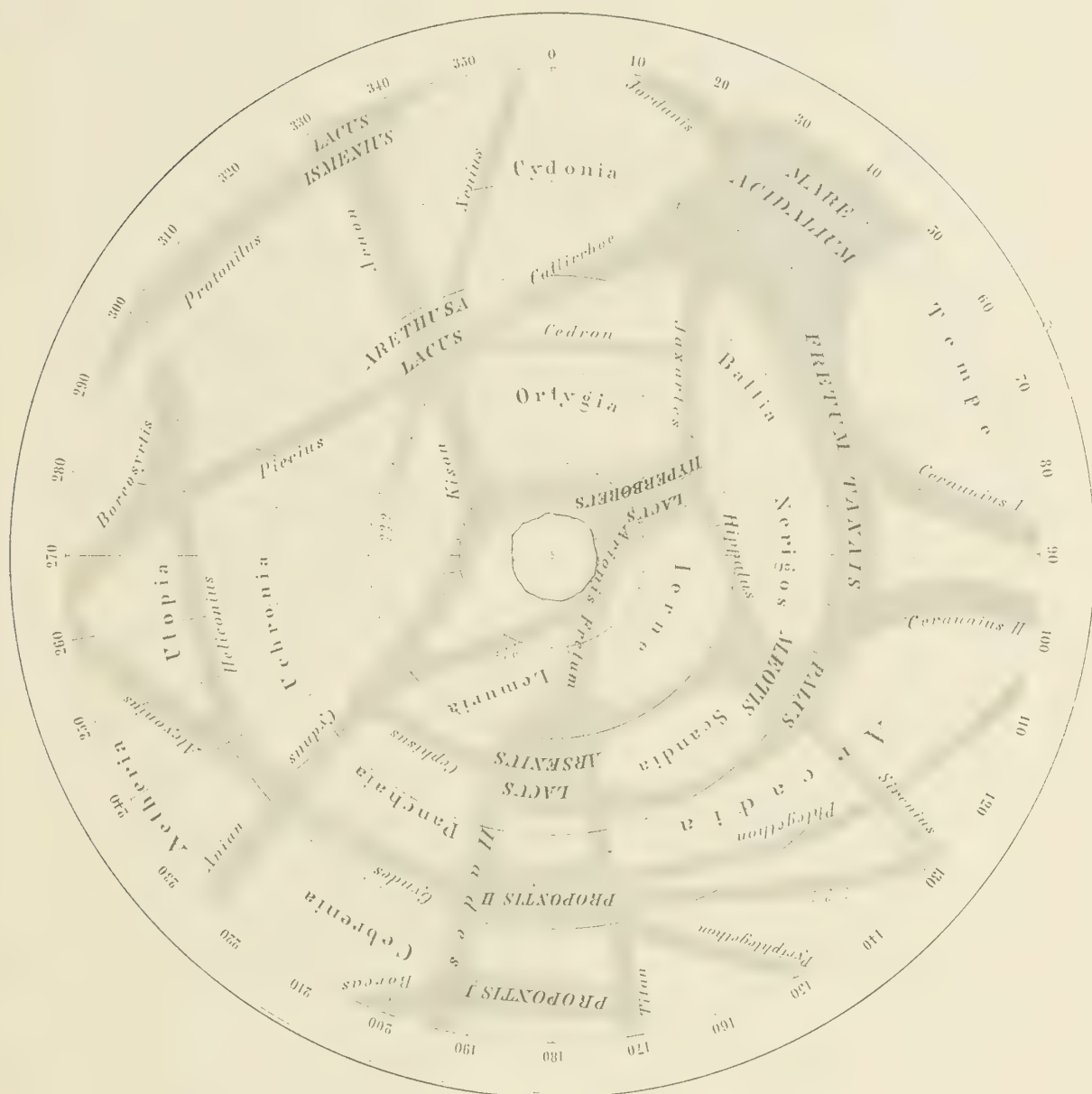
Eufrate	15 Aprile	— 21 Maggio
Phison	15 Aprile	— 21 Maggio
Oronte	5 Aprile	
Ceraunio	27 Marzo	— 11 Maggio
Propontide	16 Marzo	— 5 Giugno
Idraote-Nilo	27 Marzo	— 7 Maggio

ai quali casi si potrebbe aggiungere quello della Jamuna, da noi non sdoppiata, ma veduta doppia a Nizza il 16 maggio. — Per l' emisfero boreale di Marte l' equinozio primaverile aveva avuto luogo il 12 settembre precedente e il solstizio estivo il 30 marzo. Comparando questi risultati con quelli delle due opposizioni precedenti e della seguente, si viene a concludere, che il fenomeno delle geminazioni, cominciato uno o due mesi dopo l' equinozio primaverile suddetto, al sopraggiungere del solstizio estivo già di nuovo si riduce a pochi casi, come si è avvertito nella Memoria III, § 575. Vedi pure Mem. IV, § 692.

789. Qualche attenzione sembrano pure meritare i risultamenti dei nuovi rilievi ottenuti intorno al polo boreale fino al 60° parallelo, dei quali può dar un concetto approssimato la carta in projezione polare annessa alla presente Memoria. Oltre all' area (non molto vasta) ancora coperta dalla piccola ma persistente calotta polare, si osservano in tale spazio aree di 3 specie differenti. Vi sono: 1° Le aree schiettamente continentali, che sempre apparvero gialle e luminose durante tutta l' opposizione, benchè solcate da zone oscure molto apparenti. Tali aree si estendono dal 260° al 40° meridiano, e occupano quindi 140° di longitudine. 2° Le aree schiettamente comparabili ai mari dell' altro emisfero per la forte oscurità della loro tinta: Mare Boreo e Lago Iperboreo. 3° Aree di mezza tinta, simili più o meno alle così dette terre oscure del Mare Eritreo (Terra di Deucalione, di Pirra, di Proteo ecc.), e alla Libia; ombreggiate d' ombra variamente intensa: talvolta appena più pallide dei continenti, come Baltia-Nerigos, tal altra portate a notabil grado di oscurità (Lemuria, Pancaia, Uchronia). Queste sono tramezzate da zone oscure di tinta intensa e variamente sfumate nei loro contorni, talvolta anzi tanto sfumate, che contorno più non esiste (Lago Arsenio, Cefiso, Gyndes . . .). Tali apparvero quasi nella loro totalità le regioni dal 110° al 260° meridiano; nelle quali non senza ragione sulla carta di quest' anno alcuno potrebbe ravvisare parte di un ampio mare Polare, se tale giudizio non fosse contradetto dalle ulteriori osservazioni fatte nel 1888. Del resto un saggio convincente delle enormi variazioni di colore e di chiarezza a cui sono soggette tutte queste regioni, lo si può avere da quanto sopra è stato narrato intorno all' apparizione del Lago Iperboreo (§§ 731-734).

TAB. I.

Hemisphærium Martis boreale
stereographice descriptum ex observationibus anni 1886
ope Tubi Merziani decempedalis.

TAB. II.

Regiones Martis boreales
usque ad gradum latitudinis quadragesimum
schematice descriptae.

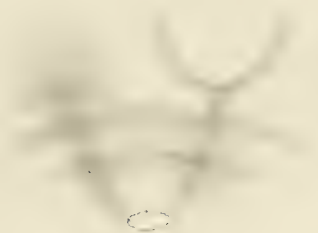
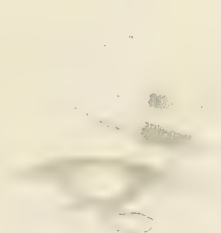
1886. Marzo 19
$\omega = 150^\circ$

1886. Marzo 28
$\omega = 10^\circ$

1886. Aprile 1
$\omega = 20^\circ$

1886. Aprile 5
$\omega = 350^\circ$

Lit. L. Salomone Roma

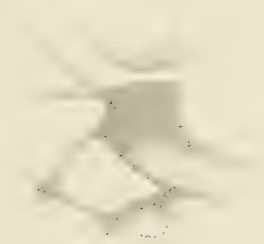
V
1886. Marzo 12
ω = 200°

VI
1886. Marzo 17
ω = 158°

VII
1886. Marzo 26
ω = 50°

VIII
1886. Marzo 27
ω = 90°

IX
1886. Marzo 30
ω = 10°

X
1886. Aprile 1
ω = 28°

Lit. L. Salomone Roma

RELAZIONE

letta dal Socio E. Paternò relatore, a nome anche del Socio Cannizzaro, nella seduta del 6 marzo 1898, sopra la Memoria presentata dai dott. G. Ampola e C. Ulpiani, intitolata: *Sulla denitrificazione*.

« In questa Memoria gli autori descrivono con ogni cura due nuovi batterî denitrificanti che sono riusciti ad isolare dal suolo coltivabile e dal polviscolo atmosferico. È noto che i batterî denitrificanti finora conosciuti, erano stati isolati due da Burri e Stutzer dalla paglia e dalle feci di cavallo (quest'ultimo in simbiosi col *B. Coli*) un terzo da Ampola e Garino dalle feci di bove e dalla torba, ed un qaarto da Schirokikh dalle feci di cavallo. Lo studio della denitrificazione nel suolo arabile, dopo la scoperta nelle radici delle leguminose dei fissatori di azoto che arricchiscono il terreno di nitrati a spese dell'azoto atmosferico, è certo argomento di grandissima importanza per la chimica agraria, ed il contributo che a questo studio apporta il lavoro dei dottori Ampola ed Ulpiani è assai notevole. Senza analizzare nei suoi particolari il presente lavoro, accenneremo soltanto che è degno di nota il metodo sperimentale col quale gli autori hanno cercato di stabilire l'equazione chimica della denitrificazione, ed è molto importante il fatto da essi osservato che il glucosio, in presenza dei nitrati, subisce per opera dei nuovi microorganismi un'ossidazione completa, trasformandosi interamente in acido carbonico; come pure sono degne d' interesse le esperienze colle quali mettono fuori di dubbio la relazione fra la quantità di materia organica distrutta ed il nitrato consumato.

« Proponiamo perciò che il lavoro dei dottori Ampola ed Ulpiani venga pubblicato negli Atti dell'Accademia ».

Sulla denitrificazione.
Memoria dei dott. G AMPOLA e C. ULPIANI.

Lo studio della denitrificazione è entrato in questi ultimi anni in una nuova fase: dopo avere scoperta e studiata questa fermentazione sullo stallatico, si è cercato di seguirne l' andamento sul suolo arabile, e poichè i batterî denitrificanti finora conosciuti erano stati isolati soltanto dalla paglia ([1]) e dalle feci di cavallo e di bove ([2]) ossia dai materiali primi che costituiscono il letame, era razionale, che si dovesse seguire il fenomeno nello stesso terreno e fino ad un certo punto preoccuparsi dell' innesto di un materiale di cultura batterica così pericoloso, che l'agricoltore veniva a fare nel suo campo, quando vi portava il letame.

Ora essendo a noi riuscito d' isolare dal suolo arabile e dall'aria due specie nuove di denitrificatori, la relazione fra il letame e la terra arabile potrebbe essere interpretata nel senso che aria, terra arabile, paglia, feci d'erbivori, letame debbano forse considerarsi come anelli d'una stessa catena.

La paglia si secca all'aria sul suolo; essa è destinata all'alimentazione del bove e del cavallo; le feci di questi animali formano il letame, e questo è destinato alla terra arabile.

Senza pretendere con questo di stabilire un ciclo teleologico per la denitrificazione, l' isolamento di specie denitrificanti dal terreno e dal pulviscolo atmosferico, da questi immensi vivai di specie microbiche, ci dimostra per lo meno, che gli agenti della denitrificazione sono molto diffusi in natura, e possono vivere e resistere in condizioni disparatissime.

Forse come i fissatori d'azoto che vivono sulle radici delle leguminose, arricchendo il terreno di nitrati a spese dell'azoto dell'aria, i denitrificatori ristabiliscono l'equilibrio dell'azoto nell'atmosfera, svolgendolo in condizioni non ancora ben definite dai nitrati del suolo, e solo con la determinazione precisa di queste condizioni si potrà influire a vantaggio dell'agricoltura sulla concorrenza fra le specie nitrificanti e denitrificanti.

Il Deherain ([3]), ripetendo le esperienze di Wagner con terra arabile addizionata di nitrato di soda e di concime di stalla al 10 %, trova che alla temperatura di laboratorio (gennaio 1897) si ha una perdita di nitrato del 10 %, mentre alla tempera-

([1]) Burri e Stutzer, Journal Landwirtschaft, 1894; Centralblatt für Bact., 1895.
([2]) Ampola e Garino, R. Acc. dei Lincei, V, 2° sem., 15 f.°, p. 90; id. id. p. 10.
([3]) Deherain, Ann. agr., t. XXIII, p. 4.

tura di 32° le perdite saliscono al 75 %: invece con terra addizionata soltanto col 2 % di concime, i nitrati aumentano, e la nitrificazione prende il sopravvento sulla denitrificazione.

Ecco dimostrato come il variare di due condizioni, temperatura e quantità di sostanza organica, possa influire grandemente sul fenomeno.

In ordine a queste idee, noi abbiamo studiato la biologia delle due nuove specie di batterî denitrificatori, per poi esaminare dal punto di vista chimico il meccanismo della riduzione dei nitrati.

Isolamento dei B. denitrificans V.

Numerosi tentativi di provocare la fermentazione salnitrica ponendo con un filo di platino sterilizzato un granello di terra (campagna romana) in un tubicino di brodo nitrato al 0,30 % erano sempre riusciti infruttuosi, quando in un tubetto di brodo nitrato tenuto in cultura anerobica sopra pirogallato potassico si potè sorprendere la formazione di una schiuma a finissime bolle. Da questo tubetto si fecero delle piastre in gelatina, ottenendo uno sviluppo di numerose colonie, di cui furono differenziate 18 specie. Di ognuna di queste si fece passaggio in brodo nitrato al 0,30 %. Uno solo dei diciotto tubetti presentò il fenomeno della schiuma, e derivava da una colonia energicamente fluidificante, che ad una numerazione approssimativa risultò rappresentata nella proporzione del 4 %.

Il microrganismo così isolato per questo potere fluidificante si differenzia essenzialmente da quelli di Burri e Stutzer e dal *B. denitrificans agilis* di Ampola e Garino: differisce poi da quello di Schirokikh [1], che è aerobio obbligatorio, perchè anerobio facoltativo, anzi nell'assenza assoluta di ossigeno la sua facoltà denitrificante diventa più attiva. Per porlo in serie cogli altri denitrificanti lo chiameremo *B. denitrificans* V.

Caratteri morfologici.

All'esame microscopico un preparato colorato di una cultura in agar di 24 ore presenta elementi corti, che non oltrepassano la lunghezza di μ. 1,8.

Movimento. — Nei preparati a goccia pendente presenta un movimento vivace.

Caratteri di colorazione. — Si colora uniformemente bene coi colori di anilina. Si decolora col metodo di Gram. Non presenta la doppia decolorazione.

Culture in gelatina a piatto. — Le piastre presentano un intenso color verde erba diffuso. Le più superficiali diventano rapidamente enormi e confluiscono e non presentano che un nucleo tondeggiante oscuro, attorniato da una piccola nuvola di grandi granulazioni, nuotante in una conca di gelatina fluidificata. Nelle più piccole, che sone anche le più profonde, prevale un tipo di organizzazione più definito, in cui le grandi granulazioni costituiscono due aloni concentrici intorno al nucleo centrale.

Infissione in gelatina. — La fluidificazione avviene ad imbuto. In 5-6 giorni tutto il tubo è fluidificato.

[1] Schirokikh, *Cent. Blat. f. Bact.*, II Band, 1896.

Cultura in agar a piatto. — Le colonie profonde sono generalmente ovali con angoli molto acuti di colorito verdognolo. Le superficiali sono aniste, rotonde, con un orlo, che qua e là presenta irregolarmente delle piccole insenature emisferiche di un colorito verdognolo, che va degradando d' intensità dal centro alla periferia, dove diventano quasi incolori. Molto interessante è lo sviluppo delle colonie che sono prossime alla superficie, sviluppo che si può seguire in tutte le sue fasi.

La colonia, dapprima ovale, tende, generalmente da una sola parte, ad aprirsi come un libro e dalla fenditura incomincia a svilupparsi un alone di una sostanza chiara, finamente granulosa, che si diffonde sempre di più involgendo la colonia primitiva, che mano mano diminuisce fino a scomparire.

Nella piastra oltre alle colonie, che sono ab origine superficiali e quelle, che si mantengono sempre profonde ossia ovali, si osservano tutte queste forme di passaggio. Da ognuna di queste forme, ripetendo le piastre, si ottiene la medesima serie di forme.

Le piastre hanno un colore verdognolo meno intenso di quelle in gelatina.

Culture per strisciamento in agar. — Sviluppa lungo il percorso dell'ago in forma di una striscia verdognola, che si estende poco. L'orlo è mammellonato. Tutta la piastra è verde.

Cultura in brodo. — Intorbida uniformemente il brodo di Loeffler. Presto si forma una pellicola superficiale e un deposito al fondo. Il brodo diventa verde. Molto più rapido e intenso è lo sviluppo in brodo nitrato al 0,30 %. Qui invece della pellicola si forma dopo 1-2 giorni una schiuma di finissime bolle, che poi divengono più grosse e più rade fino a scomparire dopo circa una settimana. Notevole è il fenomeno da noi costantemente notato, che, dopo un giorno dall' innesto, quando alla superficie del liquido si notano poche bollicine, se si scuote con un colpo secco il tubicino, dopo qualche secondo si ha uno sviluppo considerevole di finissime bolle, che si sollevano dal fondo e si raccolgono alla superficie formando un mezzo centimetro di schiuma.

Cultura su patate. — Si sviluppano rapidamente formando una patina color rosso-vivo.

Isolamento del B. denitrificans VI.

Fin dal 1877 il Bechamp [1] aveva notato che se si lascia esposta all'aria una soluzione di nitrato, acetato e fosfato di soda, si ha una viva fermentazione con sviluppo di azoto. Il Bechamp non ha cercato di isolare l'agente di questa fermentazione. Abbiamo ripetuto queste esperienze, esponendo in un canto del laboratorio all'aria una soluzione all'uno % di questi tre sali. Dopo tre giorni la soluzione si è fortemente intorbidata ed abbiamo notato lo sviluppo di bollicine gassose. Un innesto in un tubicino di brodo nitrato, presentò una schiuma notevole. Dopo una serie di passaggi in brodo nitrato, procedemmo all' isolamento di questo denitrificatore mediante piastre in gelatina. Potemmo così ottenere in cultura pura un microrganismo con i seguenti

[1] I. Ber. Thier. Chemie, 1877.

Caratteri morfologici.

Nel preparato microscopico colorato questo denitrificatore si presenta in forma di bastoncini più lunghi e più sottili del V.

Movimento. — Nel preparato a goccia pendente si mostra animato da un vivace movimento.

Colorazione. — Si colora uniformemente coi colori di anilina. Non resiste alla decolorazione col metodo di Gram. Non presenta doppia colorazione.

Cultura in gelatina a piatto. — La colonia è piccola, rotonda, giallognola, finamente granulosa. Non fluidifica la gelatina.

Infissione in gelatina. — Lungo il percorso dell'ago, si sviluppa come una riga bianca, sottile che nelle parti superiori non è limitata all' innesto, ma forma come dei veli.

Cultura in agar a piatto. — Benchè assolutamente diverso dal bacillo precedentemente descritto, esso presenta nelle colonie in agar molti punti di somiglianza con esso. Le colonie profonde sono ovali, solo sono bianche invece che verdognole.

Le meno profonde tendono a farsi superficiali seguendo tutte le fasi descritte a pag. 476 per il V. Però il corpo della colonia mostra una disposizione nettamente concentrica (qualche volta abbiamo potuto differenziare fino a nove zone concentriche) e l'alone che lo circonda è bianco come la neve e tutto increspato come un collare inamidato da bambino.

Cultura per strisciamento in agar. — Sviluppa lungo il percorso dell'ago, guadagnando moltissimo in estensione. L'orlo è finamente dentato.

Cultura in brodo. — Il brodo s' intorbida debolmente e si forma un leggero deposito granuloso al fondo. Nel brodo nitrato presenta i medesimi fenomeni che il V, solo la schiuma è candidissima, mentre quella prodotta dal V è verdognola.

Cultura su patate. — Lo sviluppo alla temperatura di 30° avviene dopo 2-3 giorni, ma si fa abbondantemente sotto forma di una crema bianca, semifluida, che si eleva mm. 3-4 dalla superficie della patata e che rapidamente la invade tutta discendendo perfino dal bordo lungo le pareti laterali. Questo sviluppo sulle patate è caratteristico ed insieme agli altri caratteri differenzia questo batterio dagli altri denitrificatori.

Lo distinguiamo col nome di *B. denitrificans* VI.

Le microfotografie furono fatte al Laboratorio Chimico dei Tabacchi con una macchina Reichert di Vienna e stativo Zeiss microfotografico. Rendiamo sentite grazie all'egregio prof. A. Pezzolato degli aiuti di cui ci fu largo.

Colonia B. denitrificans VI.

Obbiettivo da proiezione « Planar ».
Foco = 75 mm.
Condensatore semplice.
Distanza dalla lente posteriore dello obbiettivo al vetro opaco cc. 77.
Apertura del diagramma 8 mm.
Illuminazione a gas (incandescenza Auer).

Colonia B. denitrificans V.

Obbietivo da proiezione Zeis.
Foco = 35 mm.
Distanza dall'obbiettivo al vetro opaco cm. 66.

Studio biologico dei batterî denitrificans V e VI.

La difficoltà di queste ricerche, il tempo che esigono, e i numerosi controlli che debbono subire perchè riescano concludenti, non ci permettono di presentare uno studio completo.

Delle molte esperienze che sono ancora in corso, accenneremo soltanto alle principali.

Sostrati nutritivi.

Idrati di carbonio. — Degli esosi abbiamo esperimentato, solo il destrosio in cui il V si sviluppa più energicamente del VI. I polisaccaridi non vengono invertiti, almeno sono rimaste sterili le provette con *saccarosio* e $NaNO_3$ innestate col V. Gli amidi e la cellulosa non vengono attaccati; similmente la destrina.

È da notarsi che il Deherain [1] adopera appunto l'amido quale miglior mezzo nutritivo nelle sue esperienze sulla denitrificazione. Probabilmente il Deherain, che non ha lavorato con culture pure, innestava una mescolanza di specie batteriche, di cui alcune avevano potere inversivo e diastasico.

Acidi organici monobasici. — Furono preparati sei palloncini coi primi sei acidi monobasici della serie grassa, adoperando quantità proporzionali ai loro pesi molecolari.

Acido formico	. . . . gr.	1,39
" acetico	. . . . "	1,82
" propionico	. . . . "	2,24
" butirico	. . . . "	2,67
" valerianico	. . . . "	3,10
" caproico	. . . . "	3,53

Abbiamo neutralizzato esattamente con KOH normale (quantità calcolata), abbiamo aggiunto per ogni palloncino gr. 1,25 di $NaNO_3$ gr. 0,0625 di Na^3PhO^4, gr. 0,625 di NaCl e gr. 250 di acqua, indi abbiamo sterilizzato ed innestato col *B. denitrificans* V.

Il primo dei palloncini a svilupparsi è stato quello col butirrato, che dopo due giorni era in piena fermentazione, seguirono quelli dell'acetato e del capronato, gli altri palloncini (ossia quelli con acidi a numero impari di atomi di carbonio), hanno prodotto solo un leggiero intorbidamento.

Acidi organici bibasici. — Innesti in palloncini contenenti carbonato ed ossalato di potassio non si sono sviluppati.

Acidi amidati. — Il V nell'asparagina è nitrato si sviluppa meravigliosamente: in una sola notte si è avuto spesso uno sviluppo completo. Se si fanno innesti in asparagina del *B. denitrificans agilis*, del V e del VI, si osserva che il primo a svilupparsi è il *B. denitrificans agilis* che dà al tubetto una tinta di caffè, poi il V che dà una bella tinta verde, indi il VI che dà un intorbidamento del tutto bianco.

Influenza della quantità di nitrato.

L'optimum della concentrazione è al 0,30 $^0/_0$, però una volta in una serie di prove con brodo nitrato a diverse concentrazioni si è visto sviluppare per primo quello all'1,20 $^0/_0$ di concentrazione. In un liquido col 2 $^0/_0$ di nitrato la denitrificazione si compie, ma stentatamente e incompletamente.

[1] Deherain, Ann. agr., t. XXIII, p. 4.

Per concentrazione dal 2 % al 10 % abbiamo istituita la seguente esperienza: Il 26 luglio furono innestati con cultura in agar del V una serie di tubicini di brodo contenenti il 2, 4, 6, 8, 10 % di nitrato.

Il 27 troviamo intorbidamento leggiero nei tubicini al 2 e 4 %; il 28 in quelli al 6 %; il 29 in quelli all' 8 %; quelli al 10 % rimasero sempre limpidi.

Nessuno ha presentato il fenomeno della schiuma, anzi nella parte superiore della colonna liquida si venne formando uno stratarello di liquido limpido.

Il 14 agosto furono esaminati i tubetti facendone un passaggio in brodo nitrato al 0,30 % per vedere se i batterî erano vivi e conservavano il loro potere denitrificante: solo l' innesto corrispondente ai tubetti al 2 % si sviluppò e dette schiuma, gli altri rimasero sterili.

Tutti i tubetti innestati il 26 luglio diedero la reazione della difenilammina, della brucina e della salda d'amido iodurata.

Influenza della luce solare.

L'esposizione alla luce solare diretta per 2, 3, 4 ore al giorno non ha dimostrato influenza sul decorso della denitrificazione.

Tubetti di brodo nitrato sono stati innestati col B. V e VI il 12 agosto e tenuti per tutta una giornata alla luce solare (temperatura media al sole 38°).

Alla mattina il V è limpido, il VI notevolmente intorbidato; si tengono per un'altra giornata al sole (temperatura media 38°) il V resta limpido ed il VI benchè si sia fortemente intorbidato, non presenta la menoma formazione di schiuma. A questo punto le prove di controllo tenute alla luce diffusa erano in piena fermentazione.

Durante la notte il V ch' era limpido non solo s' intorbida, ma alla mattina mostra un accenno di schiuma; il VI resta torbido, ma senza schiuma.

Durante un' altra giornata di esposizione al sole la fermentazione del V parve arrestarsi, ma alla mattina del giorno dopo (15 agosto) tanto il V che il VI presentarono netto il fenomeno della schiuma. Il V però non presentava il suo caratteristico color verde. Si ebbe dunque il ritardo di due giorni nelle prove di controllo.

L'azione sfavorevole della luce solare almeno per il VI si esercita piuttosto sull'attività fermentativa dei batterî che sulla vegetativa.

Influenza del calore umido.

Furono fatte queste esperienze mettendo in un termostato i tubetti innestati immersi in un bicchier d'acqua che già avea preso la temperatura del termostato. L'optimum della temperatura è da 30° a 40°. Si sono fatte poi esperienze a 45°, 50° e 55°.

Termostato a 45°. — I tubetti che subito dopo essere innestati sono stati tenuti in termostato a 45° per $\frac{1}{2}$, 1, 3, 4 $\frac{1}{2}$, 6 ore, si sviluppano poi regolarmente; il V prima del VI. Tenendo i tubetti per 9 e 18 ore in termostato, si nota un ritardo nella comparsa della schiuma che ora però compare prima nel VI che nel V. Per innesti tenuti per 40 ore in termostato il VI presenta il fenomeno della schiuma dopo 5 giorni, il V non si sviluppa. Dopo 60 ore a questa temperatura il VI non si sviluppa più.

Termostato a 50°. — Il V° non si sviluppa più se tenuto a questa temperatura per 20 minuti, il VI° resiste solo un'ora.

Termostato a 55°. — Questa temperatura sterilizza le culture del V e del VI dopo 5 minuti.

Concludendo, il V è meno resistente del VI al crescere della temperatura. Ambedue non sporificano.

Resistenza alla inanizione.

Per queste esperienze l'acqua distillata è stata ridistillata su permanganato di potassa e calce; tutti i vetri sono stati lavati con acido solforico concentrato e poi con acqua distillata.

Due tubetti con cc. 10 di quest' acqua sono stati innestati col V e col VI da culture in agar il giorno 5 agosto. Ogni due o tre giorni sono stati fatti passaggi in brodo nitrato al 0,30 % con un'ansa di filo di platino accuratamente lavata e sterilizzata. Ancora, ossia sette mesi dopo l' innesto, i batterî nei due tubetti sono in vita e capaci di fermentare in una sola notte un tubetto di brodo nitrato.

Resistenza al disseccamento.

Il 15 settembre fili di seta sterilizzata bagnati con culture in brodo del V e VI sono stati posti in capsule di Petri dentro ad un essiccatore ad acido solforico. Ogni settimana circa si son fatti passaggi in brodo nitrato per vedere se i batterî erano in vita e capaci di denitrificare. Dopo otto settimane i fili di seta corrispondenti al V si sono ritrovati sterili: invece quelli corrispondenti al VI sono ancora fino ad oggi in vita, dopo circa cinque mesi di disseccamento, senza aver subìto alcuna attenuazione della forza denitrificante. Forse questa enorme resistenza del *B. denitrificans* VI al disseccamento va messa in relazione colla sua origine dal polvisculo atmosferico.

Resistenza agli acidi e agli alcali.

Per gli acidi soluzioni di brodo nitrato, che contengono 0,174 di H^2SO^4 per % non permettono lo sviluppo del V. Soluzioni acide più diluite non sono state provate. Per gli alcali soluzioni di brodo nitrato che contengono soltanto 0,2486 di KOH libera per % ritardano enormemente lo sviluppo del V: soluzioni che contengono 0,5972 % di KOH sono rimaste sterili.

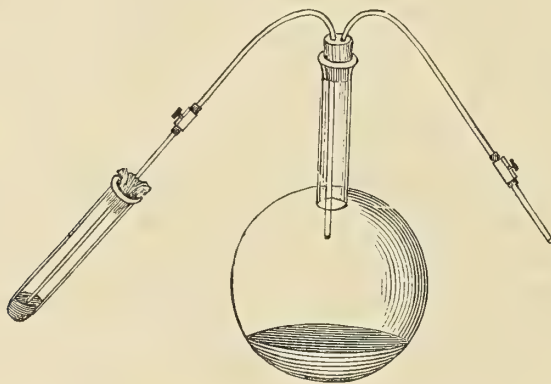
Sviluppo in presenza di varî gas.

Finora sono stati sperimentati da noi solo l'ossigeno e l'ossidulo d'azoto. I problemi interessanti, che si connettono a queste esperienze, saranno discussi in seguito.

Equazione chimica della denitrificazione.

Le conoscenze attuali del processo chimico della denitrificazione si riducono a questo, che i nitrati diminuiscono sino a scomparire, che il liquido si fa alcalino e che si sviluppa un gas intorno alla cui composizione si hanno analisi contraddittorie.

Per studiare in modo completo l'andamento di questo fenomeno e per giungere a definirlo con una equazione chimica, ci siamo serviti del metodo seguente:

Descrizione dell' apparecchio. — Abbiamo adoperato un apparecchio simile a quello di Schultze e Tiemann per la determinazione dell'acido nitrico; ossia un palloncino della capacità di circa cc. 500, chiuso da un tappo di gomma a due fori attraversati da due tubi di vetro capillari curvati a U. La estremità esterna dei due tubi era introdotta in due grossi caoutchouc da pompa, che portavano nel loro mezzo due forti pinze a pressione.

Uno poi di questi caoutchouc riceveva dall'altro estremo un tubo di vetro affilato in punta lunga e sottile che veniva protetta dal pulviscolo atmosferico con una provetta di vetro tenuta addossata al tubo stesso mediante un completo zaffamento circolare con ovatta.

Descrizione dei metodi di cultura. — Nel palloncino fu messa la seguente soluzione:

Glucosio	gr.	1,00
Cloruro di sodio	»	0,625
Fosfato tribasico di sodio	»	0,062
Nitrato di potassio	»	0,6006

Una soluzione identica fu preparata in un altro palloncino, che dovea servire per controllo e che, chiuso con tappo di ovatta, fu sottoposto allo stesso processo di sterilizzazione.

Il palloncino montato alla Schultzer e Tiemann si fece bollire per circa un'ora per cacciare tutta l' aria dell' apparecchio, si chiusero fortemente le pinze prima di togliere la fiamma e si aspettò che il tutto prendesse la temperatura dell'ambiente.

A questo punto si prese una cultura del V in brodo nitrato, in cui la fermentazione era finita, se ne arroventò l'orlo superiore e si sostituì alla provetta unita al tubo dell' apparecchio, di cui la punta affilata venne così a pescare nel brodo della cultura.

Aprendo la pinza con precauzione si fecero entrare alcune goccie del brodo nel palloncino e per meglio assicurare il vuoto questo venne capovolto in un bagno di glicerina.

Questo apparecchio ci parve rispondere a tutte le esigenze chimiche e batteriologiche più rigorose. Servendoci dell'ebollizione, non solo veniva scacciata tutta l'aria, ma anche tutti i gas in soluzione. L'apparecchio prima dell' innesto riceveva un'ultima sterilizzazione ed un ultimo lavaggio col suo stesso vapor d'acqua, e rimaneva montato nella maniera più adatta per il processo analitico per cui doveva servire. Di più, servendoci del vuoto come mezzo d'aspirazione per l' innesto, si risolveva il difficile problema di fare una cultura anerobica (la più adatta per la denitrificazione) senza esporsi ai serî pericoli dell' inquinamento che presenta il rimuovere i tappi dai palloni al momento dell' innesto.

I metodi precedentemente usati non rispondevano a queste esigenze, quando si rifletta che Burri e Stutzer non toglievano l'aria, limitandosi a calcolarla dalla quantità d'ossigeno assorbito dal pirogallato potassico, che col metodo di uno di noi insieme al dott. Garino non si può raccogliere che una parte del gas, e che coi metodi di Deherain ogni precauzione batteriologica è bandita.

Dopo tre giorni il liquido dell'apparecchio cominciò a farsi torbido, fine bollicine si sollevavano dal fondo e si raccoglievano alla superficie in forma di spuma. Questo fenomeno durò dieci giorni. Alcuni giorni dopo scomparsa la spuma, ritenendo finita la denitrificazione, procedemmo all'analisi dei prodotti della fermentazione.

Analisi del gas estratto alla pompa Sprenghel.

Il gas sviluppato dalla fermentazione è stato raccolto alla pompa. Il mercurio è stato purificato coll'ebollizione con acido cloridrico, e similmente la pompa è stata lavata con acido cloridrico e poi con acqua distillata.

In un gassometrino Bunsen si sono così raccolti cc. 106 di gas alla temperatura di 23° ed alla pressione di mm. 767,3. Questa pressione per la correzione barometrica scende a mm. 764,43 e per la correzione dovuta alla tensione del vapor d'acqua diventa 743,5.

Ora applicando la formola

$$V^o = V^t \frac{H273}{760T}$$

si ha che il volume del gas, corretto, equivale a cc. 95,64.

Per l'analisi del gas fu seguito il metodo di Hempel. Dopo travaso nella pipetta a potassa i cc. 106 divennero cc. 66,1 alla T 23° e alla Ho 767,3 mm. che ridotti col solito metodo equivalgono a cc. 59,64.

Lasciato l' apparecchio col vuoto attaccato alla pompa, l' indomani si estrassero altri cc. 2,5 di gas a T:23° e H. 766 mm. dei quali cc. 0,5 furono assorbiti dalla potassa.

Riducendo si ha:

$$2{,}5 = 2{,}26$$
$$2 = 1{,}80$$
$$CO_2 = 0{,}46$$

quindi

Gas prodotto dalla fermentazione . . .	cc. 97,90
Gas non assorbito dalla KOH	» 61,44
Anidride carbonica . . .	» 36,46

Il gas non assorbito è stato poi sottoposto al passaggio in pipetta con pirogallato potassico. Non si ha avuto diminuzione alcuna, il che escludendo la presenza dell'ossigeno ha dimostrato che in tutte le operazioni descritte non è per nulla penetrata aria nell'apparecchio.

Dopo avere esclusa la presenza di ossido d'azoto mediante passaggio del gas in pipetta con permanganato potassico al 4 % acido per H_2SO_4, si è ricercato l'ossidulo d'azoto introducendo nella pipetta ad esplosione una quantità misurata del gas ed una quantità doppia d'idrogeno e facendo scoccare la scintilla. Non si è avuta diminuzione alcuna nel volume del gas.

Allora sul gas, da cui si era eliminata l'anidride carbonica, si procedè alla determinazione della densità col metodo di Bunsen (densità del gas $\frac{T'^2}{T'}$) da cui risultò che il gas prodotto dalla fermentazione eliminato CO_2, è azoto puro.

Tempo impiegato per l'efflusso.

Aria	47″,2		Gas	46″,5	
»	47″,25	47″,2	»	46″,5	46″,5
»	47″,2		»	46″,5	

Densità trovata 0,9705
Densità dell'azoto . . . 0,9714.

Questa costatazione diretta ci è sembrata necessaria perchè finora il gas svolto nella fermentazione salnitrica era stato ritenuto per azoto solo perchè non veniva assorbito con i soliti mezzi e perchè sparivano contemporaneamente i nitrati.

Determinazione del CO_2 combinato alla potassa.

La quantità di CO_2 sviluppata fu di cc. 36,46, poichè da esperienze precedenti avevamo trovato che molta anidride carbonica rimaneva trattenuta nel liquido allo stato di bicarbonato con la KOH liberatasi dalla demolizione della molecola del nitrato, procedemmo alla determinazione di questa CO_2 col metodo seguente.

Nel palloncino ancora collegato alla pompa, e in cui vi era vuoto perfetto, si

fece aspirare dell'acido solforico diluito servendoci del medesimo metodo impiegato per l'innesto.

Il gas sviluppato per l'azione dell'H_2SO_4 fu raccolto in un gassometrino di vetro e letto in due volte nelle burette Hempel.

1ª porzione	cc. 75, 1	
Temperatura	» 23°,5	
Pressione.	» 768, 5 mm.	
Pressione ridotta	» 744, 5	
Volume del gas corretto		cc. 67,77
2ª porzione	cc. 53, 3	
Temperatura	» 24°,5	
Pressione	» 767, 3 mm.	
Pressione ridotta	» 741, 6 mm.	
Volume del gas corretto		» 47,72
Totale del gas corretto . .		cc. 115,49

Questo gas fu assorbito completamente dalla potassa.

Riassunto del gas raccolto.

Azoto		cc. 61.44
CO_2 Libera . . .	cc. 36,46	» 151,95
CO_2 Combinata . .	» 115,49	
Totale del gas		cc. 213,39

Determinazione del glucosio residuo.

Estratto il gas si smontò il palloncino e si constatò con la difenilammina la scomparsa e l'assenza dei nitrati. Si portò il volume del liquido a cc. 500 e similmente si portò a cc. 500 il volume del liquido del palloncino di controllo.

Dopo defecazione con acetato di piombo e precipitazione dell'eccesso di piombo con solfato di sodio, si procedette alla titolazione del glucosio col liquido di Fehling nei due palloncini.

La determinazione di glucosio sul palloncino non fermentato servì per darci la quantità esatta di glucosio che si trovava nel palloncino fermentato quando si fece l'innesto. Così venivano eliminati gli errori in relazione alla eventuale impurità del glucosio, al suo contenuto in acqua e sovrattutto alla caramellazione subìta nella sterilizzazione.

	Pallone non fermentato	Pallone fermentato
Glucosio impiegato per cc. 10 di liquido di Fehling	cc. 27,5	cc. 37
Quantità di glucosio	gr. 0,909	gr. 0,6757

Dunque i batterî avevano distrutto gr. 0,2333 di glucosio.

Rapporto dell'azoto con la quantità di nitrato impiegato.

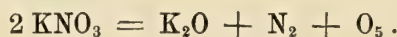
Ponendo ora in rapporto la quantità di azoto trovato colla quantità di nitrato di potassa (gr. 0,6006) impiegata si hanno le seguenti cifre:

Azoto calcolato . .	gr.	0,0830	pari a cc.	66,39
Azoto trovato . . .	»	0,0770	» »	61,44.

Si è dunque avuta una perdita di 6 milligrammi d'azoto, ossia si è sviluppato il 5,42 % in meno dell'azoto calcolato. Evidentemente quest'azoto è servito alla formazione del protoplasma batterico, il che ha grande importanza biologica quando si ponga mente all'origine minerale di quest'azoto.

L'ossigeno contenuto nel CO_2 è uguale all'ossigeno liberato dal nitrato.

L'unica possibile equazione chimica che può rappresentarci la demolizione della molecola del nitrato è la seguente

$$2\,KNO_3 = K_2O + N_2 + O_5 .$$

Infatti l'ossido di potassio resta nel liquido combinandosi successivamente con acqua e con CO_2 e l'azoto si svolge allo stato elementare.

Ma l'ossigeno dove va? Nell'analisi del gas sviluppato non vi è traccia di ossigeno; eppure da gr. 0,6006 di KNO_3 secondo l'equazione data, si sono liberati gr. 0,2378 di ossigeno.

Evidentemente quest'ossigeno allo stato nascente si è combinato al carbonio del glucosio formando CO_2. E i calcoli tornano. Nei cc. 151,95 di CO_2 che si sono raccolti; esistono gr. 0,2172 di ossigeno, ossia 20 milligrammi in meno della quantità calcolata.

Anche quest'ossigeno trovato in meno sarà servito alla formazione del protoplasma batterico.

Ossigeno	esistente nel nitrato e calcolato secondo la formola .	0,2378
	trovato nei cc. 151,95 di CO_2 raccolto	0,2172
		0,0206

CO_2 . .	calcolato dall'ossigeno del nitrato .	gr.	0,3270 =	cc.	165
	trovato	»	0,2936 =	»	151,95

Calcolo dell'alcalinità desunta dal CO_2 combinato.

Secondo l'equazione $2\,KNO_3 = K_2O + N_2 + O_5$ la quantità di KOH che si trova nei gr. 0,6006 di KNO_3 impiegato corrisponde a gr. 0,333 capace di trattenere gr. 0,2616 di CO_2 pari a cc. 132,5. Invece si sono trovati cc. 115,49 di CO_2 combinata.

Certamente una parte di bicarbonato con l'ebollizione nel vuoto si è decomposta.

Ora il fatto che con un acido si svolgono dal liquido cc. 115,49 di CO_2 dimostra che potassa si trova realmente nel liquido e che il glucosio non si è spezzato o almeno non si sono prodotti acidi a minor numero di atomi di carbonio.

Il carbonio contenuto nel CO_2 è uguale al carbonio contenuto nel glucosio distrutto.

La dimostrazione perentoria che la catena del glucosio non si spezza, cioè che non si formano prodotti intermedî ma che tutta la molecola del glucosio si converte in $H_2O + CO_2$, è data dal fatto che dei gr. 0,909 di glucosio impiegato restano indecomposti (ossia non precipitabili con acetato di piombo, dosabili con liquido di Fehling) gr. 0,6757.

Solo gr. 0,2333 del glucosio impiegato sono scomparsi dal liquido, il rimanente del glucosio non è stato punto modificato.

Ora il peso del carbonio contenuto nei gr. 0,2333 di glucosio distrutto è uguale a gr. 0,0933 e il peso del carbonio contenuto nei cc. 151,95 di CO_2 raccolto è di gr. 0,0814.

Dunque eccetto 11 milligrammi di carbonio che certamente sono andati a formare il corpo dei batterî, tutto il carbonio del glucosio distrutto è stato ossidato dall'ossigeno del nitrato per formare l'anidride carbonica che si è raccolta.

L'ossigeno che si viene liberando dalla molecola del nitrato non agisce egualmente in tutte le molecole del glucosio della soluzione ossidandole gradualmente e spezzandone la catena, ma le ossida completamente ad una ad una, sicchè per ogni 24 molecole di nitrato restano distrutte 5 molecole di glucosio interamente ed esaurito il nitrato si ritrova inalterato il glucosio eccedente [1].

Da queste considerazioni emerge la seguente formula:

$$5\,C_6H_{12}O_6 + 24\,KNO_3 = 24\,KHCO_3 + 6\,CO_2 + 18\,H_2O + 12\,N_2 .$$

L'analisi dei prodotti della fermentazione coincide colle quantità calcolate secondo questa equazione.

Le differenze sono tutte in meno e sono di milligr. 6 per l'azoto, milligr. 20 per l'ossigeno e milligr. 11 per il carbonio [2].

[1] Un'ossidazione così completa del carbonio accanto ad una riduzione così intensa dei nitrati è del più alto interesse chimico-biologico e crediamo utile far notare la speciale fermentazione, che il glucosio subisce coi batteri denitrificatori e a cui proponiamo il nome di *fermentazione carbonica*.

[2] Una relazione fra la quantità di sostanza organica distrutta e il nitrato consumato era già stata intraveduta dal Deherain (Ann. agronomiques, t. XXXIII, 4) il quale trova che la riduzione dei nitrati è incompleta quando la quantità dell'amido è notevolmente inferiore a quella del nitrato (mgr. 200 di amido per mgr. 500 di nitrato) e che solo si può ottenere la distruzione completa del nitrato aggiungendo altri mgr. 200 di amido.

L'analisi del gas data dal Deherain ci ha permesso di controllare la nostra, e i suoi dati coincidono abbastanza con i nostri, quando oltre all'anidride carbonica raccolta direttamente e quella

Poichè il notevole intorbidamento della soluzione, come risulta dall'esame microscopico, è dovuto all'aumento dei microrganismi, è da ritenersi che queste piccole quantità di carbonio, ossigeno ed Azoto, non riscontrate con l'analisi siano state utilizzate per la moltiplicazione dei batterî e per i prodotti del loro ricambio materiale.

Esperienza di controllo.

Nella esperienza sopra riferita i nitrati sono scomparsi intieramente, sicchè la difenilammina e la brucina non davano più reazione, mentre il glucosio rimaneva in gran parte inalterato.

Abbiamo voluto, per controllo, studiare il caso di una soluzione in cui la quantità di nitrato fosse di fronte al glucosio in proporzioni maggiori di quelle calcolate secondo la formola in modo da realizzare il caso inverso, cioè la distruzione completa del glucosio e la permanenza del nitrato.

In questa esperienza per far fronte all'eventualità di un'analisi più minuta abbiamo adoperato un pallone della capacità di cinque litri con la seguente soluzione:

Glucosio	gr.	3,00
Nitrato potassico. . .	»	9,00
Na Cl	»	2,00
$Na_3 PhO_4$	»	0,30
Acqua	»	2500,00

Il metodo batteriologico seguito fu identico a quello precedente. Dal lato analitico dovemmo rinunziare all'idea di raccogliere tutto il gas, in vista della enorme quantità prodottasi. Ciò non ostante si analizzarono due saggi del gas sviluppato, che in media dettero la percentuale di anitride carbonica ed azoto, trovate nella prima esperienza.

Invece di raccogliere il CO_2 combinato alla KOH si preferì determinare direttamente questa per mezzo dell' HCl decinormale. A quest' uopo il liquido del pallone fu portato esattamente al volume di tre litri. 100 cc. di questa soluzione richiese cc.: 21,3 di HCl $\frac{N}{10}$ per l'esatta saturazione del liquido all' ebollizione. Ciò dimostra nel liquido la presenza di gr. 3,578 di KOH. Poichè il liquido dava intensa colorazione con la difenilammina, procedemmo alla determinazione quantitativa del nitrato

---

che il Deherain libera dai bicarbonati con l'ebollizioue si calcoli anche quella che rimane nel liquido sotto forma di bicarbonato.

Anche J. Jensen, in un lavoro da noi ricevuto quando già questa Memoria era stata consegnata per la stampa (Central Blatt. f. Bacht II Abt. III 97), trova con un'esperienza analoga a quella di Deherain un nesso fra la sostanza organica distrutta ed il nitrato consumato, ma non ci è stato possibile controllare le sue cifre dal punto di vista della nostra equazione chimica, perchè egli dice di impiegare soluzioni al 0,2, 0,4, 0.6, 0,8 e all'1 % di zuccaro, ma non precisa il numero dei centimetri cubici impiegati.

rimasto inalterato nella soluzione, col metodo di Schultze e Tiemann modificato da Piccini [1] per la determinazione dell' acido nitroso in presenza di acido nitrico.

La sola aggiunta di cloruro ferroso neutro non diede che poche bolle di gas, indizio di minime tracce di nitriti; con l' aggiunta di HCl però si ebbero cc. 19,5 alla temperatura di 22° ed alla pressione di 751 mm. che ridotti col solito metodo equivalgono a cc. 17,30 di NO.

Col calcolo si stabilisce che la quantità di nitrato residuo è di gr. 2,346. Dunque sono stati consumati dai batterî gr. 6,654 di nitrato che corrispondono a gr. 3,680 di KOH.

KOH calcolata dalla quantità di nitrato consumato gr. 3,680
KOH trovata (acidimetricamente) . . . . „ 3,578

Avendo trovato nel liquido una grande quantità di nitrato, benchè avessimo intrapreso l' analisi del pallone, solo parecchi giorni dopo ch'era cessato lo sviluppo delle bollicine gassose, cioè quando tutto faceva credere che la denitrificazione fosse compiuta, si fece la prova del glucosio con il liquido Fehling, che fu del tutto negativo.

Ciò ci ha dimostrato esaurientemente che la denitrificazione non ha più luogo quando tutto il glucosio è bruciato.

Analogamente nella prima esperienza risultò che il glucosio rimaneva indecomposto quando il nitrato era stato consumato.

L' ossigeno del nitrato si porta dunque nel carbonio del glucosio e quando uno dei due poli fra cui si compie lo scambio dell' ossigeno viene a mancare, la reazione si arresta.

Il processo chimico della riduzione dei nitrati.

Il Deherain nella sua Memoria sulla riduzione dei nitrati trova che nel liquido in fermentazione si forma acido nitroso, che in un liquido contenente nitrito invece di nitrato la fermentazione si produce egualmente, e inoltre trova fra i prodotti gassosi una quantità rilevante di ossidulo di azoto ($^1/_5$ dell'azoto svolto).

In base a questi dati a noi parve razionale ammettere che la riduzione avvenisse per gradi, cioè che dal nitrato si passasse al nitrito, e che da questo pure per sottrazione di un atomo di ossigeno ad iponitrito, che per la sua instabilità si scindeva in K_2O e N_2O, e in parte si scindeva in azoto ossigeno e potassa.

Non potevamo spiegarci diversamente la presenza dell' N_2O nel gas.

Sotto questo punto di vista furono fatte le seguenti esperienze:

1° *Ricerca di nitriti nel liquido in fermentazione.* — La salda d' amido iodurata dà costantemente una bella reazione dei nitriti, similmente l' acido solforico ed il cloruro di cobalto con cianuro potassico. Però col metodo di Piccini [2] la determinazione quantitativa dell'acido nitroso fatta quattro volte in condizioni diverse non indicò che tracce di nitrito.

[1] Gazzetta Chimica Italiana.
[2] Piccini, Gazzetta Chimica Italiana.

2° *Sviluppo in sostrati contenenti nitrito invece di nitrato.* — Avendo nelle prime esperienze adoperato nitrito impuro si ebbe sviluppo e formazione di schiuma. Però avendo ricercato col metodo qualitativo di Piccini della soluzione solforica d'urea, zingo e salda d'amido iodurata se i nitriti contenessero nitrati, si potè constatare la loro presenza.

Con nitriti puri (preparati da noi) non abbiamo avuto sviluppo.

3° *Sviluppo in sostrato contenenti iponitrito.* — Abbiamo ottenuto l'iponitrito di sodio cristallizzato col seguente metodo:

Gr. 100 di nitrito di sodio con gr. 30 di soda furono sciolti in cc. 500 di acqua. In questa soluzione, tenuta in miscuglio frigorifero, furono versati a poco a poco due chili di amalgama liquida di sodio al 2 %. Cessato lo sviluppo gassoso, si decantò il liquido dal mercurio metallico e si aggiunse ossido di mercurio sino a che questo si depositava inalterato; cioè sino a decomposizione completa dell' idrossillammina formatasi come prodotto secondario.

Il liquido filtrato alla pompa venne esattamente saturato con acido acetico e precipitato con nitrato d'argento.

Si ottenne in tal modo un abbondante precipitato giallo d'iponitrito d'argento, che venne filtrato e lavato esattamente.

Questo precipitato ancora umido viene mescolato con cloruro di sodio in eccesso, ed in tal modo dopo filtrazione si ottiene una soluzione d'iponitrito di sodio esente di cloruro. Questa soluzione trattata con alcool assoluto lascia deporre al fondo della bevuta un olio pesante che viene separato dal liquido sovrastante, che diluito con poca acqua e messo nel vuoto, lascia depositare delle lamine cristalline d'iponitrito sodico.

Disgraziatamente questo sale in soluzione acquosa si decompone in poche ore ed è inoltre decomposto dal glucosio, e quindi per vedere se veniva almeno in parte ridotto in azoto dal *B. denitrificans* V, si è dovuto ricorrere al seguente artificio.

Ad un palloncino contenente una cultura in pieno sviluppo su asparagina e fosfato, è stato posto un tappo a due fori attraversati, uno da un tubo di vetro portante un tubo di gomma con una pinza, e l'altro da un tubetto chiuso all'estremità nel quale veniva posto l'iponitrito solido, protetto da uno stratarello di ovatta. Fatto il vuoto alla pompa e capovolto il palloncino in un bagno di acqua, la soluzione completa dell' iponitrito solido avvenne, come si era preveduto, lentissimamente in 5-6 giorni. In queste condizioni i batterî avevano campo d'esplicare la loro azione riduttrice prima che l'iponitrito avesse potuto decomporsi spontaneamente in ossidulo di azoto ed idrato sodico.

Estratto il gas e agitato in una pipetta Hempel a potassa, non si ebbe diminuzione di volume, però venne completamente assorbito dall' acqua bollita.

Il gas era dunque tutto ossidulo di azoto e nessuna riduzione dell' iponitrito era avvenuta per opera di batterî.

4° *Ricerca dell' iponitrito nelle soluzioni in fermentazione.* — Il tentativo di ricercare col nitrato d'argento l'iponitrito in soluzioni esenti di cloruro e fosfato fu negativo.

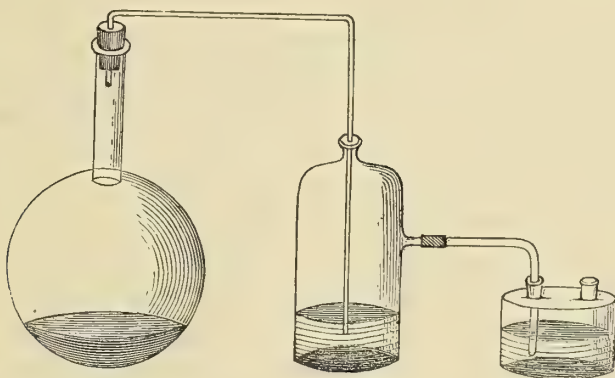
5° *Sviluppo in ambiente di* N_2O. — In un palloncino con una soluzione di glucosio-cloruro e fosfato innestato col *B. denitrificans* V, fu fatto gorgogliare ossidulo

di azoto per parecchie ore fino a saturare la soluzione e scacciarne tutta l' aria. L'apparecchio ben chiuso fu lasciato a sè per parecchi giorni, però non si ebbe sviluppo.

L' N_2O dunque non viene ridotto ad azoto.

6° *Mancanza di* N_2O *nel gas sviluppato dalla fermentazione.* — Numerose prove fatte per stabilire se nel gas di fermentazione esistesse l' N_2O, come afferma il Deherain, riuscirono negative in modo assoluto.

Nessun composto ossigenato dell'azoto esiste nel gas, sviluppato per il *B. denitrificans* V.

Per ispiegare lo sviluppo dell'azoto gas dai nitrati era stato accennato un altro meccanismo, cioè che i batterî denitrificatori ridurrebbero i nitrati parte in nitrito e parte in ammoniaca; dall'unione di questi due prodotti intermedî, si formerebbe nitrito di ammonio che per perdita di acqua darebbe azoto libero.

Probabilmente questo meccanismo avviene in natura. Numerosi batterî hanno il potere di ridurre i nitrati in nitriti; alcuni, come il *B. mycoides*, spingono la riduzione da nitrato ad ammoniaca. La simbiosi di queste due specie batteriche dà certamente origine a nitrito d' ammonio da cui per altra azione batterica di disidratazione può svilupparsi azoto. Ma per una specie sola di microorganismi è improbabile la coesistenza di funzioni biochimiche così disparate. Ad ogni modo anche questa ipotesi è stata sottoposta alla prova dei fatti per il *B. denitrificans* V.

L' esperienza è stata così condotta: In un palloncino di glucosio e $(NH_4)NO_2$ e sali minerali, innestato col *B. denitrificans* V si è fatto il vuoto alla pompa.

La soluzione di $(NH_4)NO_2$ impiegato era esente di nitrato ed il suo titolo fu esattamente determinato col permanganato. Si sapeva quindi la quantità totale di azoto contenuta nel nitrito d' ammonio impiegato e quest' azoto, per confermare il meccanismo proposto, si avrebbe dovuto sviluppare allo stato di gas. Nel caso contrario si doveva sviluppare solo la metà dell' azoto totale, ossia l' azoto nitroso, mentre l' NH_3 sarebbe rimasta in soluzione. Invece in questo palloncino non vi fu intorbidamento; nessun gas si sviluppò. Altri tre palloncini montati per lo stesso scopo dettero risultati negativi.

L' assenza dell' NH_3 nei prodotti della fermentazione fu dimostrata nella maniera seguente.

S' incominciò col fondere il nitrato di potassio perchè nonostante ripetute cristallizzazioni presentava sempre traccie di ammoniaca con il liquido di Nesslér.

Una soluzione di gr. 2,50 di nitrato fuso, glucosio e sali, dopo sterilizzazione fu innestato col *B. denitrificans* V. La soluzione era in un palloncino chiuso da un tappo di gomma attraversato da un tubo di vetro che entrando a smeriglio in una boccetta di lavaggio pescava in cc. 3 di $H_2SO_4 \frac{N}{10}$. Per proteggere poi il titolo di questa soluzione, la boccetta era connessa con un'altra boccia con H_2SO_4.

Dopo due giorni, quando il liquido era già intorbidato e si notarono delle bolle di gas, si rititolarono i cc. 3 di $H_2SO \frac{N}{10}$ contenuti nella boccetta di lavaggio con $KOH \frac{N}{10}$ e si ricercò l' NH_3 nel liquido in fermentazione col metodo di Schloesing. Tutte e due queste prove esclusero la presenza di traccie di ammoniaca tanto nel gas prodotto che nel liquido in via di fermentazione.

Si scelse per l'esperienza il momento iniziale della denitrificazione come quello in cui dovevano abbondare i prodotti intermedî della denitrificazione.

Ad escludere poi in via sperimentale l'idea che il batterio in esame potesse dall' NH_3 formare azoto gas, abbiamo sostituito nel solito mezzo di cultura (glucosio, cloruro, fosfato e nitrato) il $(NH_4)NO_3$ al KNO_3.

Come nella scissione della molecola del KNO_3 si ritrova nel liquido fermentato tutta la KOH corrispondente al nitrato, così adoperando $(NH_4)NO_3$ tutta l' NH_3 si dovrebbe trovare nel liquido. Ora se i batterî fossero in grado di sviluppare azoto dall' NH_3, avrebbe dovuto trovare in soluzione una quantità di NH_3 minore di quella contenuta nel $(NH_3)NO_3$ impiegato; chè se poi d'altra parte l' NH_3 trovata fosse stata superiore a quella calcolata, si verrebbe a dimostrare la proprietà del nostro batterio di ridurre il radicale NO_3 in NH_3.

Si fecero adunque tre palloncini contenenti quantità aliquote del mezzo di cultura sopradetto. Uno fu innestato e gli altri due lasciati come controllo.

Dopo alcuni giorni si fecero in tutti e tre i palloncini determinazioni di NH_3 col metodo di Schloesing e fu trovata in tutti e tre la stessa quantità di NH_3 che vi si era messa sotto forma di $(NH_4)NO_3$.

Pur non escludendo adunque che simbiosi batteriche possano compiere il fenomeno della denitrificazione con la formazione di $(NH_4)NO_2$, ed ammettendo anzi che la notevole quantità di N_2O trovata dal Deherain nel gas sviluppato dalle sue culture sia un forte appoggio all'ipotesi da noi messa avanti, per cui alcune specie di denitrificatori ridurrebbero i nitrati ad azoto libero gradualmente trasformandoli cioè prima in nitriti e poi in iponitriti di cui l' N_2O sarebbe l'indice, dobbiamo però dichiarare che queste due ipotesi non possono essere applicate al processo della riduzione dei nitrati operata dal *B. denitrificans* V.

Le cause della denitrificazione.

Su questo argomento le nostre ricerche sono state precedute da importanti lavori di Deherain e Burri e Stutzer. Secondo i detti autori la causa di questa fermentazione è da ricercarsi nel bisogno di ossigeno, che spingerebbe i denitrificatori a ridurre i nitrati.

Fin dal 1882 il Deherain ([1]) credendo tutti i denitrificatori anerobi, pose per condizione necessaria della denitrificazione l'assoluta assenza dell'ossigeno atmosferico. In seguito quando si assodò che la denitrificazione si può compiere senza prendere alcuna precauzione per escludere l'aria, si prese in considerazione l'influenza che questa poteva avere sull'andamento del fenomeno.

Burri e Stutzer trovarono che l'energia di fermentazione per il *B. denitrificans* II (anaerobio facoltativo) era arrestata da un copioso passaggio di aria, mentre ciò non avveniva per il *B. denitrificans* I (aerobio obligatorio) in simbiosi col *B. Coli*.

In seguito Stutzer e Maul ([2]) dimostrarono anche per questi due ultimi batterî in simbiosi il medesimo arresto della fermentazione per il passaggio di una corrente d'aria.

Ai medesimi risultati giunge il Deherain nel suo ultimo lavoro facendo passare 70-80 litri d'aria al giorno in un palloncino di cc. 200; nessun arresto otteneva per il passaggio di 7-8 litri.

Nel dubbio che il troppo copioso passaggio d'aria potesse arrestare la denitrificazione disturbando meccanicamente i batterî, abbiamo istituita un'esperienza nella quale adoperavamo ossigeno invece di aria, e per cui ci è stato dato paragonare l'influenza dell'ossigeno con l'influenza del vuoto e con quella dell'aria atmosferica nelle condizioni ordinarie.

Si è fatta una soluzione madre di glucosio, nitrato e sali di cui si sono prese porzioni aliquote per palloncini di cc. 500, ognuno dei quali conteneva gr. 0,75 di KNO_3.

In un palloncino si è fatto il vuoto e l'innesto col solito metodo; un altro si è lasciato fermentare col solito tappo di ovatta all'aria ed il terzo si è unito ad un gassometro di ossigeno che prima di gorgogliare nella cultura veniva filtrato in una colonna piena di ovatta. La quantità d'ossigeno che si fece passare nel palloncino fu di circa 10 litri al giorno.

La sterilizzazione e l'innesto fu fatto contemporaneamente in tutti e tre i palloncini l'11 di agosto 1897.

La mattina del 13 incominciò ad intorbidarsi il pallone (coll'ossigeno).

La mattina del 14 notevolissimo intorbidamento nel pallone (ossigeno); discreto nel pallone (aria); scarsissimo nel pallone (vuoto).

La mattina del 16 massimo intorbidamento ma senza schiuma nel pallone (ossigeno); discreto intorbidamento e discreta schiuma nel palloncı (aria); intorbidamento minore ma moltissima schiuma nel pallone (vuoto).

([1]) Deherain et Maquenne, Ann. agr., t. IX, p. 5.

([2]) Stutzer et Maul, Centr. Blatt, t. II, Bd. 15.

Il 17 sterilizziamo, portiamo a cc. 500 il volume di ogni palloncino e su cc. 50 facciamo la determinazione di nitrati e nitriti col metodo di Schultze e Tiemann modificato da Piccini.

In tutti furono riscontrate appena tracce di nitriti.

Ecco i risultati dell' esperienza:

	Intorbidamento	NO trovato in cc. 50	KNO_3 consumato
Pallone ossigeno . . .	massimo	cc. 6,8	gr. 0,4426
" aria	discreto	" 9,5	" 0,3205
" vuoto	scarso	" 0,8	" 0,7139

Se nel vuoto quindi si ebbe la denitrificazione quasi completa, in corrente di ossigeno si ebbe il massimo intorbidamento.

È ben difficile leggere in questa esperienza e bisognerebbe forse scindere l' attività vegetativa dall' attività fermentativa. La prima viene immensamente favorita dall' ossigeno, la seconda dal vuoto dove i lavoratori sono in numero minore, ma viceversa più attivi.

Infatti la rapidità dello sviluppo e l' intensità dell' intorbidamento ossia della moltiplicazione batterica è perfettamente in ragione diretta con la quantità di ossigeno con cui i batterî sono in contatto.

Non così nette vanno le cose per l'azione fermentativa. Questa è massima nel vuoto, ma è maggiore nell' ossigeno che nell' aria, per cui non si può analogamente stabilire la legge che l'energia di fermentazione sia in ragione inversa dell'ossigeno.

Probabilmente la maggiore quantità di nitrato consumata nel pallone (ossigeno) di fronte a quello (aria) va spiegato col numero straordinariamente più grande di batterî, i quali benchè isolatamente più pigri, vincono collettivamente con la forza del numero, gli effetti ottenuti dai batterî che vivono all' aria libera nelle condizioni ordinarie.

A questo punto l' analisi del fenomeno e delle sue cause s' arresta, e bisognerebbe aprire nuove vie e nuovi orizzonti alla ricerca sperimentale, per proseguire in un campo dove il problema della vita si circonda delle maggiori sue tenebre.

Una applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa.

Memoria del Socio U. DINI

letta nella seduta del 5 dicembre 1897.

---

1. Nel vol. XXXII del Giornale di Crelle, Jacobi studiò l'integrale definito $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\,\mathrm{sen}\,\varphi}$ per valori complessi di A e B, e questo integrale giova moltissimo in varie teorie, fra le quali quella delle funzioni sferiche.

Voglio ora mostrare come colla teoria dei residui si possono trovare alcuni integrali che comprendono come caso particolare quello di Jacobi insieme a molti altri della teoria delle funzioni sferiche, e si possono studiare infinite funzioni speciali.

Indichiamo perciò con $u(z)$ una funzione di z uniforme nel campo C, e senza singolarità essenziali, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i suoi infinitesimi degli ordini $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ che cadono in questo campo. Sia poi $\psi(z)$ un'altra funzione di z uniforme entro C i cui punti singolari, se ne avrà, siano distinti dai punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e possano anche essere singolarità essenziali ma isolate [1], e sia p un numero intero e positivo qualsiasi. Avremo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(z)}{u(z)^p}\,dz = \sum_1^n r_s + \sum r'_t,$$

[1] Osserviamo, per quanto possa anche apparire superfluo, che se $w(z)$ è una funzione uniforme di z in un campo C, le cui singolarità sono soltanto poli o punti singolari essenziali *isolati*, negli intorni di questi punti non vi saranno altri punti singolari, e nessuno di essi sarà punto limite di punti singolari. Evidentemente dunque nel campo C *se è finito*, quando nel suo interno e sul contorno non vi siano altro che singolarità polari o essenziali isolate, il numero di queste singolarità sarà sempre finito, e lo stesso accadrà anche se il campo C sarà infinito quando il punto all'infinito non sia un punto singolare o in esso vi sia soltanto una delle singolarità anzidette. Oltre a ciò se a è un polo o un punto singolare essenziale isolato, lo sviluppo di Laurent per potenze intere positive o negative di $z - a$ per la stessa funzione $w(z)$ sarà valido in tutto un intorno sufficientemente piccolo di a fuori che in questo punto, riducendosi la parte colle potenze negative a un polinomio nel caso dei poli, e restando una serie nel caso delle singolarità essenziali; e l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int w(z)\,dz$ esteso a un piccolo cerchio che abbia il centro in a o anche a una piccola curva qualsiasi che di punti singolari nel suo interno abbia soltanto questo punto a, sarà uguale al coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nel detto sviluppo, tanto nel caso dei poli che in quello dei punti singolari essenziali isolati; ed è per questo che in ogni caso questo coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ viene detto residuo relativo al polo o punto singolare essenziale isolato a.

l' integrale essendo esteso al contorno c di C, e essendo r_s i residui di $\frac{\psi(z)}{u(z)^p}$ nei punti α_s, e r'_t quelli della stessa funzione nei punti singolari che $\psi(z)$ avesse entro C, supposto che di questi punti come dei punti α_s non ve ne siano sul contorno di C.

Semplicizzando poi col supporre che il campo C sia un cerchio di raggio k, e su questo cerchio si abbia $z = ke^{i\varphi}$, sarà:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\psi(z)}{u(z)^p} d\varphi = \sum_1^n r_s + \sum r'_t$$

intendendo che sotto l' integrale sia $z = ke^{i\varphi}$.

E poichè come è noto (V. ad es. mia *Serie di Fourier* ecc. pag. 141) si ha:

$$r_s = \frac{1}{\pi(p\mu_s - 1)} \frac{d^{p\mu_s - 1}}{dz^{p\mu_s - 1}} \left\{ \psi(z) \frac{(z-\alpha_s)^{\mu_s}}{u(z)^p} \right\}_{z=\alpha_s} =$$

$$= \frac{1}{\pi(p\mu_s - 1)} \frac{d^{p\mu_s - 1}}{dz^{p\mu_s - 1}} \left\{ \psi(z) \left[\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)} + \frac{u^{(\mu_s+1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s + 1)} (z-\alpha_s) + \cdots \right]^{-p} \right\}_{z=\alpha_s},$$

si avrà la formola:

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\psi(z)}{u(z)^p} d\varphi =$$

$$= \sum_1^n \frac{1}{\pi(p\mu_s - 1)} \frac{d^{p\mu_s - 1}}{dz^{p\mu_s - 1}} \left\{ \psi(z) \left[\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)} + \frac{u^{(\mu_s+1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s + 1)} (z-\alpha_s) + \cdots \right]^{-p} \right\}_{z=\alpha_s} + \sum r'_t,$$

la quale col particolarizzare le quantità che vi figurano ci condurrà a conseguenze notevoli, e ad una massa di altre formole.

2. Notiamo anche che nel secondo membro della formola (1) mancherà la seconda somma $\sum r'_t$ se la funzione $\psi(z)$ non avrà singolarità nè nell' interno del cerchio C nè sul cerchio; e mancherà la prima se nello stesso campo la $u(z)$ non avrà infinitesimi o se p sarà zero, come mancherà anche quando $u(z)$ non sia mai infinita in C, e si ammetta che p possa essere negativo, ma sempre intero; cioè in questi casi si avrà più semplicemente:

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\psi(z)}{u(z)^p} d\varphi = \sum r_t .$$

E nel caso poi che in tutto C (il contorno incluso) manchino tanto gli infinitesimi quanto gli infiniti di $u(z)$, allora questa formola stessa (2) continuerà a sussistere qualunque valore costante abbia p *anche complesso*; perchè se sarà ad esempio $p = g + ig_1$, con g e g_1 reali, avremo:

$$u(z)^p = e^{p \log u(z)} = \cos[(g_1 - ig) \log u(z)] + i \,\mathrm{sen}\, [(g_1 - ig) \log u(z)],$$

e supponendo fissato il valore da prendersi per $\log u(z)$ o per $u(z)^p$ in un punto di C, non verrà a manifestarsi la polidromia di $u(z)^p$ entro C.

E similmente nella stessa formola (2) potremo nello stesso caso a $\frac{1}{u(z)^p}$ sostituire $\log u(z)$, sempre intendendo fissato il valore di $\log u(z)$ in un punto; e più general-

mente a $\frac{1}{u(z)^p}$ potremo sostituire $\varphi(u(z))$ essendo la funzione φ scelta in modo che $\varphi(u(z))$ venga ad essere uniforme e senza singolarità entro il cerchio C o su questo cerchio.

Oltre a ciò, per il caso in cui $u(z)$ non ha nè infinitesimi nè infiniti nell'interno di C, *ma può averne sul contorno*, aggiungiamo che la formola (2) continuerà a sussistere anche se la funzione $u(z)$ diventerà infinitesima di un ordine intero qualsiasi m in punti a del contorno c del cerchio C, purchè il numero p stesso se esso è reale, o la sua parte reale g se esso è il numero complesso $g + ig_1$ sia negativa, o essendo positiva sia inferiore ad $\frac{1}{m}$; e se invece $u(z)$ nel punto a del contorno avrà un infinito di ordine intero m la parte reale g di p dovrà essere positiva, o essendo negativa dovrà essere in valore assoluto inferiore ad $\frac{1}{m}$.

In questi casi infatti dal contorno c del cerchio C potremo escludere il punto a descrivendo col centro in a una porzione c_ε di un cerchio di raggio piccolissimo ε *interna* a C, e sostituendola a quella parte di c che sarà da essa racchiusa; e allora il secondo membro della nostra formola (2) non verrà affatto alterato, mentre nel primo membro l'integrale verrà a comporsi di due, uno dei quali esteso a c_ε, e l'altro esteso alla porzione rimasta c' di c.

Ora quanto a questi due integrali, osserviamo che avendosi sulla porzione c_ε di cerchio di raggio ε $z - a = \varepsilon e^{i\theta_1}$, $u(z) = (z-a)^\mu u_1(z)$ con $u_1(z)$ finita e diversa da zero, e $\mu = m$, o $\mu = -m$ secondochè a è un infinitesimo o un infinito di $u(z)$ sarà $dz = \varepsilon e^{i\theta_1} i d\theta_1$, $u(z)^p = \varepsilon^{\mu g} \varepsilon^{i\mu g_1} e^{ip\mu\theta_1} u_1(z)^p$, e quindi poichè μg sarà negativa o nulla, o essendo positiva sarà inferiore alla unità, l'integrale $\int \frac{\psi(z)}{u(z)^p} dz$ esteso a quella porzione c_ε di cerchio ε tenderà a zero con ε.

D'altra parte, se si indica con φ_a il valore di φ nel punto a, il modulo di $z - a$ su tutto c sarà evidentemente $\sqrt{2k^2 - 2k^2 \cos(\varphi - \varphi_a)}$, ovvero $2k \operatorname{sen} \frac{\varphi - \varphi_a}{2}$, e quindi il modulo di $\frac{z\psi(z)}{u(z)^p}$ o di $\frac{z\psi(z)}{(z-a)^{\mu g} (z-a)^{i\mu g_1} e^{ip\mu\theta_1} u_1(z)^p}$, non diventerà infinito per $\varphi = \varphi_a$, o lo diventerà d'ordine inferiore al primo, e perciò la funzione sotto l'integrale del primo membro della (2) sarà atta alla integrazione lungo tutto il cerchio c, e il limite per $\varepsilon = 0$ dell'integrale $\int \frac{z\psi(z)\, dz}{u(z)^p}$ esteso a c' tenderà ancora all'integrale stesso esteso all'intiero cerchio c; talchè evidentemente si può ora affermare che la formola (2) continuerà ancora pienamente a sussistere.

La formola (2) poi sussisterà ancora *a fortiori*, se $u(z)$ avrà infinitesimi e infiniti sul contorno senza averne nell'interno di C, quando invece di $\frac{1}{u(z)^p}$ vi figurerà $\log u(z)$.

Queste osservazioni sono evidentemente notevoli, e suscettibili di ulteriori estensioni, e ci condurranno poi a risultati che sono essi pure molto importanti; ma poichè

il più spesso in questi studî dovremo supporre che p sia intero e positivo, così, salvo quei casi nei quali si dirà espressamente il contrario, intenderemo sempre che p sia intero e positivo, e che gli infinitesimi di $u(z)$ non cadano sul cerchio c.

3. Supponiamo ora che le funzioni $\psi(z)$ e $u(z)$ siano uniformi in tutto il piano a distanza finita, e le singolarità di $u(z)$ siano, come precedentemente, soltanto singolarità polari, mentre quelle di $\psi(z)$ possono anche essere singolarità essenziali *isolate*; e supponiamo inoltre che facendo crescere indefinitamente il cerchio C, ma in modo sempre che non passi pei punti singolari di $\psi(z)$ o per quelli d'infinitesimo di $u(z)$, l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi(z)}{u(z)^p}dz$ o $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\psi(z)}{u(z)^p}d\varphi$ converga verso un limite finito A; e i punti singolari di $\psi(z)$ siano diversi da quelli d'infinitesimo di $u(z)$; avremo la formola:

$$(3)\ \sum \frac{1}{\pi(p\mu_s-1)}\frac{d^{p\mu_s-1}}{dz^{p\mu_s-1}}\left\{\psi(z)\left[\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)}+\frac{u^{(\mu_s+1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s+1)}(z+\alpha_s)+\cdots\right]^{-p}\right\}+\sum r'_t=\mathrm{A},$$

la prima somma essendo estesa a tutti gli infinitesimi di $u(z)$, e la seconda ai punti singolari di $\psi(z)$, nel senso che se il numero dei detti infinitesimi di $u(z)$ o singolarità di $\psi(z)$ cresce indefinitamente al crescere di C, le somme corrispondenti siano serie, e il primo membro debba intendersi come il limite per $k=\infty$ della somma delle due somme che vi figurano relative ai punti d'infinitesimo di $u(z)$ e di singolarità di $\psi(z)$ che cadono entro il cerchio di raggio k crescente all'infinito senza passare mai pei detti punti; per modo che se il limite di una di queste due somme esisterà da per sè e sarà finito, l'altra somma sarà composta di un numero finito di termini o avrà essa pure un limite determinato e finito; e la conoscenza di una di quelle somme trascinerà quella dell'altra.

E in quanto al numero A si può osservare in modo generale che avendosi un integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_c w(z)\,dz$, se vi si cambia z in $\frac{1}{t}$ esso si riduce all'altro $-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{w\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$, esteso sul piano delle t al cerchio c_1 di raggio $\varepsilon=\frac{1}{k}$ percorso però in senso inverso; e quindi per avere il limite del primo integrale per $k=\infty$ basterà cercare quello per $\varepsilon=0$ dell'altro $\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{w\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$ nel quale il cerchio c_1 s'intende ora percorso in senso diretto; e così se $w(z)$ per $z=\infty$ avrà tutt'al più un polo o una singolarità essenziale isolata, ciò che corrisponde a dire che questo debba aversi nel punto $t=0$ per la funzione $w\left(\frac{1}{t}\right)$, allora A sarà il residuo della funzione $\frac{w\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$ per $t=0$ (¹) cioè sarà il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo di questa

(¹) Si comprende qui anche il caso in cui la funzione è finita per $t=0$, intendendo allora che il suo residuo sia zero.

funzione $\frac{w\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$ per potenze intere positive e negative di t in un intorno sufficientemente piccolo del punto $t = 0$, e sarà pure quello di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo corrispondente di $w(z)$ per potenze intere positive e negative di z fuori di un cerchio di raggio grandissimo, e lo diremo perciò ancora il residuo di $w(z)$ nel punto $z = \infty$.

Nel caso nostro quindi se $\frac{\psi(z)}{u(z)^p}$ per $z = \infty$ avrà tutt' al più un polo o un punto singolare essenziale isolato, A sarà il residuo r''_∞ di $\frac{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 u\left(\frac{1}{t}\right)^p}$ per $t = 0$, cioè sarà il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo per potenze intere e positive di t in un intorno sufficientemente piccolo di $t = 0$ per la funzione $\frac{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 u\left(\frac{1}{t}\right)^p}$, o il coefficiente di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo di $\frac{\psi(z)}{u(z)^p}$ per potenze intere positive e negative di z fuori di un cerchio di raggio grandissimo.

E si può notare una volta per tutte che il caso in cui una funzione $w(z)$ uniforme in tutto il piano, per $z = \infty$ ha tutt' al più un polo o un punto singolare essenziale isolato, corrisponde a quello in cui non ha più punti singolari *a distanza finita* al di là di un certo cerchio, e viceversa.

4. In particolare dunque supponendo che $u(z)$ sia un polinomio intero di grado m della forma:

$$u(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m, \tag{4}$$

e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_1}$ siano le radici della equazione $u(z) = 0$, e siano degli ordini di multiplicità $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m_1}$, e $\psi(z)$ sia una funzione razionale $\frac{\gamma(z)}{\nu(z)}$ il cui numeratore sia di grado h_0, e il denominatore sia di grado k_0, avremo la formola:

$$(5)\quad \sum_1^{m_1} \frac{1}{\pi(p\mu_s - 1)} \frac{d^{p\mu_s - 1}}{dz^{p\mu_s - 1}} \left\{ \frac{\gamma(z)}{\nu(z)} \left[\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)} + \frac{u^{(\mu_s + 1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s + 1)} (z - \alpha_s) + \cdots \right]^{-p} \right\}_{z=\alpha_s} + \\ + \sum r'_t = \mathrm{A},$$

dove la seconda somma è estesa ai residui r'_t di $\frac{\gamma(z)}{\nu(z)\, u(z)^p}$ nei punti d' infinitesimo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_1}$ di $\nu(z)$ che si suppongono diversi da quelli di $u(z)$, e A viene ad essere il residuo per $t = 0$ della funzione:

$$\frac{\gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2 \nu\left(\frac{1}{t}\right) u\left(\frac{1}{t}\right)^p}, \quad \text{ovvero:} \quad \frac{t^{h_0} \gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{2+h_0-k_0-mp} \left[t^{k_0} \nu\left(\frac{1}{t}\right) \right] \left[t^m u\left(\frac{1}{t}\right) \right]^p},$$

per modo che se sarà $2 + h_0 \leq k_0 + mp$ ovvero $h_0 + 1 < k_0 + mp$, avremo $A = 0$; se sarà $h_0 + 1 = k_0 + mp$, avremo $A = \frac{\gamma_0}{\nu_0 a_0^p}$, essendo γ_0 e ν_0 i coefficienti dei termini di grado più alto in z, in $\gamma(z)$ e $\nu(z)$; e se sarà $h_0 + 1 > k_0 + mp$, A potrà trovarsi sviluppando in serie di Cauchy attorno al punto $t = 0$ la funzione

$$\frac{t^{h_0} \gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{\left[t^{k_0} \nu\left(\frac{1}{t}\right)\right]\left[t^m u\left(\frac{1}{t}\right)\right]^p},$$

e prendendo per A il coefficiente di $t^{h_0+1-k_0-mp}$ in questo sviluppo. E per quanto si disse sopra in generale, o anche avendo riguardo alla prima espressione di A come limite dell'integrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\psi(z)}{u(z)^p} dz$, nel caso attuale di $h_0 + 1 > k_0 + mp$ la stessa quantità A potrà anche trovarsi eseguendo la divisione di $z\gamma(z)$ per $\nu(z)\,u(z)^p$ e prendendo per A il termine indipendente da z nella parte intera del quoziente.

Particolarizzando ancora col supporre che gli infinitesimi di $u(z)$ siano tutti del prim'ordine, la formola (5) ci darà l'altra:

$$(6)\quad \sum_1^m \frac{1}{\pi(p-1)} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left\{ \frac{\gamma(z)}{\nu(z)} \left[u'(\alpha_s) + \frac{u''(\alpha_s)}{1.2}(z-\alpha_s) + \cdots \right]^{-p} \right\}_{z=\alpha_s} +$$

$$+ \sum r'_t = 0 \quad \text{per } h_0 + 1 < k_0 + mp,$$

$$= \frac{\gamma_0}{\nu_0 a_0^p} \quad \text{per } h_0 + 1 = k_0 + mp;$$

e per $\nu(z) = 1$, con che $k_0 = 0$, avremo:

$$(7)\quad \sum_1^m \frac{1}{\pi(p-1)} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left\{ \gamma(z) \left[u'(\alpha_s) + \frac{u''(\alpha_s)}{1.2}(z-\alpha_s) + \cdots \right]^{-p} \right\}_{z=\alpha_s} = 0 \text{ per } h_0+1<mp,$$

$$= \frac{\gamma_0}{a_0^p} \text{ per } h_0+1=mp;$$

mentre se si avrà anche $p = 1$, avremo le formole note:

$$(8)\qquad \sum_1^m \frac{\gamma(\alpha_s)}{u'(\alpha_s)} = 0 \text{ per } h_0 + 1 < m, \quad = \frac{\gamma_0}{a_0} \text{ per } h_0 + 1 = m,$$

che si trovano subito anche colla decomposizione in frazioni semplici della funzione $\frac{\gamma(z)}{u(z)}$.

5. Continuiamo a supporre che $u(z)$ sia un polinomio intero di grado m dato dalla (4), e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{m_1}$ siano i suoi infinitesimi, o le radici della equazione $u(z) = 0$ degli ordini di multiplicità $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_{m_1}$, e s'intendano scritte in ordine tale che i loro moduli $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \alpha'_{i+1}, \ldots, \alpha'_{m_1}$, risultino in ordine non decrescente, cioè si abbia $\alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \cdots \leq \alpha'_i \leq \alpha'_{i+1} \leq \cdots \leq \alpha'_{m_1}$; e

supponiamo che k sia compreso fra i moduli (supposti diversi) α'_i e α'_{i+1} delle radici α_i, α_{i+1}. La (1) ci darà la formola:

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\psi(z)}{u(z)^p}\, d\varphi =$$
$$=\sum_1^i \frac{1}{\pi(p\mu_s-1)} \frac{d^{p\mu_s-1}}{dz^{p\mu_s-1}}\left[\psi(z)\left\{\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)}+\frac{u^{(\mu_s+1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s+1)}(z-\alpha_s)+\cdots\right\}^{-p}\right]_{z=\alpha_s}+\sum r_t,$$

essendo sotto l'integrale $z=ke^{i\varphi}$, per modo che, nel denominatore, $u(z)$ potrà porsi sotto la forma:

$$a_0 k^m e^{im\varphi} + a_1 k^{m-1} e^{i(m-1)\varphi} + \cdots + a_{m-1} k e^{i\varphi} + a_m,$$

e potrà trasformarsi in una somma di seni e coseni di multipli di φ.

Osserviamo poi che se s'indica con n un numero intero e positivo non superiore ad m, si avrà:

$$u(z) = z^n\left(a_0 z^{m-n} + a_1 z^{m-n-1} + \cdots + a_{m-n-1} z + a_{m-n} + \frac{a_{m-n+1}}{z} + \frac{a_{m-n+2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_m}{z^n}\right) =$$
$$= z^n\left\{a_{m-n} + \left(a_{m-n-1} z + \frac{a_{m-n+1}}{z}\right) + \left(a_{m-n-2} z^2 + \frac{a_{m-n+2}}{z^2}\right) + \cdots\right\};$$

e quindi se sarà ad es. $m-n \geq n$, o $m-2n \geq 0$, supponendo $z=ke^{i\varphi}$, e indicando con $\mathrm{F}(\varphi)$ il rapporto $\frac{u(z)}{z^n}$ si avrà:

$$\mathrm{F}(\varphi) = a_{m-n} + \left(a_{m-n-1} k + \frac{a_{m-n+1}}{k}\right)\cos\varphi + \left(a_{m-n-2} k^2 + \frac{a_{m-n+2}}{k^2}\right)\cos 2\varphi + \cdots +$$
$$+ \left(a_{m-2n} k^n + \frac{a_m}{k^n}\right)\cos n\varphi + \left(a_{m-n-1} k - \frac{a_{m-n+1}}{k}\right) i \operatorname{sen}\varphi +$$
$$+ \left(a_{m-n-2} k^2 - \frac{a_{m-n+2}}{k^2}\right) i \operatorname{sen} 2\varphi + \cdots + \left(a_{m-2n} k^n - \frac{a_m}{k^n}\right) i \operatorname{sen} n\varphi +$$
$$+ a_{m-2n-1} k^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} + a_{m-2n-2} k^{n+2} e^{i(n+2)\varphi} + \cdots + a_0 k^{m-n} e^{i(m-n)\varphi},$$

e se poniamo:

$$(10)\left\{\begin{array}{l} a_{m-n} = p_0, \quad a_{m-n-1} k + \frac{a_{m-n+1}}{k} = p_1, \quad a_{m-n-2}k^2 + \frac{a_{m-n+2}}{k^2} = p_2, \ldots a_{m-2n} k^n + \frac{a_m}{k^n} = p_n, \\ a_{m-n-1} k - \frac{a_{m-n+1}}{k} = -iq_1, \; a_{m-n-2}k^2 - \frac{a_{m-n+2}}{k^2} = -iq_2, \ldots a_{m-2n} k^n - \frac{a_m}{k^n} = -iq_n, \\ a_{m-2n-1} k^{n+1} = b_{m-2n-1}, \quad a_{m-2n-2} k^{n+2} = b_{m-2n-2}, \ldots \quad a_0 k^{m-n} = b_0 \end{array}\right.$$

avremo:

$$(11) \quad \mathrm{F}(\varphi) = p_0 + p_1 \cos\varphi + p_2 \cos 2\varphi + \cdots + p_n \cos n\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi + q^2 \operatorname{sen} 2\varphi + \cdots +$$
$$+ q_n \operatorname{sen} n\varphi + b_{m-2n-1} e^{i(n+1)\varphi} + b_{m-2n-2} e^{i(n+2)\varphi} + \cdots + b_0 e^{i(m-n)\varphi},$$

e così per ogni funzione $u(z)$ della forma (4) la formola (9) ci darà un integrale $\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\, d\varphi$, dove $z=ke^{i\varphi}$ e $\mathrm{F}(\varphi)$ è la funzione lineare di coseni e seni di

multipli di φ definita dalla (11) nella quale i coefficienti p_s, q_s e b_s dipenderanno per mezzo della (10) da quelli $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ di $u(z)$ e da k.

6. Però anzichè considerare, come qui abbiamo fatto, il caso in cui essendo data avanti la funzione $u(z)$ vengono determinati dalla (9) i coefficienti p_s, q_s e b_s della funzione $F(\varphi)$ che figura nell'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,F(\varphi)^p}\, d\varphi$, giova considerare invece il caso iu cui sono dati arbitrariamente i coefficienti (reali o complessi) p_s, q_s e b_s, e si vuole determinare l'integrale corrispondente.

Ricavando perciò dalla (10) i valori dei coefficienti $a_0, a_1, a_2 \ldots a_m$ si trova che la funzione $u(z)$ corrispondente ai valori dati delle p_s, q_s e b_s sarà la seguente:

$$(12) \quad u(z) = k^n \Big\{ b_0 \frac{z^m}{k^m} + b_1 \frac{z^{m+1}}{k^{m+1}} + \cdots + b_{m-2n-1} \frac{z^{2n+1}}{k^{2n+1}} + \frac{p_n - iq_n}{2} \frac{z^{2n}}{k^{2n}} + \frac{p_{n-1} - iq_{n-1}}{2} \frac{z^{2n-1}}{k^{2n-1}} + \cdots + \frac{p_1 - iq_1}{2} \frac{z^{n+1}}{k^{n+1}} + p_0 \frac{z^n}{k^n} + \frac{p_1 + iq_1}{2} \frac{z^{n-1}}{k^{n-1}} + \frac{p_2 + iq_2}{2} \frac{z^{n-2}}{k^{n-2}} + \cdots + \frac{p_n + iq_n}{2} \Big\},$$

per modo che se le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ di $u(z) = 0$ si pongono sotto la forma $\alpha_1 = k\gamma_1$, $\alpha_n = k\gamma_2, \ldots, \alpha_{m_1} = k\gamma_{m_1}$ si vede che le quantità $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{m_1}$ dovranno essere le radici della equazione in γ:

$$(13) \quad u_1(\gamma) = b_0 \gamma^m + b_1 \gamma^{m-1} + b_2 \gamma^{m-2} + \cdots + b_{m-2n-1} \gamma^{2n+1} + \frac{p_n - iq_n}{2} \gamma^{2n} + \frac{p_{n-1} - iq_{n-1}}{2} \gamma^{2n-1} + \cdots + \frac{p_1 - iq_1}{2} \gamma^{n+1} + p_0 \gamma^n + \frac{p_1 + iq_1}{2} \gamma^{n-1} + \frac{p_2 + iq_2}{2} \gamma^{n-2} + \cdots + \frac{p_{n+1} + iq_{n+1}}{2} \gamma + \frac{p_n + iq_n}{2} = 0.$$

Ne segue evidentemente che, finchè manteniamo l'ipotesi che il numero p sia diverso da zero e intero e positivo, bisogna escludere il caso in cui le quantità date p_s, q_s e b_s sono tali che questa equazione (13) venga ad avere una o più radici di modulo uguale ad uno, perchè in questo caso sul cerchio di raggio k verrebbero a cadere una o più radici della $u(z) = 0$ [1]; e disposte le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m_1}$ coi moduli $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{m_1}$ in ordine non decrescente, se questi moduli saranno tutti inferiori ad uno, il cerchio di raggio k comprenderà tutte le radici della $u(z) = 0$ e si avrà la formola:

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,F(\varphi)^p}\, d\varphi =$$

$$= \sum_1^{m_1} \frac{1}{\pi(p\mu_s - 1)} \frac{d^{p\mu_s - 1}}{dz^{p\mu_s - 1}} \left[\psi(z) \left\{ \frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)} + \frac{u^{(\mu_s + 1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s + 1)} (z - \alpha_s) + \cdots \right\}^{-p} \right]_{z=\alpha_s} + \sum r'_t;$$

[1] Si vede facilmente che questa esclusione equivale a quella, che evidentemente deve farsi, che vi siano durante il corso dell'integrazione da 0 a 2π valori di φ pei quali $F(\varphi)$ si annulli.

se i detti moduli $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{m_1}$ saranno tutti superiori a uno si avrà:

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\,d\varphi = \sum r'_t\,;$$

e in fine se i moduli $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_i$ saranno inferiori ad uno e i rimanenti $\gamma'_{i+1}, \gamma'_{i-2} \ldots \gamma'_{m_1}$ saranno superiori ad uno si avrà l'altra:

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\,d\varphi =$$

$$= \sum_1^i \frac{1}{\pi(p\mu_s-1)}\frac{d^{p\mu_s-1}}{dz^{p\mu_s-1}}\left[\psi(z)\left\{\frac{u^{(\mu_s)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s)} + \frac{u^{(\mu_s+1)}(\alpha_s)}{\pi(\mu_s+1)}(z-\alpha_s) + \cdots\right\}_{z=\alpha_s}\right. + \sum r'_t,$$

intendendo sempre che negli integrali del primo membro sia $z = ke^{i\varphi}$, e che le r'_t, come nelle formole più sotto le r''_t e r''_∞, abbiano ancora i significati di cui al § 3. per la funzione $\dfrac{\psi(z)}{u(z)^p}$ relativi alle singolarità (polari o essenziali isolate) di $\psi(z)$ che cadessero rispettivamente entro o fuori del cerchio di raggio k o all'infinito, cioè siano i residui di $\dfrac{\psi(z)}{u(z)^p}$ negli stessi punti; e supposto inoltre che questi punti singolari non combinino con nessuna delle radici $\alpha_s = k_s\gamma_s$ che cadono entro lo stesso cerchio e non ne cadano sul cerchio; per modo che se la stessa funzione $\psi(z)$ non avrà punti singolari a distanza finita fuori di quel cerchio k, la formola (14) (quella cioè relativa al caso in cui i moduli $\gamma'_1, \gamma'_2 \ldots \gamma'_{m_1}$ sono tutti inferiori alla unità) potrà ridursi alla seguente:

$$(17)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\,d\varphi = r''_\infty\,;$$

e se $\psi(z)$ avrà dei punti singolari fuori del detto cerchio k la stessa (14) si ridurrà invece all'altra:

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\,d\varphi = r''_\infty - \sum r''_t\,.$$

E nel caso della formola (15) per l'osservazione fatta al § 2, il numero p potrà supporsi qualsiasi e anche complesso, e sotto le condizioni indicate nello stesso § 2 rispetto a questo numero p, si potrà anche supporre che alcuni o tutti gli infinitesimi di $u(z)$ cadano sul contorno, e a $\dfrac{1}{u(z)^p}$ sotto l'integrale potrà essere sostituito $\log u(z)$ ecc. . . .

7. Questi risultati permettono dunque di dire che la ricerca dell'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{np-1}\,\mathrm{F}(\varphi)^p}\,d\varphi$ nel quale la funzione $\mathrm{F}(\varphi)$ ha la forma (11), dipende dalle radici della equazione (13) nella quale le quantità p_s, q_s e b_s sono quelle che figurano nella stessa funzione $\mathrm{F}(\varphi)$; e pei casi delle formole (15), (17) e (18) non importa

neppure conoscere quelle radici ma basta sapere che i loro moduli sono rispettivamente tutti superiori o tutti inferiori alla unità [1].

In questi casi dunque basterà evidentemente bene spesso il conoscere i limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici della equazione stessa (13) specialmente quando questi limiti siano molto vicini al massimo o al minimo di questi moduli, e gioveranno quindi molto i teoremi relativi ai limiti stessi.

E così in particolare, siccome da un teorema su questi limiti che pubblicherò in un prossimo fascicolo degli Annali di Matematica, risulta che se indichiamo con $b'_0, b'_1, b'_2 \dots b'_m$ i moduli dei coefficienti della equazione (13), allora quando si avrà $b'_0 > b'_1 + b'_2 + \cdots + b'_m$, l'unità sarà un limite superiore dei moduli delle radici della stessa equazione, e quando si avrà invece $b'_0 + b'_1 + \cdots + b'_{m-1} < b'_m$ l'unità sarà un limite inferiore dei moduli di queste radici, così si potrà senz'altro asserire che se sarà $b'_0 > b'_1 + b'_2 + \cdots + b'_m$ varranno certamente le formole (14) o (17) e (18); e se sarà $b'_0 + b'_1 + \cdots + b'_{m-2} < b'_m$ allora varrà la formola (15) nella quale p, come abbiamo osservato, potrà supporsi qualsiasi e anche complesso, ecc.

8. Quando poi queste condizioni non risultino soddisfatte, allora se altre particolarità non permetteranno subito di dire quali delle formole del § 6 siano da applicarsi, converrà fare studî speciali sulla equazione in γ $u_1(\gamma) = 0$, per conoscere se le sue radici siano tutte comprese nel cerchio di raggio uno, o siano fuori di questo cerchio, o parte siano dentro e parte fuori, escludendo sempre che ve ne siano sul cerchio quando non si sia nel caso della formola (15) ecc.

Questi studî si faranno con processi che varieranno a seconda del grado e della forma della equazione stessa in γ $u_1(\gamma) = 0$, sia esaminando i valori delle sue radici quando si abbiano le formole che le determinano, sia ponendo $\gamma = x + iy$, $u_1(\gamma) = P + iQ$, e cercando i punti d'intersezione entro il cerchio di raggio uno delle due curve algebriche $P = 0$, $Q = 0$, o cercando col teorema di Cauchy le radici di $u_1(\gamma) = 0$ entro lo stesso cerchio, o anche ponendo $\gamma = \varrho e^{i\varphi}$, e con eliminazioni successive delle potenze di ϱ fra le equazioni corrispondenti $P = 0$, $Q = 0$ giungendo alla equazione che contiene soltanto φ, e che in conseguenza determinerà i valori degli argomenti delle varie radici di $u_1(\gamma) = 0$, e a quella di 1° grado in

[1] Questi risultati sono anche conseguenza della seguente considerazione generale.

Quando si ha un integrale della forma $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,d\varphi$, o che possa ridursi a questo, esso sarà evidentemente uguale all'altro $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z}\,dz$ esteso al cerchio di raggio uno, e quindi se nell'interno di questo cerchio la funzione $f(z)$ verrà ad essere uniforme e avrà soltanto singolarità polari o singolarità essenziali isolate, senza avere singolarità sul cerchio, l'integrale dato sarà uguale alla somma dei residui di $\frac{f(z)}{z}$ relativi ai punti singolari che cadranno entro il cerchio; e per considerazioni simili a quelle fatte nel § 2 si vede che lo stesso avverrà anche quando vi siano punti singolari sul cerchio, purchè questi punti corrispondano a punti nei quali essa è finita, o se diviene infinita lo diviene d'ordine logaritmico, o anche d'ordine finito reale o complesso ma la cui parte reale se è positiva sia inferiore ad uno, ecc. Lo studio quindi dell'integrale dato dipenderà dalla ricerca dei punti singolari di $\frac{f(z)}{z}$ nel cerchio di raggio uno, ecc.

ϱ che per ogni valore di questi argomenti determinerà il modulo corrispondente ϱ [1]; e dopo si vedrà quali delle formole del § 6 saranno da applicarsi.

Si potrà poi in queste formole per $\psi(z)$ scegliere la funzione che più tornerà comodo fra quelle che sono uniformi e hanno soltanto poli o singolarità essenziali isolate nei campi nei quali devono considerarsi, e così se ad es. si prenderà $\psi(z) = z^{\mu}$ con r intero positivo o negativo o nullo, allora gli integrali che si determineranno saranno della forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\mu - np + 1)\varphi + i \operatorname{sen}(\mu - np + 1)\varphi}{F(\varphi)^p}\, d\varphi\,, \quad \text{o} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\mu - np + 1)\varphi} \frac{d\varphi}{F(\varphi)^p}\,,$$

e occorrendo si spezzeranno in due separando le parti reali dalle immaginarie; e essi serviranno a determinare i coefficienti degli sviluppi di Fourier per la funzione $\dfrac{1}{F(\varphi)^p}$,

[1] Ponendo con $y = \varrho e^{i\varphi}$, anche $b_s = b'_s e^{i\theta_s}$, le equazioni $P = 0$, $Q = 0$ nelle quali si spezza una equazione della forma:

$$u_1(y) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + b_2 y^{m-2} + \cdots + b_{m-1} y + b_m = 0,$$

saranno le due seguenti:

$$(\alpha)\begin{cases} \varrho^m b'_0 \cos(m\varphi + \theta_0) + \varrho^{m-1} b'_1 \cos\{(m-1)\varphi + \theta_1\} + \cdots + \varrho b'_{m-1} \cos(\varphi + \theta_{m-1}) + b'_m \cos\theta_m = 0\,, \\ \varrho^m b'_0 \operatorname{sen}(m\varphi + \theta_0) + \varrho^{m-1} b'_1 \operatorname{sen}\{(m-1)\varphi + \theta_1\} + \cdots + \varrho b'_{m-1} \operatorname{sen}(\varphi + \theta_{m-1}) + b'_m \operatorname{sen}\theta_m = 0\,, \end{cases}$$

e queste coll'eliminare una volta gli ultimi, e un'altra i primi termini, quando si escluda il caso di $b'_m = 0$ che darebbe subito una radice nulla, conducono alle altre:

$$\varrho^{m-1} b'_0 \operatorname{sen}(m\varphi + \theta_0 - \theta_m) + \varrho^{m-2} b'_1 \operatorname{sen}\{(m-1)\varphi + \theta_1 - \theta_m\} + \cdots + \varrho b'_{m-2} \operatorname{sen}(2\varphi + \theta_{m-2} - \theta_m) + \\ + b'_{m-1} \operatorname{sen}(\varphi + \theta_{m-1} - \theta_m) = 0\,,$$

$$\varrho^{m-1} b'_1 \operatorname{sen}(\varphi + \theta_0 - \theta_1) + \varrho^{m-2} b'_2 \operatorname{sen}(2\varphi + \theta_0 - \theta_2) + \cdots + \varrho b'_{m-1} \operatorname{sen}\{(m-1)\varphi + \theta_0 - \theta_{m-1}\} + \\ + b'_m \operatorname{sen}(m\varphi + \theta_0 - \theta_m) = 0\,,$$

e ripetendo ora l'eliminazione collo stesso processo fra queste due, e poi fra le due successive ecc., salvo ad avere riguardo ai casi di eccezione che potranno venire dall'annullarsi di qualche coefficiente, e che si studieranno facilmente, si giungerà a due equazioni che contengono il ϱ soltanto al 1° grado, le quali alla lor volta condurranno subito a quella che contiene soltanto φ.

In particolare dunque nel caso che la equazione $u_1(y) = 0$ sia quella di 2° grado:

$$u_1(y) = b_0 y^2 + b_1 y + b_2 = 0\,,$$

le due equazioni di 1° grado in ϱ alle quali si giungerà subito saranno le seguenti:

$$(\beta)\quad\begin{cases} \varrho b'_0 \operatorname{sen}(2\varphi + \theta_0 - \theta_2) + b'_1 \operatorname{sen}(\varphi + \theta_1 - \theta_2) = 0\,, \\ \varrho b'_1 \operatorname{sen}(\varphi + \theta_0 - \theta_1) + b'_2 \operatorname{sen}(2\varphi + \theta_0 - \theta_2) = 0\,, \end{cases}$$

le quali dànno luogo all'altra nella sola φ:

$$b'_0 b'_2 \operatorname{sen}^2(2\varphi + \theta_0 - \theta_2) - b'^2_1 \operatorname{sen}(\varphi + \theta_1 - \theta_2)\operatorname{sen}(\varphi + \theta_0 - \theta_1) = 0$$

che ponendo per abbreviare:

$$2\varphi + \theta_0 - \theta_2 = 2\chi\,, \quad \theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1 = 2\tau$$

si trasforma nella seguente:

$$b'_0 b'_2 \operatorname{sen}^2 2\chi - b'^2_1 \operatorname{sen}(\chi - \tau)\operatorname{sen}(\chi + \tau) = 0\,,$$

ovvero:

$$(\gamma)\qquad b'_0 b'_2 \operatorname{sen}^2 2\chi + \frac{b'^2_1}{2}(\cos 2\chi - \cos 2\tau) = 0\,,$$

o per altre che derivino da queste colla separazione delle parti reali da quelle immaginarie.

9. Faremo ora l' applicazione delle formole precedenti al caso in cui la funzione $F(\varphi)$ data dalla (11) che figura nei nostri integrali è della forma:

$$F(\varphi) = p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi ,$$

con p_0, p_1, e q_1 reali o complessi.

La equazione (13) in questo caso si ridurrà alla seguente di 2° grado:

$$u_1(\gamma) = \frac{p_1 - iq_1}{2}\gamma^2 + p_0\gamma + \frac{p_1 + iq_1}{2} = 0 , \tag{19}$$

---

o anche:

$$\cos^2 2\chi - \frac{b_1'^2}{2b_0' b_2'}\cos 2\chi + \frac{b_1'^2}{2b_0' b_2'}\cos 2\tau - 1 = 0 . \tag{δ}$$

Escludiamo ora il caso di $b_1 = 0$ che in forza della $u_1(y) = 0$ ci darebbe subito pei moduli delle due radici il valore comune $\sqrt{\frac{b'_2}{b'_0}}$, e per gli argomenti i valori $\frac{\theta_2 - \theta_0 - \pi}{2}$ e $\frac{\theta_2 - \theta_0 + \pi}{2}$, e quindi $\cos 2\chi = -1$; ed escludiamo pure gli altri casi che ci portassero ad avere $\operatorname{sen} 2\chi = 0$, che ci darebbero $\cos 2\tau = \pm 1$, e che saranno studiati a parte. Fuori di questi casi questa equazione (δ), considerata come una equazione di 2° grado in $\cos 2\chi$, ci dà due radici, delle quali però si riscontra subito che bisognerà prendere come valore di $\cos 2\chi$ o $\cos(2\varphi + \theta_0 - \theta_2)$ quella che corrisponde al segno — del radicale (supposto questo preso positivamente), perchè l'altra non è inferiore ad uno in valore assoluto; dunque nei casi che consideriamo si avrà la formola seguente:

$$\begin{aligned} \cos 2\chi &= \frac{b_1'^2 - \sqrt{b_1'^4 - 8 b_1'^2 b'_0 b'_2 \cos 2\tau + 16 b_0'^2 b_2'^2}}{4b'_0 b'_2} = \\ &= \frac{b_1'^2 - \sqrt{(b_1'^2 - 4b'_0 b'_2)^2 + 16 b_1'^2 b'_0 b'_2 \operatorname{sen}^2\tau}}{4b'_0 b'_2} = \\ &= \frac{b_1'^2 - \sqrt{(b_1'^2 - 4b'_0 b'_2 \cos 2\tau)^2 + 16 b_0'^2 b_2'^2 \operatorname{sen}^2 2\tau}}{4b'_0 b'_2} \end{aligned} \tag{ε}$$

la quale determinerà per 2χ un valore $2\chi_0$ compreso fra 0 e π (0 e π escl.), e un altro di segno contrario $-2\chi_0$, per modo che i valori cercati di φ saranno i seguenti:

$$\varphi_1 = \chi_0 + \frac{\theta_2 - \theta_0}{2} + k_1\pi , \qquad \varphi_2 = -\chi_0 + \frac{\theta_2 - \theta_0}{2} + k_2\pi , \tag{φ}$$

dove k_1 e k_2 saranno uguali a zero o a uno, e si determineranno colla condizione che i valori ϱ_1 e ϱ_2 corrispondenti dei moduli ϱ che si avranno dalle (β) risultino positivi.

Continuando dunque a supporre che b_1 non sia zero, e neppure lo sia $\operatorname{sen} 2\chi_0$, dalle ($\beta$) si vede che i valori di ϱ_1 e ϱ_2 verranno dati dalle formole:

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho_1 &= (-1)^{k_1+1}\frac{b'_1}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} = (-1)^{k_1+1}\frac{b'_2}{b'_1}\frac{\operatorname{sen} 2\chi_0}{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)} , \\ \varrho_2 &= (-1)^{k_2+1}\frac{b'_1}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} = (-1)^{k_2+1}\frac{b'_2}{b'_1}\frac{\operatorname{sen} 2\chi_0}{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)} , \end{aligned} \right. \tag{λ}$$

dalle quali risulta che sarà anche:

$$\varrho_1^2 = \frac{b'_2}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)}{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)} , \qquad \varrho_2^2 = \frac{b'_2}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)}{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)} ;$$

e bisognerà cercare quale posizione hanno le radici di questa rispetto al cerchio di raggio uno.

Questo nei casi speciali si farà bene spesso, con tutta facilità; esaminando i valori delle due radici. Possono darsi però anche dei criterî generali coi quali, indipendentemente da questo esame, si può pure decidere della posizione delle stesse radici; e quei criterî si trovano valendosi dei risultati esposti nella nota del § precedente appunto quando si trattò della equazione di 2° grado.

Osserveremo perciò che si avrà ora:

$$2b'_0 e^{i\theta_0} = p_1 - iq_1 , \quad b'_1 e^{i\theta_1} = p_0 , \quad 2b'_2 e^{i\theta_2} = p_1 + iq_1 ,$$

---

e gli argomenti φ_1 e φ_2 corrispondenti saranno dati dalle (φ), cioè saranno:

$$\varphi_1 = \chi_0 + \frac{\theta_2 - \theta_0}{2} + k_1\pi , \qquad \varphi_2 = -\chi_0 + \frac{\theta_2 - \theta_0}{2} + k_2\pi ,$$

per modo che le due radici $\alpha_1 = \varrho_1 e^{i\varphi_1}$, $\alpha_2 = \varrho_2 e^{i\varphi_2}$ della equazione data $u_1(\gamma) = 0$ si presenteranno sotto la forma:

$$\alpha_1 = -\frac{b'_1}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} e^{i\left(\chi_0 + \frac{\theta_2 - \theta_0}{2}\right)} , \quad \alpha_2 = -\frac{b'_1}{b'_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} e^{-i\left(\chi_0 - \frac{\theta_2 - \theta_0}{2}\right)}$$

ovvero:

$$\alpha_1 = -\frac{b_1}{b_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 - \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} e^{i(\chi_0 + \tau)} , \qquad \alpha_2 = -\frac{b_1}{b_0}\frac{\operatorname{sen}(\chi_0 + \tau)}{\operatorname{sen} 2\chi_0} e^{-i(\chi_0 - \tau)} ,$$

o anche:

$$(\mu) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{b_1}{2b_0 \operatorname{sen} 2\chi_0} \{\operatorname{sen} 2\chi_0 - \operatorname{sen} 2\tau + i(\cos 2\tau - \cos 2\chi_0)\} , \\ \alpha_2 = -\dfrac{b_1}{2b_0 \operatorname{sen} 2\chi_0} \{\operatorname{sen} 2\chi_0 + \operatorname{sen} 2\tau - i(\cos 2\tau - \cos 2\chi_0)\} , \end{cases}$$

ed esse saranno sempre diverse fra loro.

Invece se $\operatorname{sen} 2\chi_0$ sarà zero, escludendo ancora il caso di $b'_1 = 0$ (che come già notammo darebbe pure subito $\varrho_1 = \varrho_2 = \sqrt{\frac{b'_2}{b'_0}}$, $2\chi_0 = \pi$, e $\varphi_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0 - \pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\theta_2 - \theta_0 + \pi}{2}$) per le (β) si vede che dovremo avere $\varphi + \theta_0 - \theta_1 = h_1\pi$, $\varphi + \theta_1 - \theta_2 = h_2\pi$, e quindi $2\varphi + \theta_0 = (h_1 + h_2)\pi + \theta_2$, $\varphi + \theta_1 = h_2\pi + \theta_2$, $2\tau = h\pi$ con $h = h_1 - h_2$, e h_1 e h_2 numeri interi, per modo che si può dire intanto che quando b_1 non sia zero, onde possa aversi $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$, dovrà essere necessariamente $2\tau = h\pi$; e per determinare i valori di ϱ bisognerà ricorrere alle equazioni corrispondenti alla (α) che ora si riducono alla unica:

$$b'_0 \varrho^2 + (-1)^{h_1} b'_1 \varrho + (-1)^h b'_2 = 0 .$$

E dall'esame di questa, tenendo conto della condizione che abbiamo che i valori di ϱ devono risultare reali e positivi, si rileverà che quando b_1 non è zero, e gli argomenti θ_0 , θ_1 , θ_2 dei coefficienti della equazione data sono legati dalla relazione $2\tau = \theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1 = h\pi$, con h numero intero, allora se h sarà un numero dispari il caso in questione di $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$ si presenterà sempre e qualunque siano i moduli b'_0 , b'_1 , b'_2 dei coefficienti stessi, e in questo caso converrà prendere una volta $h_1 = 0$ e $h_2 = 1$, e un'altra $h_1 = 1$ e $h_2 = 0$; mentre, se, essendo sempre $2\tau = h\pi$, h sarà un numero pari, lo stesso caso di $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$ si presenterà soltanto quando sia $b_1'^2 \geqq 4b'_0 b'_2$, e prendendo allora $h_1 = h_2 = 1$.

Il caso dunque di $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$, quando b_1 non è zero, equivale a quello di $2\tau = h\pi$ con h

e quindi se indichiamo con λ, α, e β i moduli di p_0, p_1 e q_1, e con μ, γ e δ gli argomenti, per modo che sia $p_0 = \lambda e^{i\mu}$, $p_1 = \alpha e^{i\gamma}$, $q_1 = \beta e^{i\delta}$, sarà:

$$2b'_0 e^{i\theta_0} = \alpha e^{i\gamma} - i\beta e^{i\delta}, \quad b'_1 e^{i\theta_1} = \lambda e^{i\mu}, \quad 2b'_2 e^{i\theta_2} = \alpha e^{i\gamma} + i\beta e^{i\delta},$$

e i moduli e gli argomenti b' e θ dei coefficienti della (19) verranno determinati dalle formole:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2b'_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)}, \\ \cos\theta_0 = \dfrac{\alpha\cos\gamma + \beta\operatorname{sen}\delta}{2b'_0}, \quad \operatorname{sen}\theta_0 = \dfrac{\alpha\operatorname{sen}\gamma - \beta\cos\delta}{2b'_0} \\ b'_1 = \lambda, \quad \theta_1 = \mu, \\ 2b'_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta - \gamma)}, \\ \cos\theta_2 = \dfrac{\alpha\cos\gamma - \beta\operatorname{sen}\delta}{2b'_2}, \quad \operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{\alpha\operatorname{sen}\gamma + \beta\cos\delta}{2b'_2}, \end{array} \right.$$

---

dispari, o di $2\tau = h\pi$ con h pari quando però si abbia $b_1'^2 \geq 4b'_0 b'_2$. E nel caso di $2\tau = h\pi$ con h dispari, i valori di ϱ_1 e ϱ_2 e i corrispondenti di φ_1 e φ_2 saranno dati dalle formole:

$$(\nu) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = \dfrac{-b'_1 + \sqrt{b_1'^2 + 4b'_0 b'_2}}{2b'_0}, \quad \varphi_1 = \theta_1 - \theta_0, \\ \varrho_2 = \dfrac{b'_1 + \sqrt{b_1'^2 + 4b'_0 b'_2}}{2b'_0}, \quad \varphi_2 = \theta_1 - \theta_0 + \pi, \\ \text{e le radici corrispondenti } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ saranno:} \\ \alpha_1 = \dfrac{-b'_1 + \sqrt{b_1'^2 + 4b'_0 b'_2}}{2b'_0} e^{i(\theta_1 - \theta_0)}, \quad \alpha_2 = \dfrac{-b'_1 - \sqrt{b_1'^2 + 4b'_0 b'_2}}{2b'_0} e^{i(\theta_1 - \theta_0)}; \end{array} \right.$$

mentre nel caso di $2\tau = h\pi$, con h pari e $b_1'^2 \geq 4b'_0 b'_2$, avremo:

$$(\pi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = \dfrac{b'_1 - \sqrt{b_1'^2 - 4b'_0 b'_2}}{2b'_0}, \quad \varphi_1 = \pi + \theta_1 - \theta_0, \\ \varrho_2 = \dfrac{b'_1 + \sqrt{b_1'^2 - 4b'_0 b'_2}}{2b'_0}, \quad \varphi_2 = \pi + \theta_1 - \theta_0, \\ \text{e quindi:} \\ \alpha_1 = \dfrac{-b'_1 + \sqrt{b_1'^2 - 4b'_0 b'_2}}{2b'_0} e^{i(\theta_1 - \theta_0)}, \quad \alpha_2 = \dfrac{-b'_1 - \sqrt{b_1'^2 - 4b'_0 b'_2}}{2b'_0} e^{i(\theta_1 - \theta_0)} \end{array} \right.$$

e queste radici saranno uguali se sarà $b_1'^2 = 4b'_0 b'_2$.

Se poi, essendo sempre b_1 diverso da zero e $2\tau = h\pi$ con h pari non sarà $b_1^2 \geq 4b'_0 b'_2$, allora si ricadrà nel caso considerato in principio di $\operatorname{sen} 2\chi_0$ diverso da zero, e varranno le formole generali date sopra, per modo che i due moduli ϱ_1 e ϱ_2 risulteranno uguali senza però esserlo le due radici.

E infine nel caso finora escluso di $b_1 = 0$ che porta sempre $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$, avremo come già notammo:

$$(\varrho) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 = \varrho_2 = \sqrt{\dfrac{b'_2}{b'_0}}, \quad \varphi_1 = \dfrac{\theta_2 - \theta_0 - \pi}{2}, \quad \varphi_2 = \dfrac{\theta_2 - \theta_0 + \pi}{2}, \\ \text{e} \\ \alpha_1 = -i\sqrt{\dfrac{b'_2}{b'_0}}\, e^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} i}, \quad \alpha_2 = i\sqrt{\dfrac{b'_2}{b'_0}}\, e^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} i}; \end{array} \right.$$

e queste radici α_1 e α_2 saranno sempre distinte a meno che non sia $b'_2 = 0$, ciò che porterebbe che la nostra equazione (18) si riducesse al solo primo termine.

Similmente, volendo, potrebbe trattarsi il caso delle equazioni di terzo grado $u_1(y) = 0$; però in questo caso i risultati si presentano sotto una forma molto complicata.

per le quali, e per essere:

$$\frac{4b'_0\, b'_2}{b'^2_1}\, e^{i(\theta_0+\theta_2-2\theta_1)} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\, e^{2i(\gamma-\mu)} + \frac{\beta^2}{\lambda^2}\, e^{2i(\delta-\mu)},$$

avremo anche le altre:

$$(21)\begin{cases} \cos(\theta_2-\theta_0) = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4b'_0\, b'_2}, & \operatorname{sen}(\theta_2-\theta_0) = \dfrac{2\alpha\beta\cos(\delta-\gamma)}{4b'_0\, b'_2} \\ \cos 2\tau = \dfrac{\alpha^2\cos 2(\gamma-\mu)+\beta^2\cos 2(\delta-\mu)}{4b'_0\, b'_2}, & \operatorname{sen} 2\tau = \dfrac{\alpha^2\operatorname{sen} 2(\gamma-\mu)+\beta^2\operatorname{sen} 2(\delta-\mu)}{4b'_0\, b'_2} \end{cases}$$

con:

$$(22) \qquad 4b'_0\, b'_2 = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma)}\,.$$

Osservando dunque che $\varrho_1\,\varrho_2$ è il prodotto dei moduli delle radici delle (19), e quindi è uguale a $\frac{b'_2}{b'_0}$, si vede subito che si avrà:

$$(23) \qquad \varrho_1\,\varrho_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)}},$$

e se, come, volendolo, potremo sempre supporre, $\delta-\gamma$ sarà compreso fra 0 e π (0 e π incl.) [1], si avrà $\varrho_1\,\varrho_2 \leq 1$ e una almeno delle radici delle (19) verrà a cadere nell'interno del cerchio, salvo nel caso che, per essere $\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)=0$, si abbia $\varrho_1\,\varrho_2 = 1$, nel qual caso potranno anche cadere ambedue sul cerchio.

Ma, considerando dapprima il caso in cui b_1 e $\operatorname{sen} 2\chi_0$ non sono zero, e valendosi delle formole (λ) della nota citata, si trova subito:

$$(24)\begin{cases} \varrho_1^2 = \dfrac{b'^2_1}{b'^2_0}\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2\chi_0\cos^2\tau+\cos^2\chi_0\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2\tau}{\operatorname{sen}2\chi_0}\right\}, \\ \varrho_2^2 = \dfrac{b'^2_1}{b'^2_0}\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2\chi_0\cos^2\tau+\cos^2\chi_0\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2\tau}{\operatorname{sen}2\chi_0}\right\}, \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$(25) \qquad (\varrho_1\,\varrho_2)^2 = \frac{b'^4_1}{b'^4_0}\left\{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\chi_0\cos^2\tau+\cos^2\chi_0\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}2\tau}{\operatorname{sen}2\chi_0}\right)^2\right\},$$

mentre dai valori dati sopra per $\varrho_1\,\varrho_2$, e per $2b'_0$ si ottiene

$$(\varrho_1\,\varrho_2)^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{16\,b'^4_0} - \frac{\alpha^2\beta^2\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma)}{4\,b'^4_0};$$

dunque dal confronto colla precedente (25) si trae che quando sia:

$$\alpha^2\beta^2\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma) \gtreqless \frac{b'^4_1\operatorname{sen}^2 2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0},$$

[1] Ciò avviene perchè mutando φ in $2\pi-\varphi$ le q mutano segno, ciò che equivale ad aumentare di π il loro argomento.

sarà ugualmente:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} \gtreqless b'^2_1 \frac{\text{sen}^2 \chi_0 \cos^2 \tau + \cos^2 \chi_0 \,\text{sen}^2 \tau}{\text{sen}^2 2\chi_0};$$

talchè, osservando ora che nei valori precedenti (24) di ϱ_1^2 e ϱ_2^2 al denominatore b'^2_0 possiamo sostituire $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}+\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{sen}(\delta-\gamma)$, si concluderà subito che quando sia $\alpha^2\beta^2\text{sen}^2(\delta-\gamma)-\frac{b'^4_1\,\text{sen}^2 2\tau}{\text{sen}^2 2\chi_0}>0$ i valori di ϱ_1 e ϱ_2 saranno ambedue minori dell'unità; se sarà $\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)-\frac{b'^4\,\text{sen}^2 2\tau}{\text{sen}^2 2\chi_0}<0$ uno sarà maggiore e l'altro minore dell'unità; e se sarà $\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)-\frac{b'^4\,\text{sen}^2 2\tau}{\text{sen}^2 2\chi_0}=0$ uno dei due moduli ϱ_1 e ϱ_2 sarà uguale ad uno, e l'altro sarà minore di uno, a meno che non si abbia anche $\alpha^2\beta^2\,\text{sen}(\delta-\gamma)=\frac{b'^4\,\text{sen}^2 2\tau}{\text{sen}^2 2\chi_0}=0$, nel qual caso i due moduli ϱ_1 e ϱ_2 saranno ambedue uguali ad uno.

E così in particolare quando sia $2\tau=h\pi$, sempre senza che sia $\text{sen}\,2\chi_0=0$ (ciò che, per quanto dicemmo nella solita nota al § 8, richiede che h sia pari e sia $b'^2_1-4b'_0\,b'_2<0$) saremo evidentemente nel caso in cui i due moduli sono ambedue minori di uno, o ambedue uguali ad uno secondochè $\alpha\beta\,\text{sen}(\delta-\gamma)$ è diverso da zero o uguale a zero; e questo concorda colla osservazione fatta nella stessa nota della uguaglianza in questo caso dei due moduli ϱ_1 e ϱ_2.

Restando nel caso generale, sempre però con $\text{sen}\,2\chi_0$ diverso da zero, osserviamo che i risultati ottenuti permettono già di dire che quando siano conosciuti 2τ e $2\chi_0$, basterà esaminare qual segno abbia la quantità $\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)-\frac{b_1^2\,\text{sen}^2 2\tau}{\text{sen}^2 2\chi_0}$, o se sia uguale a zero, per decidere della posizione delle radici della equazione $u_1(\gamma)=0$ rispetto al cerchio di raggio uno.

Volendo però non passare per queste quantità 2τ e $2\chi_0$, e valerci soltanto dei valori dati $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda$ e μ, osserveremo che per le (γ) e (ε) della solita nota si ha:

$$\frac{2b'_0 b'_2}{b'^2_1}\,\text{sen}^2 2\chi_0 = -\cos 2\chi_0 + \cos 2\tau =$$

$$= -\frac{\lambda^2-4b'_0\,b'_2\cos 2\tau-\sqrt{(\lambda^2-4b'_0\,b'_2\cos 2\tau)^2+16b'^2_0\,b'^2_2\,\text{sen}^2 2\tau}}{4b'_0\,b'_2},$$

dove pel radicale deve prendersi sempre il valore positivo, per modo che nel caso di 2τ multiplo pari di π (che porta come vedemmo $\lambda^2-4b'_0b'_2<0$) deve prendersi uguale a $4b'_0\,b'_2-\lambda^2$.

Fuori di questo caso si potrà scrivere anche:

$$\frac{2b_0'\,b'_2}{b'^2_1}\,\text{sen}^2 2\chi_0 = \frac{4b'_0\,b'_2\,\text{sen}^2 2\tau}{\lambda^2-4b'_0\,b'_2\cos 2\tau+\sqrt{(\lambda^2-4b'_0\,b'_2\cos 2\tau)^2+16b'^2_0\,b'^2_2\,\text{sen}^2 2\tau}},$$

e quindi sarà:

$$\frac{b_1'^4 \operatorname{sen}^2 2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0} = L + \sqrt{L^2 + M^2},$$

quando per abbreviare si ponga:

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{2}{b_1'^2} L = \lambda^2 - 4b'_0 b'_2 \cos 2\tau = \lambda^2 - \alpha^2 \cos 2(\gamma - \mu) - \beta^2 \cos 2(\delta - \mu), \\ \frac{2}{b_1'^2} M = 4b'_0 b'_2 \operatorname{sen} 2\tau = \alpha^2 \operatorname{sen} 2(\gamma - \mu) + \beta^2 \operatorname{sen} 2(\delta - \mu); \end{cases}$$

e ora questa formola varrà anche quando 2τ sia un multiplo pari di 2π (con che $M = 0$) purchè s'intende allora che pel radicale $\sqrt{L^2 + M^2}$ sia preso il valore positivo $-L$; dunque evidentemente per le attuali ricerche dovremo esaminare la quantità:

$$(27)\qquad \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) - L - \sqrt{L^2 + M^2}.$$

Ciò posto, escludiamo dapprima il caso in cui si ha ad un tempo $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$ e 2τ multiplo pari di π, nel qual caso pei valori (21) e (22) di $\cos 2\tau$ e $4b'_0 b'_2$ si avrà $\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\gamma - \mu) + \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \mu) = 0$ e quindi $\alpha \operatorname{sen}(\gamma - \mu) = \beta \operatorname{sen}(\delta - \mu) = 0$ [1], e osserviamo che il caso di $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$ e 2τ multiplo dispari di π, che darebbe pure $M = 0$, non può ora considerarsi perchè escludiamo che sia $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$; allora la quantità:

$$(28)\qquad \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) - L + \sqrt{L^2 + M^2}$$

sarà sempre diversa da zero e positiva, e così per decidere qual sia il segno delle quantità (27) o se essa sia zero, basterà esaminare il prodotto di essa per la (28), con chè si avrà il vantaggio che il radicale verrà a sparire, e la quantità da studiarsi sarà:

$$\alpha^4 \beta^4 \operatorname{sen}^4 (\delta - \gamma) - 2\alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) L - M^2.$$

Ora questa espressione può scriversi:

$$\begin{aligned} &\alpha^4 \beta^4 \operatorname{sen}^4 (\delta - \gamma) - \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) \{ \lambda^2 - \alpha^2 \cos^2 (\gamma - \mu) - \beta^2 \cos^2 (\delta - \mu) + \\ &\qquad + \alpha^2 \operatorname{sen}^2 (\gamma - \mu) + \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \mu) \} \lambda^2 - \{ \alpha^2 \operatorname{sen} (\gamma - \mu) \cos (\gamma - \mu) + \\ &\qquad + \beta^2 \operatorname{sen} (\delta - \mu) \cos (\delta - \mu) \}^2 \lambda^4 = \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) \{ \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) - \\ &- \alpha^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2 (\gamma - \mu) - \beta^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \mu) \} + \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) \{ \alpha^2 \lambda^2 \cos^2 (\gamma - \mu) + \\ &+ \beta^2 \lambda^2 \cos^2 (\delta - \mu) \} - \{ \alpha^4 \operatorname{sen}^2 (\gamma - \mu) \cos^2 (\gamma - \mu) + \beta^4 \operatorname{sen}^2 (\delta - \mu) \cos^2 (\delta - \mu) \} \lambda^4 - \\ &- \lambda^4 \alpha^2 \beta^2 \{ \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) + 2 \operatorname{sen} (\gamma - \mu) \cos (\gamma - \mu) \operatorname{sen} (\delta - \mu) \cos (\delta - \mu) \} = \\ &= \{ \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) + \alpha^2 \lambda^2 \cos^2 (\gamma - \mu) + \beta^2 \lambda^2 \cos^2 (\delta - \mu) \} \{ \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \gamma) - \\ &\qquad - \alpha^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2 (\gamma - \mu) - \beta^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2 (\delta - \mu) \}, \end{aligned}$$

avendo osservato che per essere:

$$\operatorname{sen} (\delta - \gamma) = \operatorname{sen} (\delta - \mu) \cos (\gamma - \mu) - \cos (\delta - \mu) \operatorname{sen} (\gamma - \mu),$$

[1] Notiamo inversamente che l'essere insieme $\alpha \operatorname{sen}(\gamma - \mu) = 0$, $\beta \operatorname{sen} (\delta - \mu) = 0$, a causa dei valori di $\cos 2\tau$ e $4b'_0 b'_2$ dati dalle (21) e (22) porta sempre di suo che $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ sia zero e 2τ sia multiplo pari di π; ma non ne viene di necessità, come nel caso attuale di $\operatorname{sen} 2\chi_0$ diverso da zero, che sia $\lambda^2 - 4b'_0 b'_2 < 0$, ovvero $\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2$.

la quantità:

$$\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma)+2\operatorname{sen}(\gamma-\mu)\cos(\gamma-\mu)\operatorname{sen}(\delta-\mu)\cos(\delta-\mu)$$

equivale a:

$$\operatorname{sen}^2(\delta-\mu)\cos^2(\gamma-\mu)+\cos^2(\delta-\mu)\operatorname{sen}^2(\delta-\mu);$$

e evidentemente in questa il primo fattore dell' ultimo membro, oltre a non potere essere mai negativo non potrà neppure essere zero, perchè altrimenti ne verrebbe $\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)=0$, e $\alpha\cos(\gamma-\mu)=0$, $\beta\cos(\delta-\mu)=0$, $\cos 2\tau=-1$, e quindi $\operatorname{sen} 2\tau=0$, e ci troveremmo nel caso che ora è escluso di $\operatorname{sen} 2\chi_0=0$.

Quando dunque non sia contemporaneamente $\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)=0$ e 2τ multiplo pari di π o, il che è lo stesso, quando non siano zero contemporaneamente i tre termini della espressione (29) che scriviamo qui sotto, ne segue evidentemente che il segno della espressione (27) sarà quello stesso dell' altra:

$$\alpha^2\beta^2\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma)-\alpha^2\lambda^2\operatorname{sen}^2(\gamma-\mu)-\beta^2\lambda^2\operatorname{sen}^2(\delta-\mu); \tag{29}$$

e queste due espressioni (27) e (29) saranno zero insieme; quindi si può ora asserire che se questa stessa espressione (29) sarà positiva le radici della nostra equazione di 2° grado (19) cadranno ambedue nell' interno del cerchio di raggio uno; quando sarà negativa cadranno una dentro e una fuori del cerchio; e quando sarà zero senza che lo siano contemporaneamente i suoi tre termini ne cadrà una dentro il cerchio, e una sul cerchio, perchè allora saremo nel caso già considerato sopra in cui $\alpha^2\beta^2\operatorname{sen}^2(\delta-\gamma)-\dfrac{b'^4_1\operatorname{sen}^2 2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0}=0$, senza che siano zero contemporaneamente $\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$ e $\dfrac{b'^4\operatorname{sen}^2 2\tau}{\operatorname{sen}^2 2\chi_0}$.

Se poi, sempre nel supposto che $\operatorname{sen} 2\chi_0$ sia diverso da zero, saremo nel caso che escludemmo sopra che porta che i tre termini della (29) siano tutti zero, e richiede che sia $\lambda^2-4b'_0 b'_2<0$ ovvero $\lambda^2<\alpha^2+\beta^2$, allora per quanto si disse sopra, le due radici della solita nostra equazione (19) cadranno ambedue sul cerchio, e oltre a ciò, per quanto si osservò nella nota al § 8, saranno distinte tra loro.

Tutto questo però quando non siamo nel caso di $\operatorname{sen} 2\chi_0=0$, il qual caso, come vedemmo nella solita nota al § 8, nel supposto dapprima che b_1 non sia zero, corrisponde a quella di $2\tau=h\pi$, colla condizione però, quando h è pari, che si abbia $b'^2_1\geqq 4b'_0 b'_2$.

In questo caso sussistono ancora le formole precedenti fino alla (23), ma i valori ϱ_1 e ϱ_2 di ϱ, secondo quanto si disse nella nota stessa, vengono ad essere:

$$\varrho_1=(-1)^h\frac{b'_1-\sqrt{b'^2_1-4(-1)^h b'_0 b'_2}}{2b'_0},\quad \varrho_2=\frac{b'_1+\sqrt{b'^2_1-4(-1)^h b'_0 b'_2}}{2b'_0}$$

supponendo che nel caso di h pari sia $b'^2_1\geqq 4b'_0 b'_2$, e essendo sempre b'_0, b'_1 e b'_2 determinati dalle formole (20).

Supponendo dunque anche ora, come già dicemmo potersi sempre fare, che $\delta-\gamma$ sia compreso fra 0 e π, si vedrà ancora per la (23) che uno almeno dei due valori

ϱ_1 e ϱ_2 sarà sempre inferiore ad uno, salvo nel caso che sia $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$, nel qual caso per essere allora $\varrho_1 \varrho_2 = 1$ potranno anche essere ambedue uguali ad uno; e poi, osservando che le formole precedenti ci danno le altre:

$$\varrho_1^2 = \frac{1}{4b_0'^2} \{ 2b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2 - 2b'_1 \sqrt{b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2} \},$$

$$\varrho_2^2 = \frac{1}{4b_0'^2} \{ 2b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2 + 2b'_1 \sqrt{b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2} \},$$

$$(\varrho_1 \varrho_2)^2 = \frac{1}{16 b_0'^4} \{ 2b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2 \}^2 - \frac{b_1'^2}{4b_0'^4} \{ b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2 \},$$

nelle quali $b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2$ è sempre positivo, basterà ripetere i ragionamenti stessi che si fecero nel caso precedente per trovare che tutto dipenderà dal segno di

$$(30) \qquad \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \gamma) - b_1'^2 \{ b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2 \},$$

o dall'essere questa quantità uguale a zero; talchè osservando che, per essere ora $b'_1 = \lambda$, e $\cos 2\tau = (-1)^h$, $\operatorname{sen} 2\tau = 0$, i valori di L e M dati dalla (26) si riducono a $\frac{b_1'^2}{2} (b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2)$, e zero, si vede che anche in questo caso la quantità (30) si riduce alla (27), e quindi l'esame della quantità stessa (30), a meno che oltre all'essere ora $M = 0$ non sia anche $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$, si riporta ancora a quello della espressione (29) come nel caso precedente; e in questo caso le radici della solita equazione (19) saranno sempre distinte salvo quando con h pari si abbia $b_1'^2 = 4b'_0 b'_2$, chè allora saranno uguali, e cadranno ambedue dentro il cerchio.

Se poi saremo nel caso testè escluso in cui oltre ad M, anche $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ è zero, allora non potremo più studiare la quantità (30) con fare i ragionamenti del caso precedente, perchè ora si ammette che si abbia $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$; però, riportandosi ancora alla espressione (30) e osservando che ora $b_1'^2 - 4(-1)^h b'_0 b'_2$ è sempre positiva quando h è dispari, e positiva è pure o nulla quando h è pari, si riscontrerà subito che la stessa quantità (30) sarà sempre negativa e le due radici della equazione (18) cadranno una dentro e una fuori del cerchio di raggio uno, purchè nel caso di h pari si abbia $b_1'^2 - 4b'_0 b'_2 > 0$ ovvero $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$. E nel caso di h pari e $b_1'^2 - 4b'_0 b'_2 = 0$ o $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, la quantità (30) sarà zero e le due radici cadranno sul cerchio, e inoltre per quanto si disse nella solita nota al § 8 queste radici saranno anche uguali.

Osserviamo poi che l'essere $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$ porta per le (21) e (22) che si abbia:

$$\cos 2\tau = 1 - 2 \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\gamma - \mu) + \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \mu)}{\alpha^2 + \beta^2},$$

e quindi nel caso di 2τ multiplo pari di π (h pari) o $\cos 2\tau = 1$ si ha, come già notammo $\alpha \operatorname{sen}(\gamma - \mu) = \beta \operatorname{sen}(\delta - \mu) = 0$ e i tre termini della (29) sono nulli, mentre nel caso di 2τ multiplo dispari di π (h dispari) o di $\cos 2\tau = -1$ si ha $\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\gamma - \mu) + \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \mu) = \alpha^2 + \beta^2$, e quindi la espressione (29) si riduce a $-\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2)$ ed è negativa; si concluderà da ciò che anche nel caso attuale di

$\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$ ogni studio si ridurrà sempre ancora a quello della quantità (29) precisamente come nel caso di $\operatorname{sen} 2\chi_0$ diverso da zero; e solo quando 2τ sia un multiplo pari di π e $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ sia zero, o anche (il che torna lo stesso) quando sia $\alpha \operatorname{sen}(\gamma - \mu) = 0$ e $\beta \operatorname{sen}(\delta - \mu) = 0$, nel qual caso la espressione (29) diviene zero, se si avrà la condizione $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$ le radici della solita equazione (18) cadranno ancora una dentro e l' altra fuori del cerchio di raggio uno, mentre se sarà $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ esse cadranno ambedue sul cerchio e saranno inoltre uguali fra loro. E queste radici, come già osservammo, saranno pure uguali ma cadranno nell' interno del cerchio anche quando, essendo 2τ multiplo pari di π, $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ non sia zero, e si abbia $b'^2_1 = 4b'_0 b'_2$, ovvero $\lambda^2 = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2(\beta - \gamma)}$.

Infine se sarà $b_1 = 0$ e quindi $\lambda = 0$, avremo pure (come vedemmo nella nota del § 8) $\operatorname{sen} 2\chi_0 = 0$ e $\varrho_1 = \varrho_2 = \sqrt{\frac{b'_2}{b'_0}}$, ovvero $\varrho_1 = \varrho_2 = \sqrt[4]{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)}{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)}}$, e così in questo caso se $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ sarà diverso da zero, con che la (29) sarà positiva, le due radici della equazione (18) cadranno ambedue dentro il cerchio di raggio uno, e se sarà invece $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma) = 0$, con che anche la (29) sarà zero, cadranno ambedue sul cerchio, ma saranno sempre distinte fra loro; supponendo sempre naturalmente che non sia anche $b_2 = 0$.

Si aggiunga che nel caso che $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ fosse negativo basta cambiare, come già notammo, q_1 in $-q_1$ o δ in $\delta + \pi$ per rientrare nel caso di $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ positivo, e ciò senza che si alteri il valore del nostro integrale, perchè un tale cambiamento equivale a quello di φ in $2\pi - \varphi$. Ma d' altra parte il cambiamento del segno di q_1 o quello di δ in $\delta + \pi$ non fa mutare la espressione (29) nè i valori di $\operatorname{sen} 2\tau$ e $\operatorname{sen} 2\chi_0$; ma però fa sì che la equazione (19) si trasformi in quella che ha per radici le inverse delle radici della primitiva, per cui se di queste radici una sarà dentro e l' altra fuori del cerchio avverrà lo stesso anche dopo l' indicato cambiamento, mentre se esse saranno ambedue dentro il cerchio quel cambiamento le farà passare ambedue fuori, e se saranno sul cerchio vi rimarranno ancora; dunque riassumendo si può ora concludere che qualunque siano p_0, p_1 e q_1, per decidere della posizione delle radici della equazione (19), rispetto al cerchio di raggio uno bisognerà sempre prendere a studiare la espressione (29), cioè:

$$(31) \qquad \alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \gamma) - \alpha^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\gamma - \mu) - \beta^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \mu);$$

e se questa risulterà positiva le due radici cadranno sempre ambedue nell' interno o ambedue all' esterno del cerchio secondochè $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ risulterà positiva o negativa, e oltre a ciò in questo caso esse risulteranno anche uguali se oltre ad essere 2τ un multiplo pari di h o $\cos 2\tau = 1$, si avrà $\lambda^2 = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 \beta^2 \operatorname{sen}^2(\delta - \gamma)}$; se la stessa espressione (31) risulterà negativa e $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ non sarà zero, le radici cadranno una dentro e una fuori del cerchio; e infine nel caso che questa quantità (31) sia zero, allora se $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ sarà pure zero (ciò che porterà che anche gli altri due termini della (31) siano nulli), e se al tempo stesso sarà $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$ le due radici cadranno ancora una fuori e l' altra dentro il cerchio; mentre negli altri casi una almeno delle stesse radici cadrà sul cerchio. E propriamente quando la stessa quantità (31) sia zero, e lo sia anche il suo primo termine

$\alpha\beta$ sen $(\delta - \gamma)$ (per il che lo saranno pure gli altri due), ma invece di avere $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$ si avrà $\lambda^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$ ($\lambda = 0$ incl.), le due radici cadranno ambedue sul cerchio e solo nel caso di $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ saranno anche uguali fra loro; mentre se la (31) sarà zero senza però che lo sia il suo primo termine $\alpha\beta$ sen $(\delta - \gamma)$, allora una delle radici cadrà sul cerchio e l'altra cadrà dentro o fuori del cerchio, secondochè sen $(\delta - \gamma)$ sarà positivo o negativo.

E ricordiamo, come più volte notammo, che quando siano zero insieme le due quantità α sen $(\gamma - \mu)$ e β sen $(\delta - \mu)$ e quindi i due ultimi termini della (31), allora, indipendentemente dall'avere verificato se sia zero o no questa espressione stessa, pei valori di $\cos 2\tau$ e $4b'_0 b'_2$ dati dalle (21) e (22) o, anche più semplicemente, per essere sen $(\delta - \gamma) =$ sen $[(\delta - \mu) - (\gamma - \mu)]$, si vede senz'altro che anche il primo termine $\alpha\beta$ sen $(\delta - \gamma)$ della espressione (31) e quindi questa (31) stessa è zero.

E se invece dei moduli e argomenti delle quantità p_0, p_1 e q_1 si introducano le loro parti reali e immaginarie, prendendole cioè sotto la forma:

$$p_0 = a + ia', \quad p_1 = b + ib', \quad q_1 = c + ic',$$

allora siccome si avrà:

$$a = \lambda \cos \mu, \quad b = \alpha \cos \gamma, \quad c = \beta \cos \delta,$$
$$a' = \lambda \operatorname{sen} \mu, \quad b' = \alpha \operatorname{sen} \gamma, \quad c' = \beta \operatorname{sen} \delta,$$

la espressione $\alpha\beta$ sen $(\delta - \gamma)$ si ridurrà all'altra $bc' - b'c$, e l'espressione precedente (31) coll'esame della quale si può sempre, come dicemmo, decidere della posizione delle radici della (19) rispetto al cerchio di raggio uno, prenderà la forma:

$$(32) \qquad (bc' - b'c)^2 - (ab' - a'b)^2 - (ac' - a'c)^2,$$

che può anche scriversi così:

$$(a^2 - b^2 - c^2)(a'^2 - b'^2 - c'^2) - (aa' - bb' - cc')^2;$$

e il caso di $\alpha\beta$ sen $(\delta - \gamma)$ nullo corrisponderà a quello di $bc' - b'c = 0$, mentre le condizioni di $\lambda^2 \gtreqless \alpha^2 + \beta^2$, che in certi casi devono aversi, corrisponderanno rispettivamente alle altre $a^2 + a'^2 \gtreqless b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$.

Supponendo $a' = 0$, $a = 1$ la espressione (32) si riduce appunto a quella $(bc' - b'c)^2 - b'^2 - c'^2$ che comparisce nella memoria di Jacobi.

10. Aggiungiamo ora che nel primo dei casi considerati nel paragrafo precedente, quello cioè in cui $2\chi_0$ non sarà un multiplo di π, se neppure 2τ lo sarà, dai valori corrispondenti di ϱ_1^2 e ϱ_2^2 si vede subito che il minore dei due moduli ϱ_1, ϱ_2 sarà quello che nelle formole (λ) della nota al § 8 è indicato con ϱ_1 quando sen 2τ è positivo, e sarà invece quello indicato con ϱ_2 quando sen 2τ è negativo; e quindi nel primo caso la radice di modulo minore sarà quella indicata con α_1 nella formola (μ) della stessa nota, e nel secondo caso sarà quella indicata con α_2; mentre quando 2τ è multiplo di π (sempre senza che $2\chi_0$ lo sia) i due moduli ϱ_1 e ϱ_2 saranno uguali fra loro.

E nel caso che $2\chi_0$ sia un multiplo di π, senza che b_1 sia zero, e si abbia $2\tau = h\pi$, evidentemente il minore dei due moduli ϱ_1 e ϱ_2, quando non sia $b'^2_1 = 4b'_0 b'_2$

con h pari, sarà quello indicato con ϱ_1 nelle formole (ν) e (π) della stessa nota, e la radice di modulo minore sarà in conseguenza quella $\frac{-b_1+\sqrt{b_1'^2-(-1)^h 4b'_0 b'_2}}{2b_0} e^{i\theta_1}$ indicata con α_1 nelle formole stesse; mentre quando sia $b_1'^2 = 4b'_0 b'_2$ con h pari le due radici saranno uguali.

E in fine se $b_1 = 0$ le due radici avranno lo stesso modulo $\sqrt{\frac{b'_2}{b'_0}}$ senza però essere uguali fra loro a meno che non sia anche $b_2 = 0$.

Quando dunque si voglia fare uso delle formole precedenti si ha di qui il modo di distinguere la radice di modulo minore della equazione di secondo grado (19) da quello di modulo maggiore quando questi moduli non sono uguali fra loro; intendendo che in queste formole per b'_0, b'_1, b'_2, θ_0, θ_1, e θ_2 come per τ e $\theta_2 - \theta_0$, debbano prendersi i valori determinati dalle (20) e (21), e per $2\chi_0$ debba prendersi il valore fra θ e π che verrà dato per 2χ della formola (ε) della solita nota, la quale per le (21) e (22) può ora ridursi all' altra:

$$(32)\ \cos 2\chi_0 = \frac{\lambda^2-\sqrt{\{\lambda^2-\alpha^2\cos 2(\gamma-\mu)-\beta^2\cos 2(\delta-\mu)\}^2+\{\alpha^2\,\text{sen}\,2(\gamma-\mu)+\beta^2\,\text{sen}\,2(\delta-\mu)\}^2}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)}} =$$

$$= \frac{\lambda^2-\sqrt{(\lambda^2-\alpha^2-\beta^2)^2-4\{\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)-\lambda^2\alpha^2\,\text{sen}^2(\gamma-\mu)-\lambda^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\mu)\}}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2\,\text{sen}^2(\delta-\gamma)}}.$$

Del resto poi quando, come bene spesso si troverà opportuno di fare, anzichè ricorrere alle formole precedenti, ci si voglia servire della formola ordinaria di risoluzione della equazione di 2° grado

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0\,,$$

allora si può osservare che se si esclude il caso di $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ che dà le radici uguali, negli altri casi le radici corrisponderanno ai due valori della espressione $\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0 a_2}}{2a_0}$ pei due valori del radicale $\sqrt{a_1^2-4a_0 a_2}$; e se a_1 non è zero, nel qual caso i moduli delle due radici verrebbero uguali, esse potranno scriversi sotto la forma

$$-\frac{a_1}{2a_0}\,\{(1 \mp \mathrm{P})^2 \mp i\mathrm{Q}\}\,,$$

indicando con $\mathrm{P}+i\mathrm{Q}$ uno dei due valori del rapporto $\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2-4a_0 a_2}$ pel quale, quando P non sia zero, potremo intendere scelto quello nel quale P è positivo.

I loro moduli quindi saranno i due:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(1-\mathrm{P})^2+\mathrm{Q}^2}\ \text{mod}\,\frac{a_1}{a_0}\,,\quad \frac{1}{2}\sqrt{(1+\mathrm{P})^2+\mathrm{Q}^2}\ \text{mod}\,\frac{a_1}{a_0}\,;$$

e se la detta parte reale P sarà zero essi saranno ancora uguali, mentre se sarà positiva il minore fra essi sarà evidentemente il primo, e quindi la radice corrispondente (cioè di modulo minore) sarà quella che viene dalla espressione precedente

$\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$ quando in essa per $\sqrt{a_1^2-4a_0a_1}$ s' intenda preso quel valore pel quale la parte reale del rapporto $\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}$ (supposta diversa da zero) viene ad essere positiva.

E quando l' equazione data sarà della forma della (19) questo rapporto si riduce all' altro $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}$, e ora con tutta facilità si vede che questo risultato viene a concordare pienamente coi risultati precedenti.

11. Questi studî intorno alla posizione delle radici della equazione (19) rispetto al cerchio di raggio uno, ci danno tutti gli elementi necessarî per la determinazione degli integrali della forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(z)}{z^{p-1}(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^p}d\varphi,$$

dove $z=ke^{i\varphi}$, qualunque sia il numero intero e positivo p; e sotto certe condizioni (§ 2) anche per qualsiasi valore reale o complesso di p, ecc.

Riassumendo infatti i risultati precedenti, e cambiando per comodo di notazione p in $p+1$, si giungerà subito alle conclusioni seguenti.

Supponiamo che p_0, p_1, q_1 siano quantità reali o complesse per le quali si abbia:

(33) $$p_0=\lambda e^{i\mu}\ ,\quad p_1=\alpha e^{i\gamma}\ ,\quad q_1=\beta e^{i\delta}\ ,$$

o:

(34) $$p_0=a+ia'\ ,\quad p_1=b+ib'\ ,\quad q_1=c+ic'$$

e sia (formola (12)):

$$u(z)=a_0z^2+a_1z+a_2=k\left(\frac{p_1-iq_1}{2}\frac{z^2}{k^2}+p_0\frac{z}{k}+\frac{p_1+iq_1}{2}\right)$$

la solita nostra funzione $u(z)$, e i suoi due infinitesimi (radici di $u(z)=0$) siano $\bar\alpha$ e $\bar\beta$; e si ammetta che $\psi(z)$, nel campo ove occorra di considerarla, non abbia singolarità, o avendole in alcuni punti questi siano diversi da quelli d' infinitesimo $\bar\alpha$ e $\bar\beta$ di $u(z)$ e corrispondano a singolarità polari, o a singolarità essenziali isolate, e s' intenda che r'_t, r''_t, e r''_∞ abbiano i soliti significati per la funzione $\frac{\psi(z)}{u(z)^{p+1}}$ corrispondentemente ai punti singolari di $\psi(z)$ che cadano rispettivamente entro e fuori del cerchio di raggio k (a distanza finita) o pel punto all' infinito, supposto che sul cerchio non ne cada nessuno; cioè r'_t e r''_t siano i residui o coefficienti di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di Laurent per la funzione $\frac{\psi(z)}{u(z)^{p+1}}$ nell' intorno del punto singolare a corrispondente quando esso sia un polo o un punto singolare essenziale isolato a distanza finita; e r''_∞ sia la quantità analoga per la funzione $\frac{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2u\left(\frac{1}{t}\right)^{p-1}}$ per $t=0$, o di $\frac{\psi(z)}{u(z)^{p+1}}$ per $z=\infty$, come si disse al § 3.

Allora, si potrà senz' altro affermare che se la quantità:

$$(35)\qquad \alpha^2\,\beta^2 \operatorname{sen}^2(\beta-\gamma)-\alpha^2\,\lambda^2 \operatorname{sen}^2(\gamma-\mu)-\beta^2\,\lambda^2 \operatorname{sen}^2(\delta-\mu)$$

nel caso che le p_0, p_1, q_1 siano date sotto la forma (33), o l'altra:

$$(36)\qquad \begin{cases} (bc'-b'c)^2-(ab'-a'b)^2-(ac'-a'c)^2, \\ \qquad\qquad \text{ovvero:} \\ (a^2-b^2-c^2)(a'^2-b'^2-c'^2)-(aa'-bb'-cc')^2 \end{cases}$$

nel caso che le p_0, p_1, q_1 siano date sotto la forma (34) risulteranno negative, il che esclude evidentemente che p_0 possa essere zero, avremo la formola:

$$(37)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(z)}{z^p(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}d\varphi=\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\left[u'(\overline{\alpha})+\frac{u''(\overline{\alpha})}{2}(z-\overline{\alpha})\right]^{-p-1}\right\}_{\overline{\alpha}}+$$
$$+\sum r'_t=\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\,(a_0z+a_0\overline{\alpha}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\overline{\alpha}}+\sum r'_t,$$

nella quale sarà $\overline{\alpha}=k\alpha$, essendo α la radice di modulo minore fra le due α e β della solita equazione (19) $u_1(\gamma)=0$, la quale radice si determinerà sempre nei modi indicati nel paragrafo precedente.

E la stessa formola si avrà anche se le espressioni (35) o (36) saranno nulle insieme a $\alpha\beta \operatorname{sen}(\delta-\gamma)$, o $b'c'-b'c'$, o per essere $\alpha \operatorname{sen}(\gamma-\mu)=\alpha \operatorname{sen}(\delta-\mu)=0$, o $ab'-a'b=ac'-a'c=0$, purchè allora si abbia:

$$\lambda^2>\alpha^2+\beta^2 \ \text{ o } \ a^2+a'^2>b^2+b'^2+c^2+c'^2.$$

Negli stessi casi poi, valendosi delle considerazioni del § 3, si troverà che si ha anche la formola:

$$(38)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(z)}{z^p(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}d\varphi=-\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)[a_0z+a_0\overline{\beta}+a_1]^{-p-1}\right\}_{\overline{\beta}}-$$
$$-\sum r''_t+r''_\infty,$$

nella quale sarà $\overline{\beta}=k\beta$ essendo β la radice di modulo maggiore fra le due α e β della solita equazione $u_1(\gamma)=0$, la quale perciò secondo quanto si disse nel paragrafo precedente corrisponderà a quella $\dfrac{-p_0+\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}}{2b_0}$ nella quale il radicale è preso con un segno tale che il rapporto $\dfrac{1}{p_0}\sqrt{p_2^0-p_1^2-q_1^2}$ abbia la parte reale negativa.

Se poi le espressioni (35) o (36) saranno positive, nel qual caso potrà anche aversi $p_0=0$, e se al tempo stesso $\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$, o $bc'-b'c$ saranno pure positivi, allora osservando che le due radici α e β per quanto si disse nei paragrafi precedenti vengono ambedue a cadere nell' interno del cerchio di raggio uno, si troverà che invece delle (37) o (38) si ha la formola:

$$(39)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(z)}{z^p(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}d\varphi=\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\,(a_0z+a_0\overline{\alpha}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\overline{\alpha}}+$$
$$+\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\,(a_0z+a_0\overline{\beta}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\overline{\beta}}+$$
$$+\sum r'_t,$$

nella quale $\bar{\alpha} = k\alpha$, $\bar{\beta} = k\beta$, essendo ancora α e β le radici della solita equazione $u_1(\gamma) = 0$ che supporremo distinte fra loro; mentre se risulteranno uguali, ciò che potrà soltanto avvenire quando sia $p_0^2 = p_1^2 + q_1^2$, il 2° membro verrà alquanto modificato perchè, secondo quanto si disse al § 1, ai due primi termini verrà sostituito l'unico $\frac{1}{a_0^{p+1}\, \pi(2p+1)}\, \psi^{(2p+1)}(\bar{\alpha})$.

Valendosi poi ancora delle considerazioni del § 3 si troverà che negli stessi casi insieme alla formola precedente (39) si ha anche l'altra:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^p\,(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = r''_\infty - \sum r''_t. \tag{40}$$

E infine se le espressioni (35) o (36) saranno ancora positive (con che potrà ancora aversi $p_0 = 0$) e al tempo stesso $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ o $ac' - b'c$ saranno negative, allora invece delle formole precedenti, avremo l'altra:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^p\,(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = \sum r'_t, \tag{41}$$

che per le osservazioni fatte al § 2 varrà non solo per valori nulli o interi e positivi di p, ma *per qualsiasi valore di p reale o anche complesso*; e varrà pure se al fattore $\frac{1}{u(z)^{p+1}}$ si sostituisce $\log u(z)$, per modo cioè che si avrà anche la formola:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\,\psi(z) \,\big\}\log k + i\varphi + \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)\big\{\, d\varphi = \sum r'_t, \tag{42}$$

essendo in questa r'_t i residui di $\psi(z)\log(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)$ nei punti d'infinito di $\psi(z)$ che cadessero entro il cerchio di raggio k.

E sempre per le osservazioni fatte al § 2 e per quanto si disse al § 9, si può aggiungere che se le espressioni (35) o (36) saranno zero, e $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$ saranno ancora diverse da zero e negative; o se essendo ancora zero queste espressioni (35) e (36) lo sarà pure $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$ (con che anche gli altri due termini delle (35) o (36) saranno pure nulli) e in tal caso al tempo stesso si avrà $\lambda^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$, o $a^2 + a'^2 \leq b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$, allora la formola (42) sussisterà sempre senz'altro, e la (41) sussisterà ancora purchè in essa il numero stesso p se esso è reale, o la sua parte reale se è complesso sia una quantità diversa da zero e negativa qualsiasi, la quale però, quando, trovandosi nell'ultimo caso, si abbia $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, o $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$, dovrà essere inferiore a $-\frac{1}{2}$.

E infine se essendo zero le espressioni (35) o (36) le quantità $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$ saranno positive, allora la formola (42) cesserà di sussistere perchè in tal caso, essendo una radice della equazione $u(z) = 0$ nell'interno del cerchio, la funzione $\log u(z)$ cesserà di essere monodroma, e lo stesso evidentemente accadrà della (41) a meno che non ci si limiti a considerare il caso in cui p sia diverso da zero e sia negativo e intiero. Per non complicare però, questo caso in cui le (35) o (36) sono nulle, e $\operatorname{sen}(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$ sono positive, lo escluderemo dalle nostre considerazioni attuali.

Alla (41) poi, *nel caso però soltanto di p intero e positivo o nullo*, per mezzo delle solite considerazioni del § 3 si potrebbe sostituire l'altra:

$$(43)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(z)}{z^p(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi=-\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\Big\{\psi(z)[a_0z+a_0\bar\alpha+a_1)^{-p-1}\Big\}_{\bar\alpha}-$$
$$-\frac{1}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\Big\{\psi(z)[a_0z+a_0\bar\beta+a_1)^{-p-1}\Big\}_{\bar\beta}-$$
$$-\sum r_t''+r_\infty'',$$

essendo ancora $\bar\alpha=k\alpha$, $\bar\beta=k\beta$, con α e β radici della solita equazione $u_1(\gamma)=0$, le quali ora cadono ambedue fuori del cerchio di raggio k, e si suppongono distinte, senza di chè, come si disse nel caso della (39), ai due primi termini del secondo membro bisognerebbe sostituire l'unico $-\dfrac{1}{a_0^{p+1}\pi(2p+1)}\psi^{(2p+1)}(\bar\alpha)$.

E noteremo che in quasi tutte queste formole figurano le quantità $2a_0\bar\alpha+a_1$, o $2a_0\bar\beta+a_1$, le quali colle notazioni sempre usate corrispondono a $2b_0\alpha+b_1$, e $2b_1\beta+b_1$, essendo α e β le radici della (19), e rappresentano quindi i due valori del radicale $\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}$; e propriamente $2a_0\bar\alpha+a_1$ rappresenterà quello pel quale la parte reale del rapporto $\dfrac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}$ è positiva, e $2a_0\bar\beta+b_1$ rappresenterà l'altro. E quando convenga di prendere le radici della (19) sotto la forma che loro assegnammo nella nota al § 8, allora $2a_0\bar\alpha+a_1$ nel caso di $\operatorname{sen}2\chi_0$ diverso da zero corrisponderà alla quantità $\dfrac{b_1}{\operatorname{sen}2\chi_0}\Big\{\operatorname{sen}2\tau-i(\cos 2\tau-\cos 2\chi_0)\Big\}$ preceduta dal segno $+$ o dal segno $-$ secondo che $\operatorname{sen}2\tau$ sarà positivo o negativo, e nel caso di $\operatorname{sen}2\chi_0=0$ e quindi $\tau=h\pi$ corrisponderà a $\sqrt{b_1'^2-(-1)^h 4b_0'b_2'}\,e^{i\theta_1}$ ovvero a $\sqrt{\lambda^2-\alpha^2\cos 2(\gamma-\mu)-\beta^2\cos 2(\delta-\mu)}\,e^{i\theta_1}$, ove per questi radicali devono essere presi i valori positivi, ecc.

12. Aggiungiamo poi che siccome, in dipendenza dei valori dati pei coefficienti p_0, p_1, q_1 che figurano nei denominatori sotto gli integrali delle nostre formole, o in dipendenza dei coefficienti a_0, a_1, a_2 della solita funzione di 2° grado $u(z)$, dobbiamo sempre tener conto delle condizioni indicate sopra pei segni delle espressioni (35) o (36) e $\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$ o $bc'-b'c$, così d'ora innanzi per abbreviare diremo condizioni (A) quelle sotto le quali si hanno le formole (37) o (38); condizioni (B) quelle sotto le quali si hanno le (39) o (40); e condizioni (C) quelle per le quali si hanno le (41), (42) e (43); cioè diremo che sono soddisfatte le condizioni (A) quando le espressioni (35) o (36) sono negative o quando essendo zero si ha $\alpha\beta\operatorname{sen}(\delta-\gamma)=0$ o $bc'-b'c=0$ purchè allora si abbia anche $\lambda^2>\alpha^2+\beta^2$, o $a^2+a'^2>b^2+b'^2+c^2+c'^2$; e diremo che sono soddisfatte le condizioni (B) quando le espressioni (35) o (36) sono positive e $\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$ o $bc'-b'c$ sono pure positivi; e diremo infine che sono soddisfatte le condizioni (C) quando le espressioni (35) o (36) sono positive e $\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$ o $bc'-b'c$ sono negative, o quando essendo zero le espressioni stesse (35) o (36) le quantità $\operatorname{sen}(\delta-\gamma)$ o $bc'-b'c$ sono diverse da zero e sempre negative, o essendo zero anche queste (e quindi anche gli altri due termini delle espressioni stesse) si

ha $\lambda^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$, o $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$. E colle condizioni (A) il p_0 dovrà necessariamente essere diverso da zero, mentre colle condizioni (B) e (C) potrà anche essere zero.

E in tutte le nostre formole, quando si hanno le condizioni (A) o (B) l'esponente p deve essere un intero nullo o positivo qualsiasi; mentre nel caso delle condizioni (C) quando si vogliano applicare le (41) o (42) il p può anche essere un numero complesso qualsiasi, e solo quando le espressioni (35) o (36) sono nulle esso stesso se è reale o la sua parte reale se è complesso deve soddisfare alle condizioni speciali che sopra indicammo pei rispettivi casi (tenuto conto anche del valore e del segno di sen $(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$); e intendendo che la (42) non debba applicarsi quando, le espressioni (35) o (36) essendo ancora nulle, sen $(\delta - \gamma)$ o $bc' - b'c$ sono positivi, ecc.

13. Premesse queste considerazioni generali, ci fermeremo ora in modo speciale sui casi nei quali $\psi(z) = z^\nu f(z)$, o $\psi(z) = \frac{f(z)}{z^{1+\nu}}$ con ν nullo o intero e positivo, e $f(z)$ funzione che quando si applicano le (37), (39), (41) e (42) non ha singolarità nell'interno del cerchio di raggio k nè sul cerchio, e quando si applicano le (38), (40) e (43) non ha singolarità fuori del cerchio nè sul cerchio stesso.

Osserveremo che nel primo di questi casi rispetto a $f(z)$ le r'_t saranno tutte nulle, all'infuori della r'_0 nel caso di $\psi(z) = \frac{f(z)}{z^{1+\nu}}$, e nel secondo saranno nulle tutte le r''_t; quindi nel caso delle condizioni (A) avremo evidentemente le formole:

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = \\ \quad = \dfrac{1}{\pi(p)\,k^{\nu-p}} \dfrac{d^p}{dz^p}\Big\{ z^\nu f(z)\,(a_0 z + a_0\bar{\alpha} + a_1)^{-p-1}\Big\}_{\bar{\alpha}}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0 + p_1\cos\varphi + q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = \\ \quad = \dfrac{k^{\nu+p+1}}{\pi(p)} \dfrac{d^p}{dz^p}\Big\{ \dfrac{f(z)\,(a_0 z + a_0\bar{\alpha} + a_1)^{-p-1}}{z^{1+\nu}}\Big\}_{\bar{\alpha}} + k^{\nu+p+1}\, r'_0, \end{cases}$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità nell'interno del cerchio di raggio k nè sul cerchio, e α non sia zero; e avremo invece le altre:

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \,\mathrm{sen}\,\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = \\ \quad = -\dfrac{1}{\pi(p)\,k^{\nu-p}} \dfrac{d^p}{dz^p}\Big\{ z^\nu f(z)\,(a_0 z + a_0\bar{\beta} + a_1)^{-p-1}\Big\}_{\bar{\beta}} + \dfrac{r''_\infty}{k^{\nu-p}}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0 + p_1\cos\varphi + q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{p+1}}\, d\varphi = \\ \quad = -\dfrac{k^{\nu+p+1}}{\pi(p)} \dfrac{d^p}{dz^p}\Big\{ \dfrac{f(z)\,(a_0 z + a_0\bar{\beta} + a_1)^{-p-1}}{z^{1+\nu}}\Big\}_{\bar{\beta}}, \end{cases}$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità all'esterno del cerchio di raggio k nè sul cerchio.

E nel caso delle condizioni (B) avremo le formole:

$$(46)\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = \\ = \dfrac{1}{\pi(p)k^{\nu-p}}\left\{\dfrac{d^p}{dz^p}\left\{z^\nu f(z)(a_0z+a_0\bar\alpha+a_1)^{-p-1}\right\}_{\bar\alpha} + \dfrac{1}{\pi(p)k^{\nu-p}}\dfrac{d^p}{dz^p}\left\{z^\nu f(z)(a_0z+a_0\bar\beta+a_1)^{-p-1}\right\}_{\bar\beta}\right., \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = \\ = \dfrac{z^{\nu+p+1}}{\pi(p)}\dfrac{d^p}{dz^p}\left\{\dfrac{f(z)(a_0z)+a_0\bar\alpha+a_1)^{-p-1}}{z^{1+\nu}}\right\}_{\bar\alpha} + \dfrac{k^{\nu+p+1}}{\pi(p)}\dfrac{d^p}{dz^p}\left\{f(z)(a_0z+a_0\bar\beta+a_1)^{-p-1}\right\}_{\bar\beta} + k^{\nu+p+1}r'_0, \end{cases}$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità nell' interno del cerchio di raggio k nè sul cerchio, e le radici $\bar\alpha$ e $\bar\beta$ o α e β non siano zero, e inoltre siano distinte, senza di chè ai due primi termini dei secondi membri dovremo sostituire nella prima il termine:

$$\frac{1}{a_0^{p+1}\pi(2p+1)k^{\nu-p}}\frac{d^{2p+1}}{dz^{2p+1}}\left\{z^\nu f(z)\right\}_{\bar\alpha},$$

e nella seconda l'altro:

$$\frac{k^{\nu+p+1}}{a_0^{p+1}\pi(2p+1)}\frac{d^{2p+1}}{dz^{2p+1}}\left\{\frac{f(z)}{z^{1+\nu}}\right\}_{\bar\alpha};$$

e avremo pure le altre:

$$(47)\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = \dfrac{r''_\infty}{k^{\nu-p}}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\nu)^{p+1}}\,d\varphi = 0, \end{cases}$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità all' esterno del solito cerchio nè sul cerchio; e queste ultime (47) varranno anche se p è negativo essendo però sempre intero, purchè allora nella seconda sia $1+\nu+2p+2 \geqq 2$ ovvero $1+\nu \geqq -2p$, senza di chè bisognerebbe nel secondo membro di essa aggiungere un termine della forma di quello che figura nella prima.

E infine nel caso delle condizioni (C) dalle (41) e (42) avremo le formole:

$$(48)\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = k^{\nu+p+1}r'_0, \end{cases}$$

$$(49)\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\nu+1)\varphi} f(ke^{i\varphi})\left\{\log k+i\varphi+\log(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)\right\}d\varphi = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\nu\varphi} f(ke^{i\varphi})\left\{\log k+i\varphi+\log(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)\right\}d\varphi = k^\nu r'_0, \end{cases}$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità nell' interno del solito cerchio di raggio k nè sul cerchio; e mentre nelle (44), (45), (46) p si suppone intero e positivo o nullo, nelle (47) può anche supporsi intero e negativo purchè allora nella seconda sia $1+\nu \geqq -2p$,

e nelle (48) può avere un valore qualsiasi reale o complesso, a meno che (sempre per queste formole (48)) le espressioni (35) o (36) non siano nulle, chè allora il p dovrà soddisfare alle condizioni che indicammo sopra pel caso della formola (41).

E sempre nel caso delle condizioni (C) ma limitatamente però al supporre che p sia positivo e intero o nullo, dalla (43) avremo le altre;

$$
(50)\begin{cases}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = \\
\qquad = -\frac{1}{\pi(p)k^{\nu-p}}\frac{d^p}{dz^p}\left\{z^\nu f(z)\,(a_0z+a_0\bar{\alpha}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\bar{\alpha}} - \\
\qquad - \frac{1}{\pi(p)k^{\nu-p}}\frac{d^p}{dz^p}\left\{z^\nu f(z)\,(a_0z+a_0\bar{\beta}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\bar{\beta}} + \frac{r''_\infty}{k^{\nu-p}}, \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\,d\varphi = \\
= -\frac{k^{\nu+p+1}}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\frac{f(z)(a_0z+a_0\bar{\alpha}+a_1)^{-p-1}}{z^{1+\nu}}\right\}_{\bar{\alpha}} - \frac{k^{\nu+p+1}}{\pi(p)}\frac{d^p}{dz^p}\left\{\frac{f(z)(a_0z+a_0\bar{\beta}+a_1)^{-p-1}}{z^{1+\nu}}\right\}_{\bar{\beta}}
\end{cases}
$$

quando $f(z)$ non abbia singolarità all'esterno del solito cerchio di raggio k nè sul cerchio, e le radici α e β siano distinte senza di chè bisognerebbe modificare ancora i secondi membri col sostituire ai due primi termini della prima l'unico:

$$
-\frac{1}{a_0^{p+1}\,\pi(2p+1)k^{\nu-p}}\frac{d^{2p+1}}{dz^{2p+1}}\left\{z^\nu f(z)\right\}_{\bar{\alpha}},
$$

e a quelli della seconda l'altro:

$$
-\frac{k^{\nu+p+1}}{a_0^{p+1}\,\pi(2p+1)}\frac{d^{2p+1}}{dz^{2p+1}}\left\{\frac{f(z)}{z^{1+\nu}}\right\}.
$$

In tutte queste formole r'_0 rappresenta il residuo di $\frac{f(z)}{z^{1+\nu}(a_0z^2+a_1z+a_2)^{p+1}}$ nel punto $z=0$, per il chè nel caso delle (44) e (46) (che allora una almeno delle radici della (19) è dentro il cerchio di raggio uno) conviene supporre che a_2 o $p-iq$ non sia zero onde la equazione (19) non abbia la radice zero; e evidentemente questo residuo r'_0 potrà ottenersi calcolando la quantità $\frac{1}{\pi(\nu)}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{f(z)(a_0z^2+a_1z+a_2)^{-p-1}\right\}_0$, o determinando con altro processo qualsiasi il coefficiente di z^ν nello sviluppo per potenze intere e positive di z per la funzione $f(z)\,(a_0z^2+a_1z+a_2)^{-p-1}$ nell'intorno del punto $z=0$.

E nelle stesse formole r''_∞, per quanto si disse al § 3, rappresenterà il residuo per $t=0$ della funzione $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{\nu-2p}(a_0+a_1t+a_2t^2)^{p-1}}$, per modo che per $\nu \leq 2p$ si ha $r''_\infty=0$, per $\nu=2p+1$ si ha $\frac{r''_\infty}{k^{\nu-p}}=\frac{f_\infty}{(a_0k)^{p+1}}=\frac{f_\infty}{b_0^{p+1}}=\frac{2^{p+1}f_\infty}{(p_1-iq_1)^{p+1}}$ essendo f_∞ il valore di $f(z)$ per $z=\infty$, e per $\nu>2p+1$ lo stesso residuo r''_∞ può ottenersi con un processo del tutto uguale a quello col quale si determina r'_0, cioè

calcolando la quantità $\frac{1}{\pi(\nu-2p-1)}\frac{d^{\nu-2p-1}}{dz^{\nu-2p-1}}\left\{f\left(\frac{1}{t}\right)(a_0+a_1t+a_2t^2)^{-p-1}\right\}_0$, o determinando con un processo qualsiasi il coefficiente di $t^{\nu-2p-1}$ nello sviluppo di $f\left(\frac{1}{t}\right)(a_0+a_1t+a_2t^2)^{-p-1}$ per potenze intere e positive di t nell'intorno del punto $t=0$.

14. Le formole ottenute hanno una particolare importanza, e su esse faremo intanto la osservazione seguente.

Consideriamo i varî gruppi di queste formole, cioè il gruppo delle due (44) o quello delle due (45) nel caso che siano soddisfatte le condizioni (A); o le due (46) o le due (47) nel caso delle condizioni (B); o infine le due (48) o le due (50) nel caso delle condizioni (C); e fra le due del gruppo che si considera, quello ad es. delle (44) prendiamo le formole che si ottengono dalla prima di esse dando a ν i valori $0, 1, 2, \ldots p-1$, in corrispondenza con quelle che da essa si ottengono dando a ν i valori $2p, 2p-1, 2p-2, \ldots, p+1$; e prendiamo pure le altre che si ottengono dalla stessa formola dando a ν i valori $2p+1$, $2p+2, \ldots$ cioè quelli maggiori di $2p$ in corrispondenza con quelli che si hanno dalla seconda dello stesso gruppo dando a ν i valori $0, 1, 2, 3 \ldots$

Sommando o sottraendo le formole così corrispondenti si otterranno i valori degli integrali:

$$(51)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}\cos m\varphi d\varphi,\quad \int_0^{2\pi}\frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}i\operatorname{sen} m\varphi d\varphi$$

per tutti i valori interi e positivi $1, 2, 3 \ldots$ di m, mentre la prima delle formole del gruppo considerato, per $\nu=p$ darà il valore del primo di questi integrali (51) pel caso di $m=0$; dunque evidentemente le due formole di ciascuno dei gruppi indicati, oltre a darci i valori degli integrali che in esse figurano, conducono anche a determinare i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier per la parte reale e pel coefficiente dell'immaginario della espressione:

$$(52)\qquad \frac{f(ke^{i\varphi})}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}},$$

e ciò nei casi di validità delle formole del gruppo che si considera, cioè pel caso dei gruppi di formole (44), (46) e (48) quando siano soddisfatte rispettivamente le condizioni (A), (B), (C) e la $f(z)$ non abbia singolarità nell'interno del cerchio di raggio k nè sul cerchio; e nel caso dei gruppi di formole (45), (47) e (50) quando siano ancora soddisfatte rispettivamente le stesse condizioni (A), (B), (C), e la $f(z)$ non abbia singolarità fuori del cerchio di raggio k nè sul cerchio; e nel caso delle (44) e (46) non sia $p_1-iq_1=0$. E s'intende che ora anche nel caso delle formole (48) il p deve essere positivo e intero, o nullo, e conviene supporre perciò di non essere nel caso in cui le (35) o (36) sono nulle.

Aggiungiamo che per essere nelle nostre formole $r''_\infty=0$ per $\nu\leq 2p$, e $\frac{r''_\infty}{k^{\nu-p}}=\frac{f_\infty}{b_0^{p+1}}$ per $\nu=2p$ si vede che gli integrali (51) che provengono dal gruppo delle due (47), e che corrispondono cioè al caso in cui si hanno le condizioni (B) e la $f(z)$ non ha singolarità fuori del cerchio di raggio k nè sul cerchio, per $m\leq p$

son tutti nulli, per $m = p + 1$ sono ambedue uguali a $\frac{f_\infty}{2b_0^{p+1}} = \frac{2^p f_\infty}{(p_1 - iq_1)^{p+1}}$, e per $m > p + 1$ sono ambedue uguali a $\frac{r''_\infty}{2k^m}$ essendo r''_∞ il residuo per $t = 0$ della funzione $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{m-p}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^{p+1}}$.

E similmente avendo riguardo alla (48) si vede che nel caso corrispondente, che è quello delle condizioni (C) e di $f(z)$ senza singolarità nell'interno del cerchio k nè sul cerchio, gli integrali (51) per $m \leq p$ sono ancora tutti nulli, e per $m > p$ i primi di essi sono uguali a $\frac{1}{2} k^m r'_0$, e i secondi sono uguali a $-\frac{1}{2} k^m r'_0$, essendo r'_0 il residuo della funzione $\frac{f(z)}{z^{m-p}(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^{p+1}}$ che per $m = p + 1$ è evidentemente uguale a $\frac{f_0}{a_2^{p+1}} = \frac{f_0}{b_2^{p+1}} = \frac{2^{p+1} f_0}{(p_1 + iq_1)^{p+1} k^{p+1}}$, essendo f_0 il valore di $f(z)$ per $z = 0$.

E di qui risulta anche che nei due ultimi casi ora considerati, nei quali sono soddisfatte le condizioni (B) o (C) e le altre rispettivamente indicate per $f(z)$, gli sviluppi di Fourier per la parte reale e pel coefficiente dell'immaginario della espressione (52) presentano la particolarità molto notevole di incominciare soltanto dal termine $a_m \cos n\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi$ nel quale $m = p + 1$.

Aggiungiamo infine che considerando nel gruppo delle due formole (49) quelle che vengono dalla prima facendovi $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ in corrispondenza con quelle che vengono dalla seconda facendovi $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ e sommando o sottraendo le formole così corrispondenti, si giunge all'altra:

$$(53) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ke^{i\varphi}) \{ \log k + i\varphi + \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi) \} \cos m\varphi d\varphi =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ke^{i\varphi}) \{ \log k + i\varphi + \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi) \} i \operatorname{sen} m\varphi d\varphi = \tfrac{1}{2} k^m r'_0,$$

che vale per tutti i valori $1, 2, 3 \ldots$ interi e positivi di m, mentre facendo $\nu = 0$ nella seconda delle stesse (49) si trova l'altra:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ke^{i\varphi}) \{ \log k + i\varphi + \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi) \} d\varphi = r'_0 ;$$

e queste che valgono nel caso delle condizioni (C) e quando $f(z)$ non ha singolarità nell'interno del cerchio di raggio k nè sul cerchio, ci danno i valori di tutti questi integrali che evidentemente servono a determinare i coefficienti degli sviluppi di Fourier per la parte reale e pel coefficiente dell'immaginario della funzione:

$$f(ke^{i\varphi}) \{ \log k + i\varphi + \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi) \}$$

sotto le condizioni indicate.

15. In alcune delle formole precedenti figura nei secondi membri la quantità della forma: $\frac{d^p}{dz^p} \{ \psi(z)(a_0 z + a_0 \bar{\lambda} + a_1)^{-p-1} \}_{\bar{\lambda}}$, essendo $\bar{\lambda}$ una radice della equa-

zione $u(z)=0$, come vi figura il residuo r'_0, e l'altro r''_∞; e io voglio indicare i processi semplici che servono al calcolo di queste quantità.

Incominciando dalla prima di queste quantità, per la quale, come è naturale, il p viene supposto intero e positivo, o anche nullo, osserviamo che se s'indica con $\overline{\mu}$ l'altra radice della equazione $u(z)=0$, si avrà $-\overline{\mu}=\overline{\lambda}+\frac{a_1}{a_0}$ e quindi sarà:

$$\psi(z)\,(a_0 z+a_0\overline{\lambda}+a_1)^{-p-1}=\frac{1}{a_0^{p+1}}\,\psi(z)\,(z-\overline{\mu})^{-p-1};$$

e applicando la regola di derivazione dei prodotti si troverà subito:

$$\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\,(a_0 z+a_0\overline{\lambda}+a_1)^{-p-1}\right\}=$$
$$=\frac{1}{a_0^{p+1}}\left\{\psi^{(p)}(z)\,(z-\mu)^{-p-1}-p_1(p+1)\,\psi^{(p-1)}(z)\,(z-\overline{\mu})^{-p-2}+\cdots+\right.$$
$$+(-1)^s p_s(p+1)(p+2)\ldots(p+s)\,\psi^{(p-s)}(z)\,(z-\overline{\mu})^{-p-s-1}+\cdots+$$
$$\left.+(-1)^p(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)\,2p\,\psi(z)\,(z-\overline{\mu})^{-2p-1}\right\},$$

e quindi sarà:

$$\frac{d^p}{dz^p}\left\{\psi(z)\,(a_0 z+a_1\overline{\lambda}+a_1)^{-p-1}\right\}_{\overline{\lambda}}= \tag{54}$$
$$=\frac{1}{\pi(p)\,(2a_0\overline{\lambda}+a_1)^{2p+1}}\sum_0^p(-1)^s\,\pi(p+s)\,p_s\,\psi^{(p-s)}(\overline{\lambda})\,(2a_0\overline{\lambda}+a_1)^{p-s}\,a_0^s,$$

e in questa formola per $\overline{\lambda}$ bisognerà mettere la radice indicata finora, secondo i casi, con $\overline{\alpha}$ o $\overline{\beta}$.

Quanto poi al residuo r'_0 di $\frac{f(z)}{z^{1+\nu}(a_0z^2+a_2z+a_2)^{p+1}}$ che figura nelle formole (44), (46) e (48) potremo determinarlo, come già dicemmo, sviluppando per potenze di z la funzione $f(z)\,(a_0z^2+a_1z+a_2)^{-(p+1)}$ nell'intorno del punto $z=0$, e cercando il coefficiente di z^ν; e lo sviluppo potrà farsi nel modo che più ci tornerà comodo.

La cosa potendo trattarsi anche in modo più generale, noi prenderemo a cercare lo sviluppo per potenze intere e positive di z nell'intorno del punto $z=0$ per la funzione $f(z)\,\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)$, essendo $\theta(u)$ una funzione di u regolare per $u=a_2$, e quindi sviluppabile col teorema di Cauchy nell'intorno di questo punto a_2 per potenza di $u-a_2$.

Avremo:

$$\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)=\theta(a_2)+\theta'(a_2)\,(a_1z+a_0z^2)+\frac{\theta''(a_2)}{1.2}\,(a_1z+a_0z^2)^2+\cdots$$
$$+\frac{\theta^{(n-1)}(a_2)}{\pi(n-1)}\,(a_1z+a_0z^2)^{n-1}+\frac{\theta^{(n)}(a_2)}{\pi(n)}\,(a_1z+a_0z^2)^n+\cdots,$$

e pei valori di z il cui modulo sia sufficientemente piccolo in questa serie potremo sviluppare le varie potenze che vi figurano di $a_1z+a_0z^2$, e poi riunire i termini che contengono le stesse potenze di z senza alterarne la convergenza.

Si avrà così la formola seguente:

(55)
$$\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)=$$
$$=\sum_0^\infty\left\{\frac{\theta^{(n)}(a_2)}{\pi(n)}a_1^n+\frac{\theta^{(n-1)}(a_2)}{\pi(n-1)}(n-1)_1a_1^{n-2}a_0+\frac{\theta^{(n-2)}(a_2)}{\pi(n-2)}(n-2)_2a_1^{n-4}a_0^2+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{\theta^{(n-s)}(a_2)}{\pi(n-s)}(n-s)_sa_1^{n-2s}a_0^s+\cdots\right\}z^n=\sum_0^\infty\left\{\sum_s\frac{\theta^{(n-s)}(a_2)}{\pi(s)\pi(n-2s)}a_1^{n-2s}a_0^s\right\}z^n,$$

dove la somma relativa all'indice s termina a $s=\frac{n}{2}$, o $s=\frac{n-1}{2}$ secondochè n è pari o dispari; e questa formola darà appunto lo sviluppo di $\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)$ nell'intorno del punto $z=0$ per potenze intere e positive di z, quando la funzione $\theta(u)$ sia regolare nell'intorno di $u=a_2$.

Indicato ora questo sviluppo con $\sum_0^\infty\gamma_nz^n$, cioè posto:

$$\gamma_n=\sum_s\frac{\theta^{(n-s)}(a_2)}{\pi(s)\pi(n-2s)}a_0^sa_1^{n-2s},$$

e supposto che $f(z)$ sia essa pure regolare nell'intorno del punto $z=0$, basterà prendere lo sviluppo in serie di $f(z)$ per potenze intere e positive di z, e poi colla regola del prodotto delle serie trovare il coefficiente di z^ν nella serie che viene dal prodotto di $\sum\gamma_nz^n$ con quella $\sum c_nz^n$ di $f(z)$, per ottenere il residuo di $\frac{f(z)\,\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)}{z^{1+\nu}}$ per $z=0$, per modo che questo residuo sarà:

$$c_0\gamma_\nu+c_1\gamma_{\nu-1}+c_2\gamma_{\nu-2}+\cdots+c_\nu\gamma_0.$$

Particolarizzando ora le funzioni $\theta(u)$ e $f(z)$ si troveranno subito i residui r'_0 delle funzioni corrispondenti $\frac{f(z)\,\theta(a_0z^2+a_1z+a_2)}{z^{1+\nu}}$ per $z=0$; e così in particolare supponendo $f(z)=1$, se prendiamo $\theta(u)=u^\mu$ con μ reale o complesso qualsiasi, o anche $\theta(u)=\log u$, intendendo che a_2 o p_1+iq_1 sia diverso da zero [1], e introducendo le solite quantità b invece delle a, si troverà che i residui r'_0 per le funzioni:

(56)
$$\frac{(a_0z^2+a_1z+a_2)^\mu}{z^{1+\nu}},\qquad\frac{\log(a_0z^2+a_1z+a_2)}{z^{1+\nu}}$$

sono rispettivamente i seguenti:

(57)
$$k^{\mu-\nu}\frac{(2b_2)^{\mu-\nu}}{2^{\mu-\nu}}\sum_s\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu+s+1)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu-2s)}b_1^{\nu-2s}(4b_0b_2)^s,$$

(58)
$$\frac{2^\nu}{(2b_2)^\nu k^\nu}\sum_s(-1)^{\nu-s-1}\frac{\pi(\nu-s-1)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu-2s)}b_1^{\nu-2s}(4b_0b_2)^s$$

[1] Propriamente nel caso di $\theta(u)=u^\mu$ quando μ sia intero e positivo o nullo, a_2 potrà anche supporsi uguale a zero.

in ciascuna delle quali s terminerà al valore $\frac{\nu}{2}$ o $\frac{\nu-1}{2}$ secondochè ν è pari o dispari; e nell'ultima bisogna supporre $\nu \geq 1$, dovendosi per $\nu = 0$ prendere invece $r'_0 = \log a_2 = \log b_2 + \log k$.

Infine poi se si vuole la espressione di r''_∞ che nelle nostre formole del § 13 si ha soltanto pei casi di p intero e positivo, o nullo, e figura come residuo della funzione $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{\nu-2p}(a_0+a_1t+a_2t^2)^{p+1}}$, limitandoci come qui sopra al caso di $f(z)=1$, e allora supponendo senz'altro $\nu > 2p$ perchè per $\nu \leq 2p$ si ha subito $r''_\infty = 0$, si vede subito che esso corrisponde alla espressione che si ottiene dalla (57) cambiandovi μ in $-p-1$, e ν in $\nu-2p-1$, e a_0 in a_2 e a_2 in a_0, o b_0 in b_2 e b_2 in b_0, cioè si ha:

$$(59)\quad r''_\infty = \frac{2^{\nu-p}k^{\nu-p}}{\pi(p)(2b_0)^{\nu-p}b_1^{2p+1}}\sum_s(-1)^{\nu-s-1}\frac{\pi(\nu-p-s-1)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu-2p-2s-1)}b_1^{\nu-2s}(4b_0b_2)^s,$$

e in questa s terminerà a $\frac{\nu-1}{2}-p$ quando ν è dispari e a $\frac{\nu}{2}-p-1$ quando ν è pari, e si suppone, come del resto sarà sempre naturalmente, che b_0 o p_1-iq_1 sia diverso da zero.

E in tutte queste espressioni per $2b_0$, b_1, $2b_2$, e $4b_0b_2$ potremo sostituire rispettivamente p_1-iq_1, p_0, p_1+iq_1 e $p_1^2+q_1^2$.

16. Volendo ora applicare le formole del § 13 al caso di $f(z)=1$ basterà prendere per r'_0 nel caso delle formole (49) la espressione (58), e nel caso delle altre formole prendere invece per r'_0 l'espressione che si ha dalla (57) facendovi $\mu = -(p+1)$, cioè:

$$(60)\quad \frac{2^{\nu+p+1}}{(2b_2)^{\nu+p+1}k^{\nu+p+1}}\sum_s(-1)^{\nu-s}\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+\nu-s)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu-2s)}b_1^{\nu-2s}(4b_0b_2)^s,$$

e in questa p potrà anche essere complesso; mentre per r''_∞ dovremo prendere la espressione (59) nella quale però dovrà intendersi che p sia intero e positivo, o nullo; e dovremo valerci inoltre della formola (54) facendovi $\psi(z)=z^m$ con $m=\nu$, o $m=-(1+\nu)$, essendo ν il solito numero intero e positivo o nullo.

Osserveremo perciò che quando si ponga per abbreviare $\bar{\lambda}=k\lambda$, $2a_0\bar{\lambda}+a_1 = 2b_0\lambda+b_1 = r$, la (54) pel caso di $\psi(z)=z^m$ ci dà subito con calcoli facilissimi:

$$(61)\quad \frac{d^p}{dz^p}\left\{z^m(a_0z+a_0\bar{\lambda}+a_1)^{-p-1}\right\} =$$
$$= \frac{k^{m-p}(-b_1+r)^{m-p}}{(2b_0)^{m-p}r^{2p+1}}\sum_0^p(-1)^s\frac{\pi(p+s)\,m(m-1)\dots(m-p+s+1)}{2^s\pi(s)\pi(p-s)}r^{p-s}(-b_1+r)^s,$$

qui il p dovendo naturalmente supporsi intero e positivo, o nullo; quindi, facendo come abbiamo detto una volta $m=\nu$, e un'altra $m=-(1+\nu)$, e valendoci di questa e delle espressioni (58) e (60) di r'_0 nei rispettivi casi, e di quella (59) di r''_∞, col porre per tutto per $2b_0$, b_1, $2b_2$, e $4b_0b_2$ i valori p_1-iq_1, p_0, p_1+iq_1,

$p_1^2+q_1^2$ rispettivamente, nel caso che siano soddisfatte le condizioni (A) del § 12, dalle formole (44) e (45) avremo ora le seguenti:

$$(62)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi}\frac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}=\\
&=\frac{(-p_0+r_1)^{\nu-p}}{\pi(p)(p_1-iq_1)^{\nu-p}r_1^{2p+1}}\sum_0^p(-1)^s\frac{\pi(p+s)\,\pi(\nu)}{2^s\pi(s)\,\pi(p-s)\,\pi(\nu+s-p)}r_1^{p-s}(-p_0+r_1)^s,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi}\frac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}=\\
&=(-1)^p\frac{(p_1-iq_1)^{\nu+p+1}}{\pi(p)\,r_1^{2p+1}(-p_0+r_1)^{\nu+p+1}}\sum_0^p\frac{\pi(p+s)\,\pi(\nu+p-s)}{2^s\pi(s)\,\pi(\nu)\,\pi(p-s)}r_1^{p-s}(-p_0+r_1)^s+\\
&+\frac{2^{\nu+p+1}}{\pi(p)\,(p_1+iq_1)^{\nu+p+1}}\sum_s(-1)^{\nu-s}\frac{\pi(p+\nu-s)}{2^{2s}\pi(s)\,\pi(\nu-2s)}p_0^{\nu-2s}(p_1^2+q_1^2)^s,
\end{aligned}\right.$$

e le altre due:

$$(63)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi}\frac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}=\\
&=-\frac{(-p_0+r_2)^{\nu-p}}{\pi(p)(p_1-iq_1)^{\nu-p}r_2^{2p+1}}\sum_0^p(-1)^s\frac{\pi(p+s)\,\pi(\nu)}{2^s\pi(s)\pi(p-s)\,\pi(\nu+s-p)}r_2^{p-s}(-p_0+r_2)2+\\
&+\frac{2^{\nu-p}}{\pi(p)\,(p_1-iq_1)^{\nu-p}p_0^{2p+1}}\sum_s(-1)^{\nu-s}\frac{\pi(\nu-p-s-1)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu-2p-2s-1)}p_0^{\nu-2s}(p_1^2+q_1^2)^s,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi}\frac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}=\\
&=\frac{(-1)^{p+1}(p_1-iq_1)^{\nu+p+1}}{\pi(p)\,r_2^{2p+1}(-p_0+r_2)^{\nu+p+1}}\sum_0^p\frac{\pi(p+s)\,\pi(\nu+p-s)}{2^s\pi(s)\,\pi(\nu)\,\pi(p-s)}r_2^{p-s}(-p_0+r_2)^s,
\end{aligned}\right.$$

dove nella prima delle (62) s'intende che dovranno sopprimersi i termini del secondo membro pei quali si avesse $s+\nu<p$, e nell'altra s'intende che la seconda somma termini a $s=\frac{\nu}{2}$ o $s=\frac{\nu-1}{2}$ secondochè ν è pari o dispari; mentre nella prima delle (63) s'intende ancora che nella prima somma del secondo membro si debbano sopprimere i termini pei quali fosse $s+\nu<p$, e la seconda somma debba tralasciarsi tutta senz'altro per $\nu\leq 2p$, e per $\nu>2p$ debba terminarsi a $s=\frac{\nu-1}{2}-p$ quando ν è dispari, e a $s=\frac{\nu}{2}-p-1$ quando ν è pari. E in queste formole per r_1 bisognerà prendere quel valore del radicale $\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}$ pel quale il rapporto $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2-p_1^2-q_1^2}$ viene ad avere la parte reale positiva, e quando si usino le formole della nota del § 8 per la stessa quantità r_1 nel caso di $\operatorname{sen}2\chi_0$ diverso da zero bisognerà prendere la espressione $\frac{b_1}{\operatorname{sen}2\chi_0}\left\{\operatorname{sen}2\tau-i\,(\cos 2\tau-\cos 2\chi_0)\right\}$ preceduta dal segno $+$ o $-$ secondochè $\operatorname{sen}2\tau$ è positivo o negativo e, nel caso di $\operatorname{sen}2\chi_0=0$

bisognerà prendere per r_1 la espressione $\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2 \cos 2(\gamma - \mu) - \beta^2 \cos 2(\delta - \mu)}\, e^{i\theta_1}$ dove pel radicale deve scegliersi il valore positivo; e per r_2 bisognerà sempre prendere il valore uguale e di segno contrario a r_1.

Nel caso poi che invece delle condizioni (A) siano soddisfatte le condizioni (B) del § 12, allora le formole (46) e (47) danno luogo esse pure a formole notevoli quando vi si faccia $f(z) = 1$. Fermandoci a quelle che si hanno dalle (47) che sono le più semplici, coll' osservare che in queste r''_∞ per $\nu \leq 2p$ è zero e per $\nu > 2p$ è dato dalla (59) che nel caso di $\nu = 2p + 1$ dà $r''_\infty = \frac{2^{p+1}}{(p_1 - iq_1)^{p+1}}$, si vede che si hanno le seguenti:

$$
(64)\begin{cases}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = 0 \quad \text{per } \nu \leq 2p, \\
\qquad = \frac{2^{p+1}}{(p_1 - iq_1)^{p+1}} \quad \text{per } \nu = 2p + 1, \\
= \frac{2^{\nu-p}}{\pi(p)(p_1 - iq_1)^{\nu-p} p_0^{2p+1}} \sum_s (-1)^{\nu-s} \frac{\pi(\nu - p - s - 1)}{2^{2s}\pi(s)\pi(\nu - 2p - 2s - 1)} p_0^{\nu-2s} (p_1^2 + q_1^2)^s \\
\qquad \text{per } \nu > 2p + 1, \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = 0, \text{ per } \nu \text{ int. e pos. quals. o zero;}
\end{cases}
$$

intendendo che, nella somma $\sum_s$ che si ha nel caso di $\nu > 2p + 1$, s debba terminare a $\frac{\nu - 1}{2} - p$ quando ν è dispari e a $\frac{\nu}{2} - p - 1$ quando ν è pari.

E in queste come nelle precedenti (62) e (63) il p naturalmente è supposto intero e positivo e anche nullo; e mentre il p_0 nelle (62) e (63) dovrà essere diverso da zero, nelle precedenti (64) potrà anche essere uguale a zero, salvo a intendere soppresso nel caso di $p_0 = 0$ il divisore p_0^{2p+1} e sostituito $p_0^{\nu-2s-2p-1}$ ai fattori $p_0^{\nu-2s}$ nella somma $\sum_s$.

Nel caso infine che siano soddisfatte le condizioni (C) del § 12, allora per $f(z) = 1$ le (48) ci daranno le formole seguenti:

$$
(65)\begin{cases}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = 0, \\
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \\
= \frac{2^{\nu+p+1}}{(p_1 + iq_1)^{\nu+p+1}} \sum_s (-1)^{\nu-s} \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+\nu-s)}{z^{2s}\,\pi(s)\,\pi(\nu - 2s)} p_0^{\nu-2s} (p_1^2 + q_1^2)^s,
\end{cases}
$$

che valgono per qualunque valore intero e positivo e anche nullo di ν, e nelle quali p_0 può anche essere zero, e p può supporsi qualsiasi reale o complesso, purchè però quando le espressioni (35) o (36) risultino nulle il p stesso se è reale, o la sua parte reale se è complesso soddisfi alle condizioni poste nel § 11 pel caso della formola (41).

Osserviamo poi che nel caso delle (49), quando $f(z)=1$, r'_0 viene dato dalla espressione (58) per $\nu \geq 1$, e si ha invece come vedemmo $r'_0 = \log b_2 + \log k$ per $\nu = 0$; e ora nelle stesse formole viene sempre a sparire di per sè il termine in $\log k$, mentre gli integrali delle forme $\int_0^{2\pi} \varphi \cos m\varphi \, d\varphi$, $\int_0^{2\pi} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi$ che vi compariscono si determinano subito con tutta facilità. Si vedrà da ciò immediatamente, cambiando per semplicizzare nella prima delle (49) il $\nu+1$ in ν, che, nel caso sempre delle condizioni (C), si hanno anche le formole seguenti:

$$(66)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\nu\varphi} \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi = -\dfrac{1}{\nu}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\nu\varphi} \log(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{\nu} + \dfrac{2^\nu}{(p_1+iq_1)^\nu} \displaystyle\sum_s (-1)^{\nu-s} \dfrac{\pi(\nu-s-1)}{2^{2s}\pi(s)\,\pi(\nu-2s)} p_0^{\nu-2s} (p_1^2+q_1^2)^s, \end{cases}$$

che valgono per qualunque valore diverso da zero intero e positivo di ν e anche se $p_0 = 0$. E si ha pure la formola:

$$(67)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(p_0 + p_1\cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi = \log\frac{p_1+iq_1}{2} - \pi i$$

che corrisponde a fare $\nu = 0$ nella seconda delle (49).

17. Le formole trovate ci condurranno a molte applicazioni interessanti. Ora osserviamo che fra quelle che si ottengono dando a ν valori particolari, sono specialmente notevoli, nel caso che si abbiano le condizioni (A), le tre seguenti:

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ip\varphi} \dfrac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \\[2ex] \qquad = (-1)^p \dfrac{\pi(2p)\,(p_1-iq_1)^p}{2^p\pi^2(p)\, r_1^{2p+1}} = (-1)^p (2p)_p \dfrac{(p_1-iq_1)^p}{2^p r_1^{2p+1}}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(p+1)\varphi} \dfrac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \\[2ex] = (-1)^p \dfrac{(p_1-iq_1)^{p+1}}{\pi(p) r_1^{2p+1}(-p_0+r_1)^{p+1}} \displaystyle\sum_0^p \dfrac{\pi(p+s)}{2^s\pi(s)} r_1^{p-s}(-p_0+r_1)^s + \dfrac{2^{p+1}}{(p_1+iq_1)^{p+1}}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} d\varphi = \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{r_1^{2p+1}} \displaystyle\sum_0^p (-1)^s \dfrac{\pi(p+s)}{2^s\pi^2(s)\,\pi(p-s)} r_1^{p-s}(-p_0+r_1)^s, \end{cases}$$

le due prime delle quali si ottengono facendo $\nu = 0$ nelle (62) e la terza si ottiene facendo $\nu = p$ nella prima delle (62) stesse; e in queste formole il p_0 dovrà essere diverso da zero.

È notevole poi che nel caso delle condizioni (B) o (C) la prima delle (64) e così la prima delle (65) per $\nu = p$ ci danno la formola:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = 0,$$

che, confrontata con quella data sopra per rappresentare l'integrale della stessa forma nel caso delle condizioni (A), fa risaltare la grande differenza che si ha nel valore dell'integrale stesso allorchè per esso si presentano le condizioni (A), o si presentano invece le condizioni (B) o (C).

E notiamo anche che nel caso delle condizioni (B) la prima delle (64) per $\nu = 2p + 1$, e $\nu = 2p + 2$ dà le due formole notevoli:

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \frac{2^{p+1}}{(p_1 - iq_1)^{p+1}}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p+2)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \frac{2^{p+2}(p+1)p_0}{(p_1 - iq_1)^{p+2}}; \end{cases}$$

e similmente nel caso delle condizioni (C) la seconda delle (65) per $\nu = 0$, e $\nu = 1$ dà le due altre:

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \frac{2^{p+1}}{(p_1 + iq_1)^{p+1}}, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(p+2)\varphi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}} = \frac{2^{p+2}(p+1)p_0}{(p_1 + iq_1)^{p+2}} \end{cases}$$

che sotto le solite condizioni valgono anche quando p è complesso; e nel caso di p intero e positivo o nullo risultano anche dalle due precedenti combinazioni q_1 in $-q_1$ e φ in $2\pi - \varphi$.

18. Le formole trovate per $p = 0$, nel caso delle condizioni (A) o (B) si riducono a concordare, salvo le notazioni differenti, con quelle date da Jacobi nel vol. 32 del Giornale di Crelle. Per gli altri valori interi e positivi di p (come devono essere sempre quando si hanno le dette condizioni (A)) o (B), alcune si trovano date sotto altra forma, ottenendole però con metodi del tutto diversi, nei trattati di funzioni sferiche, e segnatamente in quello di Heine; mentre qui risultano tutte come applicazioni particolari da uno stesso processo generale che può applicarsi in una immensità di altri casi.

Ricordiamo poi che nelle formole stesse le quantità r_1 e r_2 rappresentano i valori del radicale $\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$; e propriamente quando si hanno le condizioni (A), nel qual caso p_0 non è zero, e anche la parte reale del rapporto $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$ (§ 10) è diversa da zero, allora r_1 rappresenta quello dei due valori del radicale pel quale la parte reale del detto rapporto è positiva, e r_2 rappresenta l'altro valore (di segno contrario) per modo che quando p_0 sia reale e positivo (come del resto potrebbe sempre supporsi) per r_1 dovrà prendersi senz'altro quel valore del radicale $\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$ che ha la parte reale positiva.

Ora supponendo in particolare che p_1 e q_1 siano ambedue reali, o siano ambedue puramente immaginarî, cioè, con $p_0 = a + ia'$, sia $p_1 = b$, $q_1 = c$, o $p_1 = ib'$, $q_1 = ic'$, allora osservando che la espressione (36) si riduce rispettivamente alle seguenti $-a'^2(b^2 + c^2)$, $-a^2(b'^2 + c'^2)$ che sono zero quando $a' = 0$, o $a = 0$ e fuori di questi casi sono negative (perchè si escludono naturalmente i casi di $p_1 = q_1 = 0$), si vede subito che « quando p_1 e q_1 siano le quantità reali b e c, se p_0 sarà complesso, « o se essendo un numero reale a si avrà $a^2 > b^2 + c^2$, allora saremo nel caso delle « condizioni (A), e quindi sussisteranno sempre le formole (62), (63) e le altre più « particolari (68) nelle quali r_1 sarà il radicale $\sqrt{a^2 - a'^2 - b'^2}$ preso nel modo sopra « indicato ».

E similmente « quando p_1 e q_1 siano le quantità puramente immaginarie ib', e ic', « se p_0 avrà la parte reale diversa da zero, o se, essendo un numero puramente im- « maginario ia', sarà $a'^2 > b'^2 + c'^2$, allora saremo ancora nel caso delle condizioni (A) « e sussisteranno sempre le stesse formole (62), (63) e (68), nelle quali r_1 sarà il « radicale $\sqrt{p_0 + a'^2 + b'^2}$ preso nel modo sopra indicato » di guisa che se p_0 sarà un numero reale e positivo a $(a > 0)$ r_1 verrà ad essere il valore positivo del radicale (reale) $\sqrt{a^2 + a'^2 + b'^2}$ e potrà quindi considerarsi sempre come la distanza fra due punti. E così in questo caso le stesse formole (62), (63) e (68) daranno alcune funzioni di potenze della distanza r_1 di due punti espresse per un integrale definito; e in particolare la *prima* delle (68) *ci darà le espressioni per un integrale definito* delle potenze dispari della inversa $\frac{1}{r_1}$ di quella distanza.

E infine « se con p_1 e q_1 reali e uguali a b e c, p_0 sarà esso pure reale e uguale « ad a e si avrà $a^2 \leq b^2 + c^2$ (con che non si esclude ora che possa anche essere « $a = 0$ e quindi $p_0 = 0$), o se essendo p_1 e q_1 le quantità puramente immaginarie « ib', e ic' anche p_0 sarà un numero puramente immaginario ia' e si avrà $a'^2 \leq b'^2 + c'^2$, « allora saremo nel caso delle condizioni (C) e si avranno le formole (65), (66) e (67), « nelle prime delle quali, cioè nelle (65), il p invece di essere intero e positivo, o « nullo, come negli altri casi, potrà essere un numero reale o complesso che soddisfi « alle condizioni poste nel § 11 per la formola (41), cioè un numero tale che esso « stesso se è reale, o la sua parte reale se è complessa, sia una quantità negativa « che per $a^2 < b^2 + c^2$ o $a'^2 < b'^2 + c'^2$ può essere qualsiasi, e per $a^2 = b^2 + c^2$, « o $a'^2 = b'^2 + c'^2$ deve essere inferiore a $-\frac{2}{1}$ ». In questi casi però i valori dei logaritmi, o quelli delle varie potenze che figurano nelle nostre formole quando p non è intero devono essere fissati convenientemente in un punto.

19. Consideriamo ora in modo speciale il caso in cui, ammettendo ancora in modo generale che p_0, p_1, p_2 possano essere reali o complesse, si suppone che soddisfino alla condizione $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$.

Allora osservando che con $p_0 = a + ib$ si ha sempre $\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2} =$ $= \frac{a - ib}{a^2 + b^2}\sqrt{p_0^2 - p_1^2 - q_1^2}$. si vedrà che nelle nostre formole dovremo prendere $r_1 = 1$, o $r_1 = -1$ secondochè la parte reale a di p_0 è positiva o negativa; e quindi supponendola positiva noi prenderemo $r_1 = 1$.

Ora fermandoci dapprima sulla terza delle (68) e ricordando le formole che danno le espressioni della funzione di Legendre $X_n(x)$ per potenze di $1-x$ o di sen $\frac{\gamma}{2}$ quando, come si usa, sia fatto $x = \cos\gamma$, si vedrà che per $r_1 = 1$ il secondo membro della formola indicata non è altro che $X_p(p_0)$; dunque si può dire evidentemente che quando p_0, p_1 e q_1 siano quantità reali o complesse tali che si abbia $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$, e in p_0 la parte reale sia diversa da zero e positiva, e oltre a ciò siano soddisfatte le solite condizioni (A), allora avremo la formola:

$$X_p(p_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^{p+1}}, \tag{71}$$

che generalizza una formola nota delle funzioni X_p.

In particolare dunque ponendo in questa formola $p_0 = x$, con x reale o complesso, e colla parte reale diversa da zero e positiva, e prendendo $p_1 = \sqrt{x^2-1}\cos\varphi_1$, $q_1 = \sqrt{x^2-1}\operatorname{sen}\varphi_1$, con φ_1 costante *reale* qualsiasi, avremo la formola:

$$X_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{[x + \sqrt{x^2-1}\cos(\varphi - \varphi_1)]^{p+1}} \tag{72}$$

che è quella nota che risulta così dimostrata per tutti i valori di x pei quali siano soddisfatte le condizioni (A).

Ora se x è una quantità reale diversa da zero e positiva si ricade evidentemente nei casi considerati nel paragrafo precedente, e le condizioni (A) sono soddisfatte; e se x è complesso, osservando che le tre quantità $bc' - b'c$, $ab' - a'b$, $ac' - a'c$ che figurano nella espressione (36) delle condizioni (A) vengono a comparire nei numeratori dei coefficienti dell'immaginario nei rapporti $\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{q_1}{p_0}$, e questi rapporti nel caso nostro prendono la forma

$$tg\,\varphi_1, \qquad \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\cos\varphi_1, \qquad \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\operatorname{sen}\varphi_1,$$

per modo che il primo è reale, e gli altri due sono complessi e uno almeno di questi non è zero, si vede che nella espressione (36) il primo termine è zero e degli altri due uno almeno è diverso da zero, e quindi la espressione stessa è negativa; dunque evidentemente le condizioni (A) sono sempre soddisfatte, e la formola (72) resta così dimostrata in modo semplicissimo per qualunque valore reale o complesso di x la cui parte reale sia diversa da zero e positiva.

20. La formola (72) che è quella che si dà nei trattati di funzioni sferiche non è però la più generale fra quelle cui dà luogo la (71), perchè per giungervi noi abbiamo posto la condizione che φ_1 sia reale.

Noi troveremo ora quella espressione più generale; ma lo faremo trattando non solo il caso della terza delle formole (68) ma quello di tutte le altre formole, cer-

cando cioè colle condizioni che abbiamo, fra le quali quella di $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$, quale forma generale può darsi alla espressione $p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi$ che figura sotto gli integrali delle nostre formole e che noi indicheremo con $\Delta\varphi$; e ciò anche nei casi nei quali invece delle (A) si hanno le condizioni (B) o (C).

Osserveremo perciò che essendo al solito $p_0 = a + ia'$, $p_1 = b + ib'$, $q_1 = c + ic'$, si vede che onde si abbia $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$, dovremo avere le due condizioni:

$$(73) \qquad a'^2 - b'^2 - c'^2 = a^2 - b^2 - c^2 - 1\,, \quad aa' - bb' - cc' = 0\,,$$

e quindi se per abbreviare si pone $a^2 - b^2 - c^2 = \xi$, e s' indicano con P le espressioni (36), avremo $P = \xi(\xi - 1)$; e quindi le espressioni stesse non potranno essere zero altro che per $\xi = 1$, o per $\xi = 0$.

Esaminando subito separatamente questi due casi, si vede che per $\xi = 1$ dovrà essere $a^2 = b^2 + c^2 + 1$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$, e quindi moltiplicando si avrà:

$$a^2a'^2 = b^2b'^2 + c^2c'^2 + b^2c'^2 + c^2b'^2 + b'^2 + c'^2\,,$$

e per la seconda delle (73) si troverà l' altra $(bc' - b'c)^2 + b'^2 + c'^2 = 0$ la quale ci darà $bc' - b'c = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ e quindi anche $a' = 0$, talchè osservando che dietro questi risultati anche la condizione $a^2 + a'^2 > b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$ che figura nelle condizioni (A) riesce soddisfatta, si conclude intanto che nel caso di $\xi = 1$ saranno soddisfatte le stesse condizioni (A).

Invece per $\xi = 0$ venendo ad aversi le due $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2 - 1$ si giunge al modo stesso all' altra $(bc' - b'c)^2 = b^2 + c^2$, e quindi per potere essere ancora nel caso delle condizioni (A) dovremmo avere $b = c = 0$ e perciò anche $a = 0$, e la condizione $a^2 + a'^2 > b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$ non risulterebbe soddisfatta; talchè il caso di $\xi = 0$ corrisponde alle condizioni (C).

Avuto riguardo dunque all' essere $P = \xi(\xi - 1)$ si può dire senz' altro che:

a) saremo nel caso delle condizioni (A) se $0 < \xi \leq 1$;

b) saremo nel caso delle condizioni (B) se $\xi < 0$ o $\xi > 1$ e $bc' - b'c > 0$;

c) saremo nel caso delle condizioni (C) se $\xi < 0$ o $\xi > 1$ e $bc' - b'c < 0$ (¹), e anche se $\xi = 0$ e $bc' - b'c$ qualsiasi, purchè in quest' ultimo caso di $\xi = 0$ quando sia anche $bc' - b'c = 0$ si abbia $a^2 + a'^2 \leq b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2$; salvo, in questi casi delle condizioni (C), ad avere riguardo ai valori che nei varî casi può avere l' esponente p secondo quanto si disse al § 11, e ricordando che per la validità della (42) fa eccezione il caso di $bc' - b'c > 0$.

21. Considereremo ora separatamente ciascuno di questi casi *a*), *b*), *c*).

Incominciando dal caso *a*) osserveremo che si potrà porre $a^2 - b^2 - c^2 = t^2$ con $0 < t \leq 1$, e quindi per la prima delle (73) si avrà $a'^2 - b'^2 - c'^2 = t^2 - 1$, e potremo scrivere le due equazioni:

$$b^2 + c^2 = a^2 - t^2\,, \quad b'^2 + c'^2 = a'^2 + 1 - t^2\,,$$

(¹) Non si accenna al caso di $bc' - b'c = 0$ quando $\xi < 0$ o $\xi > 1$, perchè questo caso non può presentarsi quando $P > 0$, e per $\xi < 0$, o $\xi > 1$ si ha appunto $P > 0$.

la prima delle quali porta che quando a sia inferiore ad 1, il t non solo non dovrà superare l'unità come già abbiamo detto, ma neppure potrà superare a.

Poste ora le formole precedenti, si vede che per renderle soddisfatte, con che lo sarà completamente anche la prima delle (73), basterà prendere:

$$(74) \qquad \begin{cases} b = \sqrt{a^2 - t^2} \cos \psi_0 , & b' = \sqrt{a'^2 + 1 - t^2} \cos \psi_1 \\ c = \sqrt{a^2 - t^2} \operatorname{sen} \psi_0 , & c' = \sqrt{a'^2 + 1 - t^2} \operatorname{sen} \psi_1 \end{cases}$$

essendo ψ_0 e ψ_1 due angoli reali, e i radicali intendendoli presi positivamente; e dovendo soddisfare anche alla seconda delle condizioni (73) bisognerà che si abbia la relazione:

$$(75) \qquad \sqrt{(a^2 - t^2)(a'^2 + 1 - t^2)} \cos (\psi_0 - \psi_1) = aa' ,$$

per modo che si vede che si avranno i tre casi seguenti, cioè:

1° $t = a, \quad a' = 0, \quad \text{con } 0 < a \leq 1$;

2° $a' = 0, \quad t = 1, \quad a \geq 1$;

3° $\cos (\psi - \psi_0) = \dfrac{aa'}{\sqrt{(a^2 - t^2)(a'^2 + 1 - t^2)}}$,

intendendo in quest'ultimo caso che quando sia $a' = 0$ non debba prendersi nè $t = a$, nè $t = 1$ per non avere una formola illusoria, e per non ricadere nei casi precedenti.

Ora il primo di questi casi ci dà subito per le (74) $b = c = 0$, $b' = \sqrt{1 - a^2} \cos \psi_1$, $c' = \sqrt{1 - a^2} \operatorname{sen} \psi_1$, e il secondo ci dà $b = \sqrt{a^2 - 1} \cos \psi_0$, $c = \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{sen} \psi_0$, $b' = c' = 0$; quindi per ambedue questi casi si potrà scrivere:

$$(76) \qquad \Delta \varphi = a + \sqrt{a^2 - 1} \cos (\varphi - \psi_0) ,$$

con a diverso da zero e positivo qualunque, e ψ_0 costante reale qualsiasi; talchè si ritrova così il denominatore che figura nella espressione (72) di $X_p(x)$ per x reale e positivo, e in questo caso si ha $p_0 = a$, $p_1 = \sqrt{a^2 - 1} \cos \psi_0$, $q_1 = \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{sen} \psi_0$, $p_1 \pm i q_1 = \sqrt{a^2 - 1}\, e^{\pm i \psi_0}$.

Nel terzo caso poi, perchè possa essere:

$$(77) \qquad \cos (\psi_0 - \psi_1) = \frac{aa'}{\sqrt{(a^2 - t^2)(a'^2 + 1 - t^2)}} ,$$

con ψ_0 e ψ_1 reali bisognerà che il secondo membro non superi l'unità in valore assoluto.

Ora, se $a' = 0$ senza essere nei due casi precedenti, si vede che basterà prendere $\psi_1 = \psi_0 \pm \frac{\pi}{2}$, con chè le (74) danno:

$$b = \sqrt{a^2 - t^2} \cos \psi_0 , \quad b' = \mp \sqrt{1 - t^2} \operatorname{sen} \psi_0,$$
$$c = \sqrt{a^2 - t^2} \operatorname{sen} \psi_0 , \quad c' = \pm \sqrt{1 - t^2} \cos \psi_0,$$

e per conseguenza in questo caso sarà:

$$(78) \qquad \varDelta\varphi = a + \sqrt{a^2 - t^2} \cos(\varphi - \psi_0) \pm i\sqrt{1 - t^2} \operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)$$

con a diverso da zero e positivo qualsiasi, e con t qualunque fra 0 e 1 (0 escl. e 1 incl.) quando sia $a \geqq 1$, e con t compreso fra 0 e a (0 sempre escl.) quando sia $a < 1$. Questa espressione poi per $t = 1$ quando $a \geqq 1$, e per $t = a$ quando $a < 1$ riconduce alla (72). Per essa poi si ha $p_0 = a$, e p_1, q_1 e $p_1 \pm iq_1$ si calcolano subito come nei casi precedenti.

Se poi a' è diverso da zero, confrontando i quadrati del numeratore e denominatore nel secondo membro della (77), si vede che se si pone:

$$F(t) = (a^2 - t^2)(1 - t^2) - a'^2t^2 = t^4 - (1 + a^2 + a'^2)\, t^2 + a^2,$$

bisognerà prendere t (sempre fra 0 e 1, con $t = 0$ escl. e $t = 1$ incl.) in modo che si abbia $F(t) \geqq 0$.

Ma esaminando i segni di $F(t)$ per $t = 0$, $t = 1$, $t = \infty$ si vede che $F(0) > 0$, $F(1) < 0$, $F(\infty) > 0$; quindi dei valori di t^2 che soddisfano la equazione $F(t) = 0$ uno è inferiore ad uno, e uno è superiore ad uno, e quest' ultimo perciò è da escludersi.

Il primo poi se $a < 1$ è anche inferiore ad a^2 perchè $F(a) < 0$ mentre $F(0) > 0$; dunque se s' indica con t_0 il valore positivo di t fra 0 e 1 pel quale $F(t_0) = 0$, questo valore t_0 nel caso di $a < 1$ soddisfarà anche alla condizione di non superare a, e per t compreso fra 0 e t_0 (0 escl. e t_0 incl.) la (77) sarà sempre soddisfatta per valori reali di $\psi_0 - \psi_1$, e in conseguenza di ciò si può ora concludere che in questo caso si avrà:

$$(79) \qquad \varDelta\varphi = a + ia' + \sqrt{a^2 - t^2} \cos(\varphi - \psi_0) + i\sqrt{a'^2 + 1 - t^2} \cos(\varphi - \psi_1),$$

dove a e a' sono diversi da zero, e a è anche positivo, e t è soggetto alla condizione che se t_0 è la radice fra 0 e 1 della equazione:

$$(80) \qquad F(t) = (a^2 - t^2)(1 - t^2) - a'^2t^2 = t^4 - (1 + a^2 + a'^2)\, t^2 + a^2 = 0,$$

t sia compreso fra 0 e t_0 (0 escl. e t_0 incl.), e fra ψ_0 e ψ_1 sussiste la relazione (77).

Ma, avendosi:

$$\cos(\varphi - \psi_1) = \cos(\varphi - \psi_0)\cos(\psi_0 - \varphi_1) - \operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1),$$

la (79) può anche scriversi:

$$\varDelta\varphi = a + ia' +$$
$$+ \{\sqrt{a^2 - t^2} + i\sqrt{a'^2 + 1 - t^2}\cos(\psi_0 - \psi_1)\}\cos(\varphi - \psi_0) - i\sqrt{a'^2 + 1 - t^2}\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1)\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)$$

e da questa osservando che il coefficiente di $\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)$ per la (77) è $\mp i\sqrt{\dfrac{F(t)}{a^2 - t^2}}$,

e il quadrato del coefficiente di $\cos(\varphi - \psi_0)$ è:

$$a^2 - a'^2 - 1 + 2i\,aa' - (a'^2 + 1 - t^2)\,\mathrm{sen}^2(\psi - \psi_0) = (a + ia')^2 - 1 + \frac{F(t)}{a^2 - t^2},$$

si troverà anche:

$$(81)\quad \Delta\varphi = a + ia' + \sqrt{(a + ia')^2 - 1 + A}\,\cos(\varphi - \psi_0) - \varepsilon i\sqrt{A}\,\mathrm{sen}(\varphi - \psi_0),$$

dove ε è 1 o -1 secondo che $\mathrm{sen}(\psi_0 - \psi_1)$ è positivo o negativo e i radicali sono presi positivamente nel caso che siano reali, e presi in modo che la loro parte reale sia positiva se sono complessi: ψ_0 resta completamente arbitrario e $A = \frac{F(t)}{a^2 - t^2}$ essendo $F(t)$ il primo membro della equazione (80); e t è un numero qualsiasi compreso fra 0 e t_0 (0 escl. e t_0 incl.), essendo t_0 la radice fra 0 e 1 della stessa equazione (80).

Questa espressione (81) dà la forma più generale che possa aversi per $\Delta\varphi$ quando, come ora è supposto, a' non è zero, per il chè non può essere mai $t = 0$.

Supponendo poi che a' sia zero, si può osservare che allora la forma generale di A si riduce a $1 - t^2$ e quindi la espressione (81) si riduce alla (78) che è pure stata dimostrata rigorosamente, e che viene anche dalla (79) per $a' = 0$ perchè allora la (77) porta $\psi_1 = \psi_0 \pm \frac{\pi}{2}$, o $t = a$ per $a > 1$, o $t = 1$ per $a \geq 1$. Questa (78) poi vale anche in questi casi limiti di $t = a$ per $a < 1$, e $t = 1$ per $a \geq 1$ perchè allora si riduce alla (76); quindi poichè questi valori limiti a e 1 di t sono ancora le radici t_0 della (80) per $a' = 0$ appunto per $a < 1$, e $a \geq 1$ rispettivamente, si potrà ora senz'altro affermare che la espressione (81) di $\Delta\varphi$ è la più generale che possa aversi quando insieme alla condizione $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$ devono essere soddisfatte le condizioni (A), e ciò qualunque sia il valore reale o complesso $a + ia'$ di p_0 che può anche considerarsi come una variabile x, purchè la sua parte reale a sia diversa da zero e positiva.

E con questa espressione di $\Delta\varphi$ sviluppando $\cos(\varphi - \psi_0)$ e $\mathrm{sen}(\varphi - \psi_0)$, si trovano subito i valori delle quantità indicate in tutto quello che precede con p_1 e q_1, e si ha quindi con $p_0 = a + ia'$, $p_1 \pm iq_1 = \{\sqrt{(a + ia')^2 - 1 + A} \pm \varepsilon\sqrt{A}\}\, e^{\pm i\psi_0}$, con chè si vengono ad avere tutti gli elementi necessarî per le sostituzioni da farsi nei secondi membri delle nostre formole.

Ed è degno di nota che quando t ha il valore particolare limite t_0 radice della equazione (80), allora siccome viene ad essere $A = 0$, sì il $\Delta\varphi$ che gli elementi $p_1 \pm iq_1$ che figurano nelle nostre formole sono funzioni di p_0 soltanto, e il $\Delta\varphi$ si riduce alla forma (76) che per quanto io sappia era la sola che venisse considerata nelle formole delle funzioni di Legendre $Xp(a + ia')$, e che viene così ad essere quella espressione particolare che corrisponde al detto valore limite t_0 di t.

22. È ora il caso di fare la seguente osservazione generale.

Nei secondi membri delle formole (62) del § 16, pel caso di $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$, e delle condizioni (A), come in questo stesso caso nelle (63) quando però in queste

sia fatto $r_2 = -1$, vengono a figurare soltanto funzioni intere $P_{\nu,p}$ e $Q_{\nu,p}$ della sola p_0 (poichè anche $p_1^2 + q_1^2 = p_0^2 - 1$) divise per potenze di $p_1 + iq_1$ o $p_1 + iq_1$; e queste potenze mancano affatto nel caso di $\nu = p$ nella prima delle (62) che, come già dicemmo, corrisponde alla funzione di Legendre $X_p(p_0)$.

Ne segue che variando nella espressione (81) di $\Delta\varphi$ il parametro t entro i limiti 0 e t_0 che sopra indicammo, e variando arbitrariamente il ψ_0, per uno stesso valore di $a + ia'$ o di p_0 considerata come una variabile reale o complessa x la cui parte reale a sia diversa da zero e positiva, le funzioni $P_{\nu,p}$ e $Q_{\nu,p}$ non mutano, e di esse vengono così ad aversi infinite rappresentazioni per mezzo d'integrali definiti della forma:

$$\text{(82)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}},$$

nei quali $\Delta\varphi$ ha la espressione (81) che muta al mutare di t e di ψ_0 nel modo indicato, moltiplicati questi integrali per le potenze $(p_1 - iq_1)^{\nu-p}$, $(p_1 + iq_1)^{\nu+p+1}$ rispettivamente.

In particolare si ha sempre per $\nu = p$:

$$\text{(83)} \qquad X_p(a + ia') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}}$$

dove $\Delta\varphi$ ha la forma generale (81).

Ora in queste rappresentazioni delle nostre funzioni $P_{\nu,p}$, $Q_{\nu,p}$ per mezzo degli integrali definiti (82) la variabile x, o $a + ia'$ può essere presa comunque nel mezzo piano a destra dell'asse delle quantità immaginarie (quest'asse escl.), e per ogni valore di x i risultati precedenti ci danno i limiti 0 e t_0 (0 escl.) fra i quali dovrà essere preso il t perchè le rappresentazioni corrispondenti delle dette funzioni siano giuste.

Viceversa quando, invece di essere dato x, sia dato il t fra 0 e 1, cioè sia data la forma degli integrali definiti coi quali si vogliono rappresentare le dette funzioni, bisognerà prendere convenientemente i valori di a e a' (o di x) perchè questi integrali possano effettivamente rappresentarla; cioè bisognerà prendere in modo conveniente il campo di variabilità di $x = \xi + i\eta$ a destra dell'asse delle quantità immaginarie η (quest'asse escl.) per ogni valore speciale τ che si prenda per t fra 0 e 1 (0 escl.).

Ora evidentemente questi valori di a e a' pel valore che si sceglierà τ del parametro t saranno tutti e soltanto quelli pei quali si avrà $F(\tau) \geq 0$, ovvero $a^2(1-\tau^2) - a'^2\tau^2 \geq \tau^2(1-\tau^2)$ o anche $\frac{a^2}{\tau^2} - \frac{a'^2}{1-\tau^2} \geq 1$; donde apparisce che il punto (a, a') dovrà cadere nel campo a destra del ramo dell'iperbola $\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{\eta^2}{1-\tau^2} = 1$ che è dalla parte delle ξ positive o sul ramo stesso; dunque si può evidentemente affermare che per ogni valore speciale τ di t fra 0 e 1 (0 escl.) il campo di validità delle espressioni delle funzioni $P_{\nu,p}(x)$, $Q_{\nu,p}(x)$ per mezzo degli integrali definiti (82) corrispondenti a quel valore τ di t sarà la porzione di piano che è a destra del

ramo dell'iperbola $\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{\eta^2}{1-\tau^2} = 1$ che si trova dalla parte delle ξ positive, e su questo ramo, escluso però il punto $x = 0$ nel caso di $\tau = 1$.

Ne segue che impiccolendo il t e avvicinandolo indefinitamente a zero, senza però farlo mai uguale allo zero, il campo di validità per x della rappresentabilità corrispondente della nostra funzione $P_{\nu,p}(x)$ e $Q_{\nu,p}(x)$ s'ingrandisce sempre e tende a diventare il mezzo piano a destra dell'asse delle η (questo asse escluso), e quindi i limiti degli integrali (82) per $t = 0$ moltiplicati pei limiti di $(p_1 - iq_1)^{\nu-p}$ e $(p_1 + iq_1)^{\nu+p+1}$, cioè per le quantità $[(-1)^h(a+ia') + (-1)^k a]^{\nu-p} e^{-i(\nu-p)\psi_0}$, e $[(-1)^h(a+ia') - (-1)^k a]^{\nu+p+1} e^{i(\nu+p+1)\psi_0}$, serviranno a rappresentare le nostre funzioni $P_{\nu,p}(x)$, $Q_{\nu,p}(x)$ in tutto il mezzo piano stesso, l'asse η sempre escluso; e così in particolare si avrà la formola:

$$X_p(a+ia') = \frac{1}{2\pi} \lim_{t=0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}} \tag{84}$$

che varrà per qualunque valore diverso da zero e positivo di a e qualunque sia a'.

Notiamo esplicitamente che in questi integrali mentre si può parlare, come abbiamo fatto, dei loro limiti per $t = 0$ non si potrebbe affatto parlare dei loro valori per $t = 0$, i quali finchè p è intiero e positivo o nullo sono infiniti. E del resto per $t = 0$ invece delle condizioni (A) si hanno, come già dicemmo, le condizioni (C).

Ed è da notare pure che in tutte le condizioni che qui si hanno, come nei campi di validità che abbiamo trovato per la variabile x in corrispondenza ad ogni valore speciale τ di t, non influiscono affatto i valori di ν e di p pei quali si ha soltanto la condizione che siano interi e positivi o nulli.

23. Restano ora a studiarsi i casi b) e c) del § 20 e il loro studio si farà con un processo simile a quello testè tenuto pel caso a).

Osserveremo intanto che in questi casi, dovendo aversi le condizioni (73), e con $a^2 - b^2 - c^2 = \xi$ dovendo essere $\xi \leq 0$, o $\xi > 1$, se si porrà $\xi = \mp t^2$ avremo le due:

$$b^2 + c^2 = a^2 \pm t^2, \quad b'^2 + c'^2 = a'^2 + 1 \pm t^2, \tag{85}$$

e in queste nel caso del segno superiore di t^2 che corrisponde a quello di $\xi \leq 0$ il t potrà avere qualsiasi valore positivo o nullo; e nel caso del segno inferiore di t^2 che corrisponde a quello di $\xi > 1$, il t dovrà essere positivo e superiore ad uno; per modo che in quest'ultimo caso dovrà essere evidentemente $a \geq t > 1$, $a'^2 \geq t^2 - 1 > 0$.

Ponendo ora per semplicizzare $a^2 \pm t^2 = \delta^2$, $a'^2 + 1 \pm t^2 = \delta'^2$ e intendendo che δ e δ' siano presi positivi o nulli, si soddisfarà alle condizioni precedenti (85) col porre:

$$\begin{cases} b = \delta \cos\psi_0, & b' = \delta' \cos\psi_1, \\ c = \delta \operatorname{sen}\psi_0, & c' = \delta' \operatorname{sen}\psi_1. \end{cases} \tag{86}$$

e da queste a causa della seconda delle (73) si avrà la formola:

$$\delta\delta' \cos(\psi_0 - \psi_1) = aa'; \tag{87}$$

la quale, coll'osservare che nel caso dei segni inferiori di t^2 nelle (85) aa' non può essere zero e $\delta\delta'$ è inferiore a aa', ci mostra che questo caso che è quello di $\xi > 1$ è assolutamente da escludersi a causa della incompatibilità alle quali dà luogo.

Conviene dunque limitarsi al caso dei segni superiori nelle (85), e allora dall'essere $\delta\delta' = \sqrt{(a^2 + t^2)(a'^2 + 1 + t^2)}$ si vede che $\delta\delta'$ non potrà essere zero altro che nel caso di $a = t = 0$ il quale ci dà $\delta = 0$ e $b = c = 0$, senza che si abbia più la condizione (87) che viene soddisfatta da sè.

Avendosi poi dalle precedenti:

$$b'^2 + c'^2 = a'^2 + 1 + t^2, \text{ e quindi } a'^2 < b'^2 + c'^2,$$

se si osserva che in questo caso di $a = t = 0$, per essere anche $b = c = 0$, la espressione (36) è zero e lo è pure $bc' - b'c$, si vede che in questo caso di:

$$a = b = c = 0, \quad b' = \delta' \cos\psi_1, \quad c' = \delta' \operatorname{sen}\psi_1,$$

siamo in uno dei casi delle condizioni (C) qualunque sia a', e precisamente in quello pel quale si hanno le formole (65), (66) e (67) coll'esponente p nelle (65) numero qualsiasi, ma tale che esso stesso se è reale o la sua parte reale se è complesso sia diversa da zero e negativa. E il $\Delta\varphi$ in questo caso sarà:

$$(88) \qquad \Delta\varphi = ia' + i\delta' \cos(\varphi - \psi_1) = ia' + i\sqrt{a'^2 + 1}\cos(\varphi - \psi_1)$$

con a' e ψ_1 numeri reali qualsiansi, per modo che sarà:

$$(89) \qquad \begin{cases} p_0 = ia', \; p_1 = i\sqrt{a'^2 + 1}\cos\psi_1, \; q_1 = i\sqrt{a'^2 + 1}\operatorname{sen}\psi_1, \\ p_1 \pm iq_1 = i\sqrt{a'^2 + 1}\, e^{\pm i\psi_1}. \end{cases}$$

Fuori di questo caso essendo $\delta\delta'$ diverso da zero e maggiore del valore assoluto di aa', la (87) sarà possibile con valori reali di ψ_0 e ψ, qualunque sia t, e ci darà:

$$\cos(\psi_0 - \psi_1) = \frac{aa'}{\delta\delta'}, \quad \operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1) = \pm \frac{\sqrt{t^2 + (1 + a^2 + a'^2)t^2 + a^2}}{\delta\delta'},$$

quindi poichè le (86) ci danno $bc' - b'c = \delta\delta' \operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1)$ si vede intanto che saremo nel caso delle condizioni (B) o (C) secondo che nel secondo membro del valore di $\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1)$ sarà preso il segno $+$ o il segno $-$. Il $\Delta\varphi$ poi avrà la forma:

$$\Delta\varphi = a + ia' + \delta\cos(\varphi - \psi_0) + i\delta'\cos(\varphi - \psi_1);$$

e coll'osservare al solito che:

$$\cos(\varphi - \psi_1) = \cos(\varphi - \psi_0)\cos(\psi_0 - \psi_1) - \operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1),$$

si potrà anche scrivere:

$$\Delta\varphi = a + ia' + \{\delta + i\delta'\cos(\psi_0 - \psi_1)\}\cos(\varphi - \psi_0) - i\delta'\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1)\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0);$$

per modo che avendo riguardo al valore precedente di $\operatorname{sen}(\psi_0 - \psi_1)$ e osservando che il quadrato del coefficiente di $\cos(\varphi - \psi_0)$ è:

$$\delta^2 - \delta'^2 \cos^2(\psi_0 - \psi_1) + 2i\, aa' = (a + ia')^2 - 1 + \mathrm{B},$$

con

$$\mathrm{B} = \frac{t^4 + t^2(1 + a^2 + a'^2) + a^2}{a^2 + t^2}, \tag{90}$$

si troverà anche:

$$\Delta\varphi = a + ia' + \sqrt{(a + ia')^2 - 1 + \mathrm{B}}\cos(\varphi - \psi_0) + \varepsilon i \sqrt{\mathrm{B}}\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0) \tag{91}$$

dove ε è 1 o -1 secondochè $\operatorname{sen}(\psi_1 - \psi_0)$ o $bc' - b'c$ è positivo o negativo, e B è dato dalla formola precedente (90), e i radicali sono presi positivamente quando sono reali, e presi in modo da avere la parte reale positiva quando sono complessi.

E sviluppando $\cos(\varphi - \psi_0)$ e $\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0)$ nel valore di $\Delta\varphi$ si determineranno subito i valori delle solite quantità p_1 e q_1 e si troverà infine

$$p_1 \pm iq_1 = \left\{ \sqrt{(a+ia')^2 - 1 + \mathrm{B}} \pm \varepsilon\sqrt{\mathrm{B}} \right\} e^{\pm i\psi_0}; \tag{92}$$

e per t diverso da zero saremo nel caso delle condizioni (B) o (C) secondochè sarà $\varepsilon = 1$, o $\varepsilon = -1$, mentre per $t = 0$ saremo sempre nel caso delle condizioni (C) e in questo caso se $\varepsilon = 1$, allora, sempre con a diverso da zero, l'esponente p potrà essere un numero qualsiasi, colla sola condizione che esso stesso se è reale, o la sua parte reale se è complesso sia diversa da zero e negativa. Ed è notevole che in questo caso di $t = 0$ supposto ad es. a positivo avremo $\mathrm{B} = 1$, e

$$\Delta\varphi = a + ia' + (a + ia')\cos(\varphi - \psi_0) + i\operatorname{sen}(\varphi - \psi_0), \quad p_1 \pm iq_1 = (a + ia' \pm 1)\, e^{\pm i\psi_0}.$$

24. Ora è anche qui il caso di fare osservazioni del genere di quelle che facemmo al § 22, quando cioè si avevano le condizioni (A).

Osserviamo cioè che le (64) pel caso delle condizioni (B), e così le (65) e (66) pel caso delle condizioni (C) ci danno funzioni intere $\mathrm{R}_{\nu,p}$, $\mathrm{S}_{\nu,p}$ e $\mathrm{T}_{\nu,p}$ di p_0 e $1 - p_0^2$ o x e $1 - x^2$ espresse rispettivamente per integrali della forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi 2} e^{i(\nu-p)\varphi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(\nu+p+1)\varphi} \frac{d\varphi}{(\Delta\varphi)^{p+1}}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\nu\varphi} \log \Delta\varphi\, d\varphi - \frac{1}{\nu}$$

moltiplicati i primi per $(p_1 - iq_1)^{\nu-p}$, i secondi per $(p_1 + iq_1)^{\nu+p+1}$, e gli ultimi per $(p_1 + iq_1)^\nu$, e in questi integrali $\Delta\varphi$ è data dalla formola (91) nella quale t è un numero zero o positivo qualsiasi, e $\varepsilon = 1$ pei primi, e $\varepsilon = -1$ per gli altri, e intendendo per questi ultimi che p possa essere un numero qualsiasi reale o complesso, tale però che esso stesso se è reale, o la sua parte reale se è complesso sia negativa. Quelle poi relative a $\mathrm{S}_{\nu,p}$ valgono anche per $t = 0$ e $\varepsilon = 1$ purchè allora p sia diverso da zero e intero e negativo.

Ed è notevole che nel caso attuale delle condizioni (B) o (C) questi risultati valgono per qualunque valore zero o positivo che abbia t; e per ogni valore che si dia a t non ci sono limitazioni pel valore della variabile p_0 o x, che potrà essere qualsiasi purchè colla parte reale diversa da zero e positiva.

25. Trattato il caso di $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = 1$, si passa subito anche al caso generale di $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = R^2$ con R quantità reale o complessa qualsiasi $\varrho + i\sigma$, nella quale i segni di ϱ e σ devono essere presi in modo che la parte reale di $\frac{\varrho + i\sigma}{p_0}$ quando non è zero sia positiva.

Ponendo infatti $p_0 = Rp'_0$, $p_1 = Rp'_1$, $q_1 = Rq'_1$ avremo:

$$p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi = R(p'_0 + p'_1 \cos\varphi + q'_1 \operatorname{sen}\varphi),$$

con $p'^2_0 - p'^2_1 - q'^2_1 = 1$, e pei coefficienti p'_0, p'_1, q'_1 saremo negli stessi casi degli altri p_0, p_1, q_1 per ciò che riguarda le condizioni (A), (B), (C); quindi si può affermare che nel caso di $p^2_0 - p^2_1 - q^2_1 = R^2$, gli integrali delle nostre formole dopo moltiplicati per R^{p+1} corrisponderanno precisamente a quelli nei quali al denominatore figura la quantità $\Delta\varphi$ dei precedenti §§ 21 e 23 trovata pei rispettivi casi delle condizioni (A), (B), (C), quando in questa s'intenda che $a + ia'$ sia precisamente la quantità $\frac{p_0}{R}$ per modo cioè che rappresentando ancora p_0 con $a + ia'$, alla quantità $a + ia'$ che figura nei valori precedenti di $\Delta\varphi$ sia ora sostituita l'altra $\frac{p_0}{R} = \frac{a + ia'}{\varrho + i\sigma} = \frac{a\varrho + a'\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2} + \frac{i(a'\varrho - a\sigma)}{\varrho^2 + \sigma^2}$, e quindi ad a e a' in $\Delta\varphi$, p_1, q_1 e $p_1 + iq_1$ siano sostituiti $\frac{a\varrho + a'\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2}, \frac{a'\varrho - a\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2}$.

Così resta trattato senz'altro anche il caso di $p_1^2 + q_1^2 = 1$ nel quale alcune delle nostre formole acquistano forme particolari più semplici, perchè questo caso viene a corrispondere a quello di $R = \sqrt{p_0^2 - 1}$.

E così pure nel caso particolare della terza delle formole (68) si vede che le espressioni che si hanno dai suoi due membri quando $p_0 = a + ia'$, e $p_0^2 - p_1^2 - q_1^2 = R^2$, essendo R una quantità qualsiasi presa però in modo che la parte reale del rapporto $\frac{a + ia'}{R}$ sia diversa da zero e positiva, corrispondono precisamente a $\frac{1}{R^{p+1}} X_p\left(\frac{a + ia'}{R}\right)$, come del resto è facile vedere anche col semplice esame del secondo membro della formola stessa.

26. Nel caso che siano soddisfatte le condizioni (C) abbiamo già rilevato che, non cadendo allora le radici della $u(z) = 0$ nell'interno del cerchio, l'esponente p può avere anche valori reali o complessi che possono sempre supporsi del tutto qualsiansi salvo pochissime limitazioni relative alla sua parte reale in quei casi speciali nei quali le espressioni (35) o (36) sono zero; mentre nei casi delle condizioni (A) o (B) p è stato supposto sempre intero e positivo o nullo.

Quando poi questo esponente p si supponga diverso da zero e negativo ma intero, allora se anche $u(z)$ si annullerà entro il cerchio, o sul contorno di esso, la funzione $\frac{1}{u(z)^{p+1}}$ non cesserà per questo di essere monodroma finita e continua: quindi evidentemente anche in questo caso avremo le formole (65).

Queste formole dunque che nel caso delle condizioni (C) sussistono anche quando l'esponente p ha tanta generalità, continuano a valere anche se le condizioni (C)

non sono soddisfatte, purchè allora p sia un numero diverso da zero e negativo e intero; e su esse dunque è naturale fermarsi in modo speciale.

Ora cambiandovi $p+1$ in $-\mu$ possiamo scriverle:

$$
(93)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\mu+\nu+1)\varphi}(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^\mu\,d\varphi=0\,, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)\varphi}(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^\mu\,d\varphi= \\ \quad =\dfrac{(p_1+iq_1)^{\mu-\nu}}{2^{\mu-\nu}}\displaystyle\sum\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\nu+s+1)}{2^{2s}\pi(s)\,\pi(\nu-2s)}\,p_0^{\nu-2s}(p_1^2+q_1^2)^s\,, \end{cases}
$$

e sotto questa forma esse per μ nullo o intero e positivo varranno sempre comunque sieno presi i coefficienti p_0, p_1, q_1; mentre per gli altri valori reali o complessi di μ varranno soltanto quando siano soddisfatte le condizioni (C), con questo però che se saremo nel caso in cui le espressioni (35) o (36) sono nulle la parte reale di μ dovrà essere superiore a $-\frac{1}{2}$ quando sia $b'c-bc'=0$ e $a^2+a'^2=b^2+b'^2+c^2+c'^2$, e basterà che sia superiore a -1 negli altri casi. E in esse ν può avere qualsiasi valore intero e positivo o nullo, e nella seconda s deve arrestarsi a $\frac{\nu}{2}$ o $\frac{\nu-1}{2}$ secondochè ν è pari o dispari.

27. Una conseguenza che si trae da queste formole è la seguente.

Osserviamo che considerando insieme la prima di esse per un valore ν_0 di ν e la seconda per un valore ν_1 pure di ν gli esponenti della esponenziale (che evidentemente non possono essere mai uguali fra loro) saranno uguali e di segno contrario quando si abbia $\mu+\nu_0+1=-\mu+\nu_1$, ovvero $\nu_1=\nu_0+2\mu+1$, o $\nu_0=\nu_1-2\mu-1$, ciò che richiederà che 2μ sia un numero intero, e quindi μ sia della forma $\frac{\mu_1}{2}$ con μ_1 intero qualsiasi pari o dispari.

Allora supponendo ad es. μ di questa forma e positivo, si vede che combinando per somma o sottrazione la prima delle (93) pel valore ν_0 di ν con quella che si ha dalla seconda per $\nu=\nu_0+2\mu+1$, si ottiene la formola:

$$
(94)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^\mu\cos(\nu_0+\mu+1)\varphi\,d\varphi=
$$
$$
=-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(p_0+p_1\cos\varphi+q_1\,\mathrm{sen}\,\varphi)^\mu\,\mathrm{sen}\,(\nu_0+\mu+1)\varphi\,d\varphi=
$$
$$
=\frac{2^{\nu_0+\mu}}{(p_1+iq_1)^{\nu_0+\mu+1}}\sum\frac{\mu(\mu-1)\dots(s-\nu_0+\mu)}{2^{2s}\pi(s)\,\pi(\nu_0+2\mu+1-2s)}\,p_0^{\nu+2\mu+1-2s}(p_1^2+q_1^2)^s\,,
$$

nella quale s dovrà avere i soli valori $0, 1, 2\dots$ pei quali $\nu_0+2\mu+1-2s\geq 0$; e questa determinerà i valori degli integrali che in essa figurano per qualsiasi valore intero e positivo o nullo di ν_0.

Similmente considerando insieme nella seconda delle (93) stesse le formole che

corrispondono ai valori ν_0 e $2\mu - \nu_0$ di ν e combinandole al solito per somma o sottrazione si hanno i valori degli integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^\mu \cos(\mu - \nu_0)\,\varphi d\varphi\,,$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} (p_0 + p_1 \cos\varphi + q_1 \operatorname{sen}\varphi)^\mu \operatorname{sen}(\mu - \nu_0)\,\varphi d\varphi\,,$$

pei valori interi di ν_0 non superiori a μ, ma questi però non risultano uguali fra loro; e risultati analoghi si hanno quando μ è negativo e sempre della forma $\frac{\mu_1}{2}$ con μ_1 numero intero qualsiasi.

S' intende però che salvo il caso di μ positivo e intero, o nullo, bisogna anche richiedere che siano soddisfatte le condizioni (C); mentre nel caso di μ positivo e intero o nullo gli integrali (94) vengono ad essere tutti uguali allo zero, tali essendo i termini della somma nell'ultimo membro della (94) stessa.

RELAZIONE

letta dal Socio STRUEVER, relatore, a nome anche del Corrispondente SPEZIA, nella seduta del 3 aprile 1898, sulla memoria del prof. LIBERTO FANTAPPIÈ, intitolata: *Sui proietti minerali vulcanici trovati nell' altipiano tufaceo occidentale dei Vulsinî da Farnese a S. Quirico e Pitigliano.*

« Sino dal 1798 Giorgio Santi nel suo « Viaggio secondo nelle due provincie senesi » menzionava, nei dintorni di Pitigliano e Sorano, i blocchi minerali erratici che formano argomento della memoria del prof. Fantappiè.

« Anche più tardi, parecchi geologi e mineralisti ebbero ad occuparsi di quella interessante contrada e aggiunsero, a quella prima notizia, pregevoli osservazioni fatte sul posto e sul materiale esistente nelle varie collezioni. Ma, a vero dire, sino ad oggi si sapeva ben poco di preciso, tanto sulla giacitura di quei massi, quanto sulla estensione del giacimento, situato in una regione di non facile accesso.

« Il prof. Fantappiè, a cominciare dal 1893, potè compiere numerose escursioni ad ovest del lago di Bolsena, e frutto delle sue assidue ricerche, continuate per cinque anni, è una splendida raccolta, ricca di molte migliaia di campioni, e messa assieme con non lievi sacrifizî, non che la dimostrazione del fatto, che il giacimento, creduto sino ad oggi limitato ai prossimi dintorni di Pitigliano, Sorano e S. Quirico si estende molto a sud sin' oltre Farnese e occupa un costante, sottile orizzonte geologico nella serie dei terreni vulcanici.

« La memoria, nella quale l'autore espone succintamente i risultati dei suoi studî, incomincia con una breve introduzione contenente i risultati degli studî anteriori sulla regione; seguono poscia dei cenni geologici illustrati da tre importanti sezioni prese nei dintorni di Pitigliano e di Farnese, la descrizione delle singole specie minerali incontrate e delle loro associazioni, e finalmente un interessante confronto tra i proietti dei Vulsinî con quelli delle altre regioni della vasta zona vulcanica dell' Italia centrale e del monte Somma.

« Per la copia dei fatti nuovi messi in rilievo dall' autore, e per l' importanza che i suoi studî hanno non solo per la mineralogia della provincia di Roma, ma per la mineralogia e geologia dei vulcani in genere e, in primo luogo, per l' origine di quegli interessanti massi che sempre hanno in modo speciale attirato l' attenzione di mineralisti e geologi, la vostra Commissione propone l' inserzione della memoria nei volumi dell' Accademia.

Su i proietti minerali vulcanici trovati nell'altipiano tufaceo occidentale dei Vulsinî da Farnese a S. Quirico e Pitigliano.

Memoria del prof. LIBERTO FANTAPPIÈ

(Con appunti geologici e 3 tavole).

Tra i varî autori che si occuparono del territorio Vulsinio noterò soltanto i principali: con pochi cenni che specialmente abbiano attinenza con ciò che io dovrò dire.

Il Santi [1] nei suoi « Viaggi », notevoli per estese ed accurate osservazioni riguardo alla storia naturale in genere ed in specie per la geologia e mineralogia, è soprattutto interessante in rapporto al nostro soggetto nel suo « Viaggio secondo » ai cap. IV (*Pitigliano e sue vicinanze*) e V (*Soana e Sorano*). Egli (cap. IV, pag. 46) prima « nei campi sopra alla Madonna del Gradone » e poi « al podere del Pantano » scoprì « i famosi giacinti del Vesuvio »; pei quali propose anche al Werner il nome di *Idocrasio*, dato dall' Haüy. Descrive con molta precisione i blocchi raccolti e propone poi (cap. IV, pag. 51) il nome di *Colofonite* pei cristalli gialli che accompagnano l' idocrasio, ritenendoli differenti dai granati fin allora noti, ma da comprendersi nel genere granato.

Dopo le due località sunnotate indica (cap. V, pag. 79) il « Poggio del Tesoro » (Comune di Sorano) e cita per le raccolte abbondanti ivi fatte le solite masse di « Colofonite, idocrasi ed altre masse verdi ». Ritiene queste ultime di Olivina, scambiandola però evidentemente colla Fassaite; e cita poi de' cristalli di mica ed altri che egli considera come colofoniti allungate, contradicendo in questo caso (pag. 80) poco giustamente Haüy, che li giudica come pirosseno; perchè infatti da quel che egli dice non sembra che questi cristalli siano di melanite; ed allora pei caratteri dati da lui stesso debbono appunto essere di augite.

In ogni modo dalle interessanti osservazioni di questo distinto naturalista, risulta la scoperta di tre località a blocchi erratici nei dintorni di Pitigliano e Sorano, coi seguenti minerali: *granato*, *idocrasio*, *pirosseno* e *mica*.

Il Procaccini Ricci [2] dà notizie di varia indole; ma specialmente geologiche, accennando anche a dati mineralogici. Però per quanto dia qua e là degli accenni

[1] Giorgio Santi, *Viaggio secondo per le due provincie senesi, che forma il seguito del viaggio al monte Amiata.* Pisa, stamp. dell' almo Studio, MDCCXCVIII.

[2] Vito Procaccini Ricci, *Viaggi ai vulcani spenti nello Stato Romano verso il Mediterraneo.* Viaggio primo, tomo II. Firenze, 1814.

a « ciottoli vulcanici » (es. a pag. 171, loc. cit.) è evidente che egli non osservò i blocchi erratici che ci interessano; e ciò anche perchè quest' osservatore in generale nel suo itinerario, salvo evidentemente nelle direzioni di arrivo e di partenza, non si scostò molto dai dintorni del lago di Bolsena.

Egli dà poi al cap. VI del vol. cit. (pag. 209-226) una lista di 91 numeri di materiali raccolti; ma anche da questa non si rileva la notizia esplicita di blocchi erratici.

Il Pilla ([1]) si occupò prima della regione dal lato specialmente geologico: e considerò il lago di Bolsena come uno smisurato cratere spento, riempito dall' acqua.

Poi ([2]) dette anche cenno dei minerali ritrovati dal Santi, ad es. dell' idocrasio.

Il march. Pareto ([3]) tatteggia la regione specialmente dal lato geologico. Considera il lago di Bolsena come uno dei centri eruttivi dell' Italia media; ma pensa che il lago non si possa considerare come un cratere spento « nel vero senso della parola ». Assegna una notevole estensione ai tufi in tutto il circuito lacustre: ritenendoli del genere di quelli della Campagna (romana) come « tufi vulcanici marini ».

Accenna poi all' esistenza dell' idocrasio nello strato tufaceo superiore presso Pitigliano e del granato nero presso Sovana.

Lo Zepharovich ([4]) sotto l' indicazione Toscana ha un capitolo riguardante i blocchi di Pitigliano, il quale comprende quasi intera la pag. 43 del suo « Studio cristallografico sull' Idocrasio ». Per l' idocrasio insieme a granato, osservato nelle druse dei pezzi conservati nel gabinetto mineralogico di Vienna dà le forme }001{, }111{, }331{, }101{, }120{, }100{. Nota inoltre aggregati cristallini di idocrasio granulare. Cita l' osservazione di R. Blum riguardante l' idocrasio e l' « augite (Pirgome) », nelle druse di una massa granulare di granato, nella quale risalta il modo di aggregazione di questi minerali « in svariati contatti reciproci, vicendevolmente coprentisi e racchiudentisi, *e perciò di formazione contemporanea* ». Rileva molto accuratamente questi interessanti rapporti di cristallizzazione dell' idocrasio col granato e col pirosseno. Fa giustamente il raffronto coi minerali del Somma; mentre l' opinione dell' insigne mineralogista ([5]) riguardo alla probabilità di mettere la presenza dell' idocrasio a Pitigliano « in relazione coll' attività eruttiva del vicino (?) vulcano *trachitico* antico di monte Amiata » sta soltanto a provare lo stato delle cognizioni che si avevano nel 1864 su questo materiale.

([1]) Leopoldo Pilla, *Osservazioni geognostiche che possonsi fare lungo la strada da Napoli a Vienna, attraversando lo Stato Romano, la Toscana, la Stiria e l'Austria.* Napoli, 1834.

([2]) L. Pilla, *Breve cenno sopra la ricchezza minerale della Toscana.* Pisa, 1845.

([3]) Lorenzo Pareto, *Osservazioni geologiche dal monte Amiata a Roma.* Giorn. arcad., t. C. Luglio 1844.

([4]) V. Ritter von Zepharovich, *Krystallographische Studien über den Idokras.* (Mit 13 Tafeln). Aus dem XLIX Bande des Jahrganges 1864 der Sitzungsb. d. mat.-naturw. Classe d. Kais. Akad. d. Wissensch. besonders abgedruckt. Wien, 1864.

([5]) Loc. cit. « Das Vorkommen des Id. zu Pitigliano darf man wohl mit der eruptiven Thä-« tigkeit des nachbarlichen alten Trachyt-Vulcanes, des Monte Amiata, in Verbindung bringen, und « für denselben eine analoge Genesis vie für die Somma-Kr. annehmen ».

Il vom Rath [1] ha una splendida esposizione corografica nella quale delinea il territorio estendendosi a nord fin verso i monti dell' Amiata e di Cetona, nella parte est ad Orvieto ed Orte, nella parte ovest a Manciano e Montalto, passando pei Cimini dalla parte sud. Segna importanti rapporti tra le formazioni vulcaniche ed i terreni sedimentari eocenici e pliocenici. Rileva il carattere fisico saliente della formazione Vulsinia, che ha nel complesso l' aspetto di una grande piattaforma (plateau) quasi orizzontale: notevole per un paese vulcanico. Ha dettagliate indicazioni altimetriche in seguito alle quali rileva la tendenza di queste formazioni settentrionali dell' antico « Patrimonio » a pendere verso il sud.

Ammette tre centri craterici: uno nell'ampio recinto di Latera; uno presso Montefiascone; ed uno a monte Cigliano [2], col *Lagaccione* di tipo maarico, presso l'antica Bisenzio. In seguito ai dubbî che può lasciare per essere considerato come cratere il gigantesco recinto di Latera fa un interessante confronto col *Gunung Tengger* di Giava (pag. 285, loc. cit.), basandosi sugli studî dell'autorevole Junghuhn. Considera poi il lago di Bolsena come dovuto ad avvallamento.

Nota la località detta la « Buca dei fiori » nei pressi della quale, e specialmente a nord nella località detta la « Corte del re, » si trovano « dei proietti notevoli, formati di aggregati granulari cristallini ». Nella nota sommaria dei più importanti tra questi proietti figurano i seguenti.

« Blocchi di *granato giallo* e giallobruno, parte con *augite verde*, parte con *vesuviana* bruno verdastra, od anche questi tre minerali assieme ». E qui dà per il granato come forma dominante il *rombododecaedro*, accompagnato dal *leucitoedro* e dall' *esacisottaedro* }431{. Per la vesuviana dà la *forma fondamentale* }111{ unita ai *prismi* }110{ e }100{ ed alla *base*. Inoltre rileva l' analogia di questi proietti con parecchi pezzi del Vesuvio e dei monti Albani, per quanto queste formazioni toscane abbiano un abito particolare.

« Blocchi di *sanidino*, *Haüyna*, *Magnetite*, *Augite nera*, *titanite gialla*: che non si distinguono da certi minerali di Laac ».

« Blocchi nei quali ai minerali nominati si accompagna la *leucite* (?), la *mica nera* e la *melanite* ». Finalmente nota nel tufo dei cristalli sciolti di *granato bruno* e di *augite nera* « nella forma ordinaria ».

Però è notevole il vedere come egli stenti a rendersi conto della provenienza di questo materiale, uscendo (pag. 279, loc. cit.) in questa espressione: « Il luogo di origine di questo materiale erratico che è qui accumulato in grande quantità è tanto più meraviglioso inquantochè nei prossimi dintorni non esiste un cratere od un cono detritico ».

Il prof. D' Achiardi nei suoi noti studî sulla mineralogia della Toscana [3] parla

[1] G. vom Rath, *Geognostisch-mineralogische Fragmente aus Italien*, II Theil. Abdruck a. d. Zeitschr. d. Deutschen geologischen Gesellschaft Jahrg. 1868. — VI. Die Umgebungen des Bolsener Sees. Specialmente dalla pag. 265 a 292.

[2] Il vom Rath dice: « Monte Gigliano » (pag. 272, loc. cit.); ma deve dire « Cigliano » come sulla carta da 1 a 50,000 dell' Istituto geografico militare italiano.

[3] Antonio D'Achiardi, *Mineralogia della Toscana*. Studî. Pisa, vol. I, 1872; e più specialmente vol. II. 1873.

ripetutamente dei blocchi erratici delle località di « Pantano », « Madonna del Gradone », « Buca dei fiori », « Corte del re », « Casone », « Poggio del tesoro », nella descrizione dei varî minerali [1]: le quali località sono tutte nei dintorni di Pitigliano e Sorano; e nominate dal Santi e dal vom Rath.

Dà per il pirosseno dei blocchi a massa verde e per quello in unione con idocrasio le forme }110{, }101{, }$\bar{1}$01{, }100{, }010{ unite a « quelle di tre prismi obliqui »: e comprende il minerale sotto il gruppo « Edembergite e Diopside ».

Per il granato giallo cita le forme }110{, }211{, }431{; insieme a delle analisi secondo le quali ritiene questo granato giallo intermedio alla grossularia ed alla andradite, « e perciò analogo a quello di Pitkäranta ». Cita anche la melanite come sparsa entro e sopra i tufi vulcanici.

Per l'idocrasio dà le forme }001{, }111{, }331{, }113{, }210{, }310{, }311{, }101{, }110{, }100{: in tutto *dieci*. Nota che furono tutte riscontrate anche in combinazione su un solo cristallo; mentre dà come combinazione ordinaria quella delle forme }001{, }110{, }100{, }110{.

L'illustre autore parla del « Granato di Pitigliano » anche in un altro suo scritto d'indole teorica [2].

Lo Stoppani [3] scrisse sulle formazioni Vulsinie specialmente dal lato geologico. Egli ritiene il lago di Bolsena effettivamente come un vasto cratere fortemente ampliato dalle ultime esplosioni ed anche dall'erosione; ed aggiunge a quelli prima considerati come centri eruttivi il monte Rado, presso Bagnorea.

Il colonn. Verri [4], che ha il merito di avere accompagnato con varie osservazioni una raccolta di materiale che egli dette poi a studiare al prof. Ricciardi [5] dal lato chimico ed al prof. Klein [6] dal lato petrografico, ha anche delle considerazioni geologiche generali secondo le quali in fondo è in accordo col vom Rath nell'ammettere come conseguenza di un avvallamento la conca lacustre di Bolsena. Tra le altre vedute si fa notare quella [7] secondo la quale egli verrebbe ad ammettere che pei tufi « si tratti di eruzioni fangose »; ma non già come « fanghi proiettati dai crateri », bensì per « eruzione mediante versamento dai crateri ».

Tra gli ultimi poi che scrissero sui Vulsinî, oltre il Moderni [8], il De Stefani [9]

[1] V. loc cit., vol. I, *magnetite* (pag. 145); e poi, vol. II, *titanite* (pag. 12), *ortose* (pag. 41 e 42), *pirosseno* (pag. 77 e 78), *granato* (pag. 134 e 135), *auina* (pag. 137 e 138), *vesuviana* (pag. 138 e 139), *biotite* (pag 171).

[2] A. D'Achiardi, *Su di alcuni minerali toscani con segni di poliedria*. Estr. dei proc. verb. della S. T. di Sc. nat., adun. 12 marzo 1882.

[3] A. Stoppani, *Corso di Geologia*, vol. III. Milano, 1873.

[4] Antonio Verri, *Osservazioni geologiche sui crateri Vulsinî*. Estr. dal Boll. della Soc. geol. ital., vol. VII, fasc. 1 Roma, 1888..

[5] Ricciardi, Gazz. chim. Ital. Palermo, 1888.

[6] C. Klein, *Petrographische Untersuchung einer Suite von Gesteinen aus der Umgebung der Bolsener Sées*. Neu. Jahrb. B. Bd. VI, 1-35, 1889.

[7] Loc. cit., pag. 25.

[8] P. Moderni, *La trachite ed il tufo di Rispampani presso Toscanella*, con una tavola. Estr. dal Boll. del R. Com. Geolog., anno 1889, n. 1-2.

[9] C. De Stefani, Boll. Soc. Geolog. Italiana, X, 1891. Roma.

ed il Bucca ([1]), deve esser notato il Washington ([2]), il quale ha contribuito allo studio delle formazioni vulcaniche tirrene con una serie di notevoli studî petrografici eseguiti su materiale da lui stesso raccolto e accompagnati da cenni topografici accurati e da pregevoli analisi chimiche.

Io, fin dalla mia venuta in Viterbo (1890), per quanto avessi cominciato le mie ricerche dal prossimo Cimino, avevo stabilito di intraprenderne anche nei Vulsinî, ed eventualmente anche nei Sabatini (benchè questi ultimi fatti oggetto di studî dal mio illustre maestro prof. Strüver) ([3]) non foss' altro a scopo comparativo.

Nel 1893 il mio egregio amico ed ex-discepolo sig. Enrico Gentili di Farnese mi mostrò un bel blocco di idocrasio della località « Pian di Sala » presso al detto paese, per cui fui portato a dar forma concreta al mio piano generico di studî, con attive ricerche anche pei Vulsinî: come ho già avuto occasione di accennare in altri miei precedenti lavori.

A questo punto anzi colgo l'occasione di fare speciali ringraziamenti non solo al mio detto ex-discepolo sig. Gentili, ma anche a tutta la sua cortesissima famiglia, che nelle ripetute escursioni in quelle splendide quanto trascurate contrade mi fu larga di ospitalità signorile, dandomi anche spesso cavalcature e indicazioni di persone che mi potessero occorrere o di luoghi che mi interessassero. Debbo anche ringraziare il sig. cav. Bernardino Martinucci di Pitigliano per indicazioni di luoghi e per avermi permesso di prendere dalla sua libreria l'ormai rara opera del Santi; e finalmente debbo presentare distinti ringraziamenti al mio illustre maestro prof. G. Strüver per avermi concesso di attingere largamente per la letteratura alla sua ricchissima biblioteca privata, non meno che per avermi dato agio di osservare ripetutamente la splendida collezione del materiale vulcanico tirreno da lui riunita nel Museo mineralogico dell' Università di Roma.

Venendo alle mie ricerche mi permetto di segnarne brevemente i limiti.

A dir vero non ho mai avuto alcuna intenzione di venire ad aggiungere a quelle esistenti delle vedute geologiche generali; perchè la non breve permanenza in regioni vulcaniche mi ha insegnato quanto si possa esser facilmente soggetti a cambiare opinione quando non ci si sia prefissi, come scopo diretto, la ricerca geologica con una serie di raffronti minuti e pazienti, condotti con una grande continuità. Io invece, occupato anche per lunghe ore nell' insegnamento, ebbi per scopo principale le ricerche mineralogiche, che ognuno sa quanto siano assorbenti. Tuttavia essendo state molto

([1]) L. Bucca, *Studio petrografico sulle trachiti leucitiche del lago di Bolsena*, Riv. di Miner. e Crist. Ital., vol. XII. Padova, 1893.

([2]) Henry S. Washington, *Italian Petrological Sketches*, I. Repr. fr. the Journ. of Geol., vol. IV n. 5, July-August. Chicago, 1896.

([3]) Cito il suo lavoro pei raffronti che si possono istituire riguardo a questi interessanti proietti dei varî vulcani mediterranei. Anzi per questa considerazione ho cercato, compatibilmente colle necessità del mio lavoro, di non allontanarmi troppo dallo schema della sua interessantissima Memoria, che è precisamente: G. Strüver, *Contribuzioni alla mineralogia dei Vulcani Sabatini.* — Parte I.: *Sui proietti minerali vulcanici trovati ad est del lago di Bracciano.* Atti della R. Acc. dei Lincei, ser. 4ª, vol. I, 1885.

estese queste mie ricerche e ripetute per circa cinque anni, ora, appunto allo scopo di mettere i risultati mineralogici in relazione colle condizioni geologiche, credo non inutile di premettere a tali studî mineralogici, alcuni cenni geologici sui dati da me più sicuramente osservati, specialmente riguardo alla zona che sembra poco o punto battuta dai precedenti osservatori (1); dimodochè insieme a quelli possano servire come contributo allo studio di dettaglio occorrente per le ultime conclusioni sulla geologia di questa nostra importante regione.

Cenni geologici.

Il geologo che visiti questa notevole regione non può fare a meno di rimaner colpito dal particolare aspetto di questi paesi, che come Farnese e Pitigliano, in modo tipico, e poi meno spiccatamente anche Sovana, Sorano ed Orvieto, si mostrano con aspetto pittoresco posati su un gran masso di tufo lapideo che forma una base isolata con pareti tagliate a picco, la quale a sua volta si appoggia su strati tufacei meno consistenti, che sembrano in certo modo difesi da questa e dai fabbricati contro l'erosione: e nello stesso tempo non può evitare l' impressione di una grande uniformità, che anche il profilo generale dei paesi stessi e la natura delle adiacenze rivelano nella formazione geologica della regione che li comprende.

Questa regione, interessante anche dal lato pittoresco, si presenta con un aspetto molto caratteristico, specialmente quando si cerchi di completare con un colpo d'occhio un po' esteso le osservazioni fatte in dettaglio; come ad es. salendo al punto geodetico di Monte Becco (quota m. 556) a lato della strada tra Pitigliano e Farnese presso i ruderi della dogana prima esistente all' antico confine Romano.

Qui l' occhio spazia in una veduta incantevole: nella quale si delinea abbastanza nettamente la fisonomia dell' intero territorio. La potente formazione tufacea vista nel complesso assume l' aspetto di un esteso altipiano, che ha quasi uniforme pendenza verso occidente, con maggiore accentuazione da nord-est a sud-ovest. A nord torreggia nudo il lontano picco di Radicofani; e sorge a nord-ovest imponente la massa dell'Amiata colle montagne di S. Fiora, che si continuano nelle più vicine appendici meridionali di Castellazzara, di Monte Vitozzo e dell' Elmo. Chiudono ad occidente l' ampia platea tufacea, a guisa di anfiteatro, i selvosi monti di Castro, che portano sulla loro vetta Manciano; e da questi, coll' interruzione di Montalto, che lascia scorgere il mare, sempre sulla linea littoranea si passa a quelli di Canino verso sud-ovest. Ad est la grandiosa conca di Latera che oltre questo di Monte Becco comprende i coni eruttivi di Montione, Monte Spignano, Monte Calveglio, e che nel rilievo sud-est del suo arcuato ciglione ha Valentano: oltre il quale l' aria biancheggiante di vapori, nel mattino, dà segno del magnifico specchio del sottostante lago Vulsinio. Giù in basso

(1) Anche il vom Rath, che nei suoi scritti mostra, rispetto alla generalità degli altri autori, di aver voluto comprendere la regione in una più ampia cerchia di osservazioni, rivela nei dettagli l' abitudine quasi comune di limitare le osservazioni a delle distanze non molto grandi dalla corriera postale: salvo rare punte fatte qua e là, come a Latera. Infatti mentre egli accenna con molta precisione a dati che si possono osservare ai lati della via postale da Orvieto fin anche a Manciano, tace egli pure di Farnese e della interessante regione circostante, ove si trova una delle più estese formazioni laviche osservabili, qual' è quella del « Lamone ».

sotto Monte Becco, verso est, l'elegante laghetto di Mezzano di tipo maarico; mentre dalla falda opposta di questo cono (Monte Becco) a mantello detritico, coll'appendice di Monticchio sotto forma di un piccolo cumulo di scorie bruno-rossigne, comincia la rocciosa macchia del « Lamone » che si estende verso sud-ovest, costeggiata a sinistra dal fiume Olpeta, fin sotto Farnese verso le rovine di Castro: per una lunghezza di oltre 9 chilometri su una larghezza varia da 2 a 4 chilometri.

Quest' orrida selva che risulta di grossi cumuli di massi rocciosi costituiti da una lava scura scoriacea ed indicati nel luogo col nome di « murcie », ha nel mezzo il rilievo tufaceo di Simunte ed a destra la splendida lingua boscosa di Montefiore.

Questa imponente formazione lavica del Lamone è la sola che si mostri con una relativa continuità: tutto il resto della regione, che ha nell' insieme l'aspetto di un falsopiano, si mostra poi fittamente solcato da profondi valloni *di erosione*, chiusi spesso da fianchi tagliati a picco nel tufo, entro il quale gli Etruschi scavarono spesso le loro ultime dimore, come si vede specialmente presso il morto paese di Sovana.

L' ampia platea tufacea occidentale dei Vulsinî si può dire una regione classica per l'erosione. Questa è oltremodo interessante a Sorano ove di faccia al paese, appoggiato in gran parte al fianco tufaceo meridionale della valle della Lente, si mostra il tufo lapideo, che per l' isolamento tende, come (meno decisamente) anche ad Orvieto, a fendersi in grandi pilastri verticali dando l' impressione di una separazione per consolidamento, mentre con tutta probabilità queste fenditure verticali, che all' insieme delle masse danno l'aspetto fantastico di gigantesche rovine, son dovute soltanto a mancanza di resistenza nei materiali sottostanti, che, costituiti da sovrapposizioni di tufi poco solidi od altri materiali detritici ed erosi essi pure, vengono poi ad appoggiarsi sugli instabili sedimenti terziarî.

Questi ultimi spingono ogni tanto le loro apofisi al disopra del potente « plateau » vulcanico, come si osserva pel Monte Sorano presso S. Quirico e pel Monte S. Giovanni presso Ischia di Castro, i quali risultano da arenarie e schisti eocenici: a mostrare che il materiale vulcanico trovava la regione in stato di denudazione avanzata, giacchè come è stato rilevato da varî osservatori non mancano in alcuni punti le formazioni plioceniche.

Le potenti formazioni di travertino frequentemente sparse qua e là, in intima relazione con sorgenti termali, stanno a mostrare che ebbero poi modo di agire, forse a più riprese e per lunghi periodi di tempo, anche le manifestazioni secondarie dell' attività vulcanica. Queste si mostrano anche con *fenomeni di alterazionc* del genere di quelli della Tolfa, dovuti ad *emanazioni locali*, come si vede ad es. nel materiale tufaceo che affiora nel fosso di S. Paolo in Vallecupa (Farnese) presso al « passo delle Fornaci » verso il territorio d' Ischia di Castro. Materiale dal quale si hanno liberi dei bei frammenti di sanidino chiaro, appunto per alterazione delle pomici che li includevano.

Ora è questa regione, caratterizzata specialmente dalla presenza di un forte banco di tufo lapideo che serve di imbasamento ai varî paesi in essa sparsi, che è stata da me percorsa in largo ed in lungo più volte con diversi itinerarî principalmente dai dintorni di Farnese ed Ischia di Castro a Pitigliano e S. Quirico presso Sorano, traversando in varî sensi il Lamone e poi le regioni soprastanti ad est, per una superficie di circa 80 chilometri quadrati, non contando le gite di recognizione intorno alla conca lacustre Vulsinia, a cominciare da Viterbo tutt' all' intorno fino ad Orvieto.

Qui per mostrare la sorprendente uniformità che si riscontra nella costituzione fisica della regione, salvo variazioni di secondaria importanza, credo non inutile l'esporre il raffronto tra una sezione, *schematica*, da me presa nelle così dette « coste » (fianchi) della « cava » (¹) di S. Lorenzo presso Pitigliano, salendo per la via di Farnese fin verso Poggio Patarrino in regione Pantano (v. tav. I) ed altre due sezioni parimenti schematiche (v. tav. II e III) prese nei dintorni di Farnese in modo che, all' infuori di variazioni locali, facili a riscontrarsi in tutte le formazioni un po' estese, si possono completare in senso altimetrico: per la corrispondenza che è possibile stabilire per mezzo di una serie di sovrapposizioni di materiali eruttivi, abbastanza definite. Però a questo proposito debbo avvertire che la potenza dei varî materiali, la quale si mostra con variazioni più o meno sensibili nei varî luoghi, è stata da me segnata approssimativamente soltanto pei punti ove le formazioni si mostrano a testate più nette. Perciò la somma di queste potenze non corrisponde alle differenze altimetriche che si possono riscontrare nella linea di sezione: perchè per sodisfare a tali esigenze altimetriche bisognava tener conto (senza un grande profitto per il nostro soggetto) della pendenza già notata nell' insieme della formazione e soprattutto della potenza media di ciascuna di queste. La corrispondenza altimetrica si ha con sufficiente approssimazione soltanto nella sezione della tav. I, che è di una classica regolarità. D' altra parte chi è abituato ad osservazioni stratigrafiche sa quali sono i limiti che possono raggiungere le variazioni locali anche in terreni d' indole decisamente sedimentaria. Qui si tratta di stratificazione in formazioni vulcaniche: ed occorre pensare alle commozioni del suolo proprie di queste regioni ed alle modificazioni delle superfici libere durante gli intervalli eruttivi. La corrispondenza delle formazioni per ciò che riguarda la loro natura e la loro successione è in ogni modo significantissima dallo « strato a blocchi erratici » (*d*, delle tav.) fino allo strato segnato nelle tavole con β: in modo meno deciso si riscontra la corrispondenza negli strati inferiori come ε. Certe formazioni, come quella a pozzolane, sono più incerte; ma è da notare che le pozzolane si presentano coi caratteri di formazione parziale ed in certo modo accidentale nella maggior parte dei centri vulcanici.

La formazione che può esser presa come termine fondamentale di riferimento per tutta la regione è, come ho già accennato, il *tufo lapideo* (*a*, delle tav.), il quale è costituito da una massa dura di color giallastro scuro fittamente macchiata da piccole scorie e brecciole varie, tra le quali spiccano alcune di color grigio finamente punteggiate di bianco, che sembrano appartenere ad una roccia leucitica a minutissima grana; ma caratteristici di questo tufo si possono ritenere soprattutto dei brillanti cristalli di *augite* abitualmente nerissima che raggiungono spesso la lunghezza di oltre un centimetro e si presentano per solito con forme regolari nella combinazione ordinaria, insieme a lamine di *mica* nera che raggiungono non di rado varî centimetri di estensione. *Derivano dal disgregamento di questo tufo tutti i cristalli di augite nera della combinazione ordinaria un po' grandetti e molto lucenti che si trovano sciolti* in varie località, nei terreni sovrapposti a questo tufo: ed hanno l' impronta di formazione per origine pneumatolitica.

(¹) Come già notava il Santi (v. loc. cit.), nei dintorni di Pitigliano indicano col nome di « cave » le vie incassate in stretti tagli di tufo, e che risultano appunto dal continuo incavamento dovuto al consumo del tufo in seguito al passaggio ed alle necessarie riaccomodature.

Con questo tufo lapideo non è da confondersi un altro che ha una certa consistenza, ma è molto più leggero e meno tenace, ed è contraddistinto nella località, specialmente a Pitigliano, col nome di *tufo dolce* (α, delle tav.). Ha per caratteri un color giallino pallido ed una grande uniformità di aspetto: essendo appena macchiato qua e là da qualche frammento di pirosseno o da qualche minuta brecciola. Ha poi una posizione decisamente definita, essendo immediatamente sottostante al tufo lapideo suddetto.

Notevole poi tra gli strati sovrastanti al solito tufo lapideo (a) è un aggregato friabile a sottili strati di minute brecciole e lapilli (c, delle tav.), che in sezione si mostra con zone variopinte di un aspetto caratteristico. Tra queste sono notevoli alcune che risultano da croste ondulate, le quali lo lasciano facilmente riconoscere in varî punti del territorio.

Per l'intelligenza delle tavole (nelle quali la rappresentazione è accompagnata da una dettagliata leggenda) e per lo scopo impostomi, ho poche cose da aggiungere riguardo a questi materiali.

Debbo però avvertire che nell'intera regione, ma specialmente a Farnese, col nome di *renone* si indica generalmente del materiale eruttivo sabbioso più o meno omogeneo, il quale può senz'altro presentarsi sciolto, ed è allora il renone tipico; oppure può presentarsi più o meno leggermente cementato, ma con tendenza evidente a disaggregarsi, ed allora si dice *renone forte*. Invece i materiali eruttivi che si presentano con un aspetto un po' indeciso per la mescolanza di parti poco definite, e sono in generale dei tufi friabili con inclusi varî o dei detriti quasi sciolti, vengono indicati nella regione e specialmente a Pitigliano col nome di *materio*; ma non son sempre ben distinti, specialmente riguardo ai renoni, dalla gente del luogo. Io ho creduto bene di adottare queste denominazioni nelle tavole perchè possono servire a riscontri in posto ed anche perchè sono comode per distinguere con indicazioni brevi le varie formazioni di questi materiali.

Finalmente debbo dire di un interessante materiale che nella regione è indicato col nome di *enfero* od *enfro*; ed anche *nenfro*, specialmente verso Viterbo. È una roccia pesante di color grigio cenere o grigio scuro tendente ad una specie di rossigno che richiama talvolta il lilla. Il sig. Moderni in una sua Nota [1] solleva una importante questione sia riguardo alla costituzione di questa roccia, sia riguardo alla sua giacitura nella regione Vulsinia.

A dir vero osservando la roccia a colpo d'occhio, specialmente quando è staccata di fresco, si riceve l'impressione di una roccia trachitica con aspetto che sembrerebbe accennare alla struttura fluidale ed in genere ai caratteri delle rioliti. Secondo gli studî del Bucca, del Klein e del Moderni è data come un tufo: ed il fatto che da me è stata ritrovata con una estensione non indifferente in varî punti della regione può avvalorare quest'idea; ma avrei verificato volentieri i pezzi da me raccolti per vedere se corrispondevano esattamente a quelli studiati, perchè il risultato degli studî petrografici può dipendere anche dal punto ove è stato staccato il campione; però con mio dispiacere lo stato del mio laboratorio al Liceo di Viterbo non mi ha ancora concesso di intraprendere studî di questo genere [2].

[1] V. loc. cit.

[2] Come per questa roccia è per varie altre; come ad es. l'interessante lava scura del Lamone, che all'aspetto si mostra come un basalto, con cristalli distinti di augite e di olivina.

Invece il ritrovamento dell' « enfro » nelle formazioni sovrastanti al tufo lapideo nei dintorni di Pitigliano ed in quelli di S. Quirico [1] risolve decisamente la questione della pertinenza di questa roccia alla regione Vulsinia.

Però dopo l' indicazione del Moderni, secondo il quale la roccia a Rispampani si trova tra sedimenti eocenici ed i tufi, mi lascia un po' perplesso per il giudizio cronologico il fatto che nei dintorni di Pitigliano si trovi tra materiale detritico *a coprire* gli strati tufacei superiori. Perchè è difficile per le formazioni detritiche dei vulcani e per quelle non molto resistenti all'alterazione come sembra la nostra, specialmente se un po' periferiche, lo stabilire in quale misura possono avere agito le varie cause di sconvolgimento e specialmente le acque nell' alterare i rapporti cronologici delle varie formazioni.

In ogni modo ci si trova dinanzi ad un caso notevole per l' estensione che questa roccia mostra nella regione Vulsinia e per le relazioni che può venire ad assumere colle altre formazioni.

Riguardo agli studî da me intrapresi è però di capitale importanza il fatto che si trovi in posizione definita tra gli strati tufacei superiori su una zona quasi uniforme il conglomerato (*d*, delle tav.) che racchiude i classici « blocchi erratici » già scoperti dal Santi e poi qui nuovamente studiati specialmente dallo Zepharovich, dal vom Rath e dal D' Achiardi. Le località per le quali con maggiore o minore evidenza, secondo le condizioni locali, è stata da me determinata la continuità del giacimento dai punti già noti presso Pitigliano e Sorano fino oltre Farnese, sono le seguenti:

1. « Pian di Sala ». Farnese.
2. « S. Maria di Sala ». Farnese.
3. « Valle della Giacchetta », presso la chiesa di S. Maria di Sala. Farnese.
4. « Valle della Botte », sotto Pian di Sala. Farnese.
5. « Campo del Carca », nella tenuta delle Cavalline. Farnese.
6. « Prati ». Farnese.
7. « Poggio del Corgnolo ». Farnese.
8. « Oratorio delle Anime del Purgatorio », sopra al ponte di Sala. Farnese.
9. « Valle del Pisciaretto », al fosso di S. Paolo, presso Vallecupa. Farnese.
10. « Casella », presso Vallecupa. Farnese.
11. « Pian della Bertina », in Vallecupa. Farnese.
12. « Po' Corvo » (Poggio del Corvo), in Vallecupa. Farnese.
13. « Piani stretti » sotto le « Coste della Vaggiovana ». Farnese.
14. « Verghene » sotto le « Coste della Vaggiovana ». Farnese.
15. « Pianelle », presso il Verghene. Farnese.

[1] L' « enfro » fu da me trovato specialmente in affioramenti su una stradella che da S. Quirico, passando sotto Monte Sorano e Monte Citerno va ai ruderi della chiesuola di S. Maria dell'Aquila. Il primo affioramento fu notato sulla stradella di faccia alla capanna di Monte Citerno, e questa roccia seguita poi per la strada che va a S. Maria dell' Aquila: si trova inoltre con una potenza di qualche metro sul cappellaccio del tufo giallo nella valle soprastante a S. Maria dell'Aquila. È anche spesso associata con una roccia leucitica detta nel luogo (S. Quirico) « Palombino » (ed a Pitigliano, « occhio di pulcino ») e che è estesa in tutta la « contrada delle Povere ». In quest' ultimo modo si trova spesso nei dintorni di Pitigliano.

16. « Castellare », presso il Verghene. Farnese.
17. « Forma ». Farnese.
18. « Naiella ». Farnese.
19. « Grotte del Gottimo », sotto il « Campo alla Villa » (nella macchia del Lamone) dalla parte di Farnese.
20. « S. Pantaleo », presso il « Campo alla Villa », nella macchia del Lamone. Farnese.
21. « Coste fene », nella macchia del Lamone, al di là del « Campo alla Villa », partendo da Farnese.
22. « Pianacce », nel Lamone. Farnese.
23. « Punton di Giobbe », presso « Pian di Lance ». Farnese.
24. « Montefiore », presso la tenuta del Voltone all'antico confine Romano. Farnese.
25. « Poggio Cavalluccio », presso il fosso della Nova. Pitigliano.
26. Fontanile di Rimpantoni, presso il Voltone. Pitigliano.
27. « Pian di Valle ». Pitigliano.
28. « Poggio Patarrino », nella « Regione Pantano ». Pitigliano.
29. « Contrada Casone ». S. Quirico.
30. Presso il fosso del Traetto. S. Quirico.
31. « Buca dei Fiori », in « Contrada delle Povere ». S. Quirico.
32. « Corte del Re », in « Contrada delle Povere ». S. Quirico.
33. « Poggio della Rotta », a lato di una traversa tra la via di Sorano e la via di Pitigliano. S. Quirico.
34. « Poggio dei tre castagni ». S. Quirico.
35. « Poggio Sassi bianchi ». S. Quirico.
36. « Contrada Pozzacce ». S. Quirico.

Fin dalle prime ricerche dovetti notare che i « blocchi minerali » si trovavano con una certa abbondanza e coi caratteri di materiale in posto ad una certa altitudine, che era poco superiore ai 400 metri a « Pian di Sala » e nel non lontano « Campo del Carca » con un leggero aumento verso S. Quirico mentre mostrava una diminuzione verso Pitigliano: le località che si trovano notevolmente più basse di questa quota si presentano ordinariamente come fianchi più o meno ripidi di vallate ove i blocchi debbono essere stati rotolati in seguito all' erosione. Questa osservazione è, per così dire, controllata dal fatto. Perchè dopo avere osservato le prime località di « Pian di Sala » e del « Campo del Carca » ed essere stato a riscontrare quelle classiche di Pitigliano, scoprii buona parte delle altre per induzione.

Ora, a mio avviso, questo mantello quasi uniforme di proietti minerali su una così estesa regione ha una notevole importanza anche dal lato geologico.

Io ho già detto che non intendo entrare in questioni generali che richiederebbero ricerche apposite; ma non posso astenermi da qualche osservazione.

La grande uniformità, sorprendente anzi per formazioni vulcaniche, dei varî materiali eruttivi quale può essere mostrata da sezioni facili ad osservare in varî punti (v. le tavole), e specialmente da questa formazione a blocchi erratici, unita a quella del

tufo lapideo, accenna nello stesso tempo all' origine da un poderoso centro eruttivo, fortemente predominante sugli altri nel distretto vulcanico, ed accenna anche ad una estesa causa di uguagliamento in queste formazioni.

Quando si considera che gli aggregati di lapilli e brecciole (*c*, delle tav.) a croste ondulate e sezioni zonate, che hanno un così grande significato nelle formazioni tipiche di Pitigliano e di Farnese, risalgono al di qua di questo fin sotto Valentano, mentre al di là di S. Quirico si estendono fin oltre le Grotte di Castro, allora, dico, si è costretti a riconoscere che alcune delle opinioni che sono state emesse riguardo alle formazioni tufacee vulsinie non sono troppo accettabili.

Se infatti si volesse sostenere che queste potenti formazioni stratificate, anche all' infuori di quelle addirittura sabbiose, che pure mostrano colle altre una così intima connessione tectonica, son dovute a « fanghi versati da crateri » bisognerebbe ammettere che un immane straboccamento *uniforme* e *continuo* avesse invaso ugualmente tutta quell' ampia regione che si può segnare almeno tra le Grotte di Castro passando per Sorano e giù ai Monti di Castro, per risalire poi per Farnese ed Ischia di Castro fino a Valentano: e con tutto ciò non si spiegherebbe l' identità di giacitura di queste formazioni con gli altri materiali detritici e coi blocchi che non possono aver fluito.

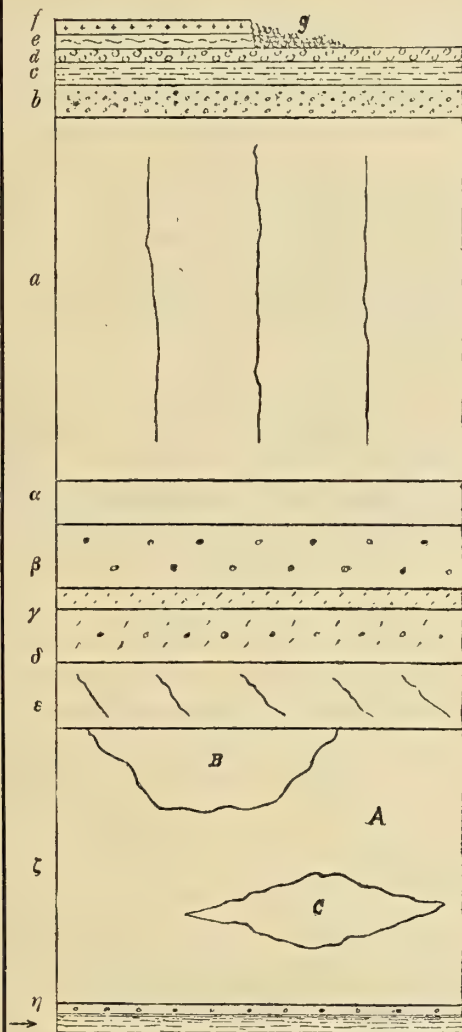
L' idea di eruzioni in stato pastoso non è applicabile ad alcuna di queste estese formazioni tufacee della regione; perchè (a parte gli speciali caratteri che si richiederebbero per confermarla) è per lo meno inadeguata rispetto all' insieme di queste formazioni clastiche intimamente collegate dalle condizioni tectoniche; mentre a me sembra che non si possa troppo facilmente negare che nell' ultimo assetto di questi varî materiali eruttivi abbiano potentemente influito delle notevoli masse d'acqua con *azione estesa e prolungata*, almeno per la maggior parte: ed il prossimo sbocco di Montalto verso il mare non è fatto per mettere troppi dubbî sulla possibile azione delle acque in insenature rimaste tra le primitive pieghe delle formazioni sedimentarie, anteriormente agli ultimi fenomeni vulcanici e sismici.

L' idea del vom Rath che la grandiosa conca di Latera coi suoi coni eruttivi e col suo grande ciglione tufaceo che la delinea per buon tratto all' intorno possa essere un colossale cratere fortemente slabbrato verso sud-ovest anche per l'azione delle acque, per quanto possa richiedere di essere giustificata da accurati raffronti come quello da lui effettivamente istituito sull' autorità dell' Junghuhn col *Gunung Tengger* di Giava, ha per me un gran numero di probabilità dalla sua.

Quest' idea si presta bene a spiegare anche la formazione lavica del Lamone, che col suo riposo più o meno scoriaceo e plastico sui materiali sottostanti ha tutto l'aspetto di una poderosa corrente laterale con direzione da nord-est a sud-ovest, giusto secondo il lato di minor resistenza e lo slabbramento del ciglione craterico.

È poi in armonia colla probabile attività di un vasto cratere la grande uniformità della maggior parte della regione circostante al recinto di Latera; mentre le variazioni che si notano nelle parti circostanti al lago di Bolsena si mostrano più ragionevolmente riferibili a più centri di attività: non essendo poi troppo in accordo anche colle ragioni dinamiche l' esistenza di un altro cratere (il lago) tanto più straordinariamente colossale del primo (Latera) in così grande prossimità.

Sezione delle formazioni dei Vulsinî

presa pei dintorni di Pitigliano dalle vicinanze dell' oratorio di S. Lorenzo su per la via di Farnese.

g) Parti scoriacee di « enfro » e di « palombino » che ricoprono il conglomerato, in vari punti.
f) *Palombino* (r. leucitica) che ricopre qualche volta l'enfro o direttamente il conglomerato. Circa m. 1.
e) *Enfro* che ricopre qua e là il conglomerato. Circa m. 1.
d) *Conglomerato* a *blocchi minerali.* Circa m. 1.
c) *Aggregato* di brecciole e lapilli a zone variopinte nelle sezioni. Circa m. 2.
b) *Materio* (tufo friabile) a piccole brecciole e pomici chiare. Circa m. 3.

a) *Tufo lapideo,* giallo tendente al bruno, brecciato; spesso a sezioni poliedriche verticali: sul quale riposano Pitigliano e Farnese con altri paesi come S. Quirico, Sorano, Soana, Orvieto. Potenza presso Pitigliano circa m. 34.

α) *Tufo dolce,* omogeneo di color giallognolo chiaro. Circa m. 4.
β) *Renone* propr. detto (materiale sabbioso) con pomici biancastre ed alcune nere. Circa m. 6.
γ) *Tufo friabile* un po' scuro, con lapilli. Circa m. 2.
δ) *Pozzolana* grigia con lapilli e pomici bianche grossette, e pomici nere con leucite e sanidino. Circa m. 5.
ε) *Renone forte,* d' aspetto piuttosto irregolare, e senza la solita impronta decisa di stratificazione. Circa m. 6.
ζ) *Tufo friabile* giallastro (*A*) molto ineguale, con pomici e lapilli, misto a pozzolane, (*B*) scure e letti, (*C*) di brecce e ciottoli. Circa m. 26.

η) Affioramento di renone al ponticello della Meleta. — ⟶) Corso del F. Meleta.

Sezione delle formazioni dei Vulsinî

presa pei dintorni di Farnese,
a cominciare dalla « costa » della Madonna delle Grazie sotto S. Umano
fino al fosso di S. Paolo in Vallecupa.

a) *Tufo lapideo.* Circa m. 20 presso Farnese.

α) *Tufo dolce.* Circa m. 1.

β) *Renone* propriamente detto. Circa m. 6.

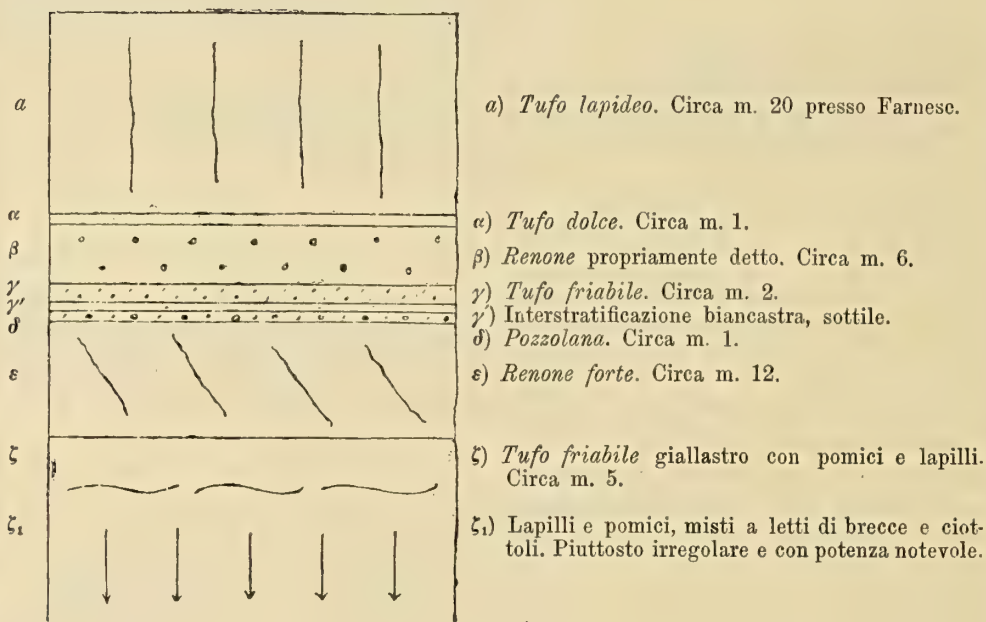
γ) *Tufo friabile.* Circa m. 2.

γ') Interstratificazione biancastra, sottile.

δ) *Pozzolana.* Circa m. 1.

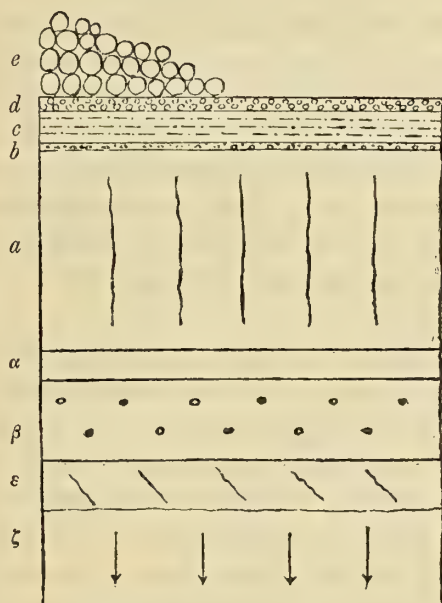
ε) *Renone forte.* Circa m. 12.

ζ) *Tufo friabile* giallastro con pomici e lapilli. Circa m. 5.

ζ_1) Lapilli e pomici, misti a letti di brecce e ciottoli. Piuttosto irregolare e con potenza notevole.

Nota. Sembra che la formazione ζ che si mostra con aspetto piuttosto caotico nella sezione della tav. I, si trovi con una certa differenziazione (ζ, ζ_1) qui in questa sezione.

La formazione γ' è una sottile interstratificazione che si mostra qua e là in alcuni punti anche a Pitigliano.

Sezione delle formazioni dei Vulsinî

presa pei dintorni di Farnese a partire dalla « Via delle Piaggie » che conduce alla chiesuola di S. Anna, fino al « Campo della Villa ».

e) *Murcie* del « Lamone » presso il « Campo alla Villa ». Circa m. 8.
d) *Conglomerato* a « blocchi minerali ». Circa m. 1.
c) *Aggregato* a zone variopinte. Circa m. 3.
b) *Materio*, debolmente ed irregolarmente rappresentato.

a) *Tufo lapideo*. Circa m. 20.

α) *Tufo dolce*. Circa m. 3.

β) *Renone* propriamente detto. Circa m. 8.

ε) *Renone forte*. Circa m. 5.

ζ) *Tufo friabile* giallastro con pomici e lapilli, misto a conglomerati e brecce: che s'interseca irregolarmente colle formazioni attigue.

NOTA. Qui non figurano le formazioni γ e δ; ed è poco netto il passaggio tra ε e ζ; ma si mantiene evidente la corrispondenza nelle stratificazioni di questa sezione con quelle delle altre da d a β.

Minerali dei blocchi erratici.

Le specie minerali che si possono constatare con certezza sono quelle qui sotto segnate, tra le quali portano un asterisco quelle segnalate la prima volta in seguito alle mie ricerche:

Magnetite — *Pirosseno* — *Amfibolo* * — *Granato* — *Idocrasio* — *Mica* — *Nefelina* * — *Haüynite* — *Anortite* * — *Ortoclasio* — *Titanite* — *Apatite* * — *Calcite* *.

Siccome scorrendo la letteratura relativa alla mineralogia della regione da me osservata è facile riportare l' impressione che da più di un autore si son considerati i blocchi feldispatici come di natura trachitica debbo osservare che nella presente descrizione sono soltanto comprese le specie che si rinvengono nei blocchi pei quali la facies ed il giacimento determinano la loro natura di *proietti minerali vulcanici*, essendo naturalmente compresi tra questi i blocchi feldispatici; mentre sono esclusi tutti gli altri blocchi che, anche sparsi isolatamente, possono più o meno decisamente avere l' aspetto di materiale lavico. Nello stesso modo ho tralasciato l' indicazione di varî pezzi erratici appartenenti a rocce sedimentarie, che pur si trovano qua e là.

I. La *magnetite*, minerale frequente nei blocchi feldispatici delle formazioni vulcaniche mediterranee, si mostra qui tipicamente sotto la forma dell' ottaedro: spesso cogli angoli arrotondati e cogli spigoli smussati; e su questi ultimi talvolta, segnate da sottili listerelle, le facce del rombododecaedro. I cristallini, che raggiungono spesso le dimensioni da 2 a 3 mm., si riducono poi in molti blocchi a minuti granuli di mezzo mm. circa; ed è specialmente tra questi che si distinguono qualche volta degli individui che mostrano predominanti le faccette del rombododecaedro unite a piccole faccette triangolari dell'ottaedro. Sicchè per le specie si può ritenere qui ordinaria la forma }111{ e poco frequente la combinazione }111{ }110{ decisa.

I cristallini un po' grandetti sono difficilmente a facce nitide e lucenti come quelli del Cimino: per solito invece mostrano le facce irregolari opacate da patine di alterazione di altri minerali; e sono spesso deformi. Non di rado un individuo un po' grandetto si mostra formato dall' unione di più individui piccoli ben uniti nei contorni degli spigoli, ma con interstizi più o meno regolari nell' interno. I cristallini sono molto sensibili all'azione della sbarra magnetica. La specie si mostra esclusivamente in massi feldispatici, e precisamente:

a) Abbondante in blocchi sanidinici friabili con augite nera, apatite, Haüyna azzurra, rara titanite alterata e poca mica;

b) Abbondante in blocchi sanidinici molto alterati e friabili, con mica ed apatite;

c) Scarsa in blocchi sanidinici con apatite, augite e titanite;

d) Scarsa in blocchi sanidinici con augite, titanite, poca mica e sostanza biancastra.

II. Il *pirosseno* è tra le specie che assumono maggiore importanza nella delineazione del tipo mineralogico dei proietti della nostra regione. Si presenta in una

estesa serie di blocchi varî e con variazioni notevoli; per le quali si passa gradualmente dal tipo deciso dell' *augite* nerissima alla *fassaite* verde e giallo-verdognola chiara. Tuttavia per rendersi conto delle condizioni relative alla sua presenza nel giacimento occorre prendere in considerazione separatamente le due varietà estreme.

L' *augite* coi caratteri tipici fu trovata nei seguenti blocchi:

a) Blocchi sanidinici nominati in *a*), *c*) e *d*) per la *magnetite*;

b) In blocchi sanidinici con titanite e melanite;

c) In un blocco alterato con molta augite, Haüyna, e con eccezionali cristalli di nefelina;

d) In vene di cristallini molto nitidi, neri, entro un blocco costituito da augite scura e rari individui di anortite.

Finalmente l' augite fu trovata in cristallini identificabili ma con caratteri meno decisi e per solito tendente più o meno al verde:

e) In vene superficiali su un blocco granulare di augite scura e verdastra, con granuli bianchi (probabilmente di anortite) come nella regione Cimina;

f) In blocchi di pirosseno verde granulare ed anortite con scarse geodine ove si trovano piccoli cristalli che mostrano il passaggio graduale dall' augite alla fassaite, come nella regione Cimina.

I blocchi delle tre ultime categorie (*d*, *e*, *f*) sono rari.

Le osservazioni fatte su cristallini ordinariamente di qualche millimetro, appartenenti a blocchi sanidinici, dettero le seguenti combinazioni:

$$\{100\}\ \{010\}\ \{110\}\ \{111\}\ \{101\}$$
$$\{100\}\ \{010\}\ \{110\}\ \{111\}\ \{101\}\ \{\bar{1}11\}$$

e quelle fatte su cristallini del blocco *d*) dettero

$$\{100\}\ \{010\}\ \{110\}\ \{111\}\ \{\bar{1}11\}.$$

La *fassaite* in granuli che rivelano più o meno nettamente la forma cristallina od in cristallini ordinariamente ben conformati che mantengono un abito molto uniforme, e perciò all' infuori dei blocchi del tipo *f*), si trova nei seguenti proietti:

a) In blocchi friabili costituiti quasi esclusivamente di fassaite più o meno ben cristallizzata;

b) In vene entro blocchi costituiti essenzialmente da fassaite verde granulare e nuclei di sostanza quasi compatta (che ha i caratteri di roccia di contatto) con poco granato e idocrasio;

c) In blocchi prevalentemente costituiti da fassaite con poco granato chiaro;

d) In blocchi prevalentemente costituiti da fassaite con poco idocrasio, il quale è talvolta in bellissimi cristalli bruni a vivo splendore;

e) Abbondante in blocchi ove prevalgono il granato giallo e l' idocrasio;

f) In rari e nitidi cristallini entro blocchi di granato giallo, o di granato giallo e idocrasio;

g) In eleganti cristallini su cristalli sciolti di idocrasio.

Per chi abbia in pratica i blocchi del Cimino, ove l' augite passa dal nero al verde cupo, e poi al verde asparagio, acquistando gradualmente le forme fassaitiche,

l'identificazione del minerale può essere fatta a colpo d'occhio anche in questi blocchi dei Vulsinî, ove si ripete, in scala molto più ristretta, lo stesso fenomeno. D' altra parte però qui nei Vulsinî il minerale raggiunge dei termini nei quali acquista i caratteri della fassaite in modo così deciso (e questo è importante notare per studî di confronto) che si ricercherebbero invano nei Cimini.

Le misure eseguite su cristallini delle dimensioni medie di mm. 2×4 danno come combinazione tipica per la fassaite di questi blocchi

$$\{110\}\ \{021\}\ \{221\}\ \{331\}\ \{111\}\ \{101\}\ \{100\}\ \{010\}\ \{001\}$$

ove predominano ordinariamente le forme $\{221\}$ e $\{331\}$; mentre vi sono molto limitate le ordinarie forme augitiche, ed i pinacoidi vi sono rappresentati da sottili listerelle che vengono talvolta a sparire: perciò nell' insieme della combinazione i cristallini si presentano allungati nel senso longitudinale.

Tra i numerosi individui che si presentano specialmente nelle vene dei blocchi di tipo fassaitico non sono rari i geminati con asse normale al piano (100).

I varî cristallini, in generale con splendore vitreo non molto vivo, vanno, come abbiamo accennato, dal verde asparagio scuro degli individui decisamente opachi fino al giallo verdastro molto chiaro in individui quasi trasparenti: tuttavia anche questi ultimi mantengono costantemente l'abito ordinario degli altri cristallini verdi, pel quale vengono poi in alcuni blocchi a ricollegarsi all' augite, coi passaggi indicati.

Si deve notare che la fassaite è nell' insieme del giacimento di gran lunga più abbondante dell' augite, ed è più caratteristica, anche per le condizioni di paragenesi.

III. L' *amfibolo* fu trovato soltanto in un blocco di aspetto abbastanza particolare, costituito essenzialmente da feldispato con vene di sostanza bruna e verdastra poi qua e là mica ed amfibolo; ma in scarsa quantità.

Si mostra in cristallini neri a facce abbastanza lucenti, delle dimensioni di circa 1 mm. e piuttosto corti nella direzione dell' asse $[z]$. Le misure eseguite su due cristallini staccati dal blocco dettero (orientazione del Dana nel *System of Mineralogy*, 1892) le combinazioni

$$\{110\}\ \{010\}\ \{100\}\ \{\bar{1}01\}\ \{011\}\ \{\bar{1}21\}$$
$$\{110\}\ \{010\}\ \{100\}\ \{101\}\ \{011\}\ \{031\}\ \{\bar{1}21\}$$

le quali corrispondono precisamente a quelle dell' *Orneblenda* del Cimino, salvo un più deciso e più abituale sviluppo del pinacoide $\{100\}$. Del resto l'abito è decisamente identico, essendo ordinariamente presente anche nel Cimino il pinacoide $\{100\}$ benchè meno netto. Ciò è tantopiù notevole inquantochè il proietto, tra i tanti da me osservati nelle due regioni, si mostra di un aspetto abbastanza particolare.

Le estese ricerche continuate con assiduità per più anni nella regione Vulsinia mi permettono di asserire che l'amfibolo vi è decisamente raro. È per compenso molto interessante specialmente per le relazioni che mostra colla mica.

IV. Il *granato* è un altro minerale che insieme al pirosseno ed all' idocrasio dà il carattere al giacimento. Anche questo minerale si mostra in un' estesa serie di variazioni che sono in armonia colla larga parte che esso prende alla costituzione dei varî blocchi. Infatti varia dal bianco giallastro smorto a debole splendore, alle tinte

gialle più calde con splendore vivo, in cristalli che passano da quelli perfettamente opachi a quelli quasi trasparenti, per prendere poi la serie dei cristalli bruni con accenni al gialliccio od al gialliccio rossigno, appena pellucidi, fino a quelli neri decisamente opachi e talvolta splendenti, come la melanite di Frascati. A queste variazioni poi si aggiungono quelle di altri caratteri, compresi quelli delle forme. Tuttavia si può col D'Achiardi includere tutta questa estesa serie nel gruppo *Andradite*, notando che vi sono rappresentate le suddivisioni più notevoli, come la *topazolite*, la *colofonite* e la *melanite*, anche prese coi caratteri più speciali dati dagli autori, come ad es. anche dal Dana (*System of Mineralogy*, 1892).

Però qui per rendersi più esattamente conto delle condizioni genetiche credo più conveniente distinguere sotto il nome di *melanite* il granato nero o marcatamente bruno, mantenendo poi indistintamente a tutta la serie del granato a tinta fondamentale gialla il nome di *colofonite* dato dal Santi (loc. cit.); tantopiù che questo nome, non fondato su vedute tassinomiche astratte, ma su osservazioni in posto, a me sembra molto bene appropriato. Infatti è il colore della colofonia quello che dà la nota fondamentale alle tinte prese dalla maggior parte di questi granati più o meno gialli, benchè in varî casi si mostri abbastanza sbiadito; ed al colore poi si aggiunge sulle superficie di frattura del minerale uno splendore resinoso assai marcato. Soprattutto poi è da notare che i due termini suindicati delineano due modi di paragenesi decisamente diversa, come apparisce dalle indicazioni seguenti.

La *colofonite*, caratterizzata nel modo suddetto, si mostra infatti in un'estesa serie di blocchi, che possono in certo modo essere contraddistinti o dalla decisa predominanza del minerale, oppure dalla sua unione colla fassaite (mai con augite propriamente detta) o coll'idocrasio.

In questi blocchi, che sono tra quelli più largamente diffusi in tutto il giacimento, i cristalli variano per le dimensioni dagli individui minutissimi quasi granulari ad individui di oltre 2 cm. nelle direzioni degli assi monometrici. Il colore, come ho già detto, prende quasi tutte le tinte dal bianco gialliccio al giallo rossigno tendente al giacinto, passando pel giallo ambra con tendenza marcata al verdognolo nelle tinte chiare: però si mantiene per solito come nota fondamentale più o meno marcata il giallo colofonia. Gli individui a tinte verdognole e giallo ambra sono quelli che si avvicinano maggiormente alla trasparenza. Lo splendore è in tutti vitreo, spesso vivo sulle facce cristalline, con tendenza marcatissima al resinoso sulle superficie di frattura.

La forma ordinariamente predominante nei cristalli più decisamente gialli, che sono i più frequenti, è il rombododecaedro, spesso regolarissimo, a spigoli netti o, più frequentemente, troncati dall'icositetraedro }211{; ma anche la forma }431{, già data dal vom Rath, non è affatto rara in individui della combinazione }110{ }211{ }431{, spesso di color giallo verdastro e per solito a costituzione poco omogenea. Tra questi sono notevoli alcuni individui incompleti, nei quali la formazione di contatto si mostra così accentuata da includere nella massa una porzione granulare del magma di contatto, il quale riapparisce poi con grande evidenza nella massa di alcuni blocchi. Gli individui verdognoli mostrano spesso di essere macchiati da fassaite, che vi si trova anche in incrostazioni granulari. Tra le particolarità che si fanno più specialmente notare soprattutto in questi cristalli verdognoli è quella per la quale

degli individui semplici o degli aggregati paralleli ben terminati da tutte le parti si mostrano allungati secondo un asse di simmetria trigonale. Tra le accidentalità delle facce è abbastanza frequente quella della rigatura parallela ai lati delle facce del rombododecaedro già notata dal D'Achiardi [1]. La striatura nel senso degli spigoli rombododecaedrici è poi ordinaria nella forma }431{. In alcuni individui giallastri chiari ed in altri tendenti al rosso giacinto è spesso molto sviluppata la forma }211{: in alcuni individui giallo-cera chiaro della combinazione }110{ }211{ la }211{ è decisamente predominante. Nell' insieme una splendida serie di cristallizzazione.

La colofonite si trova:

a) In blocchi costituiti da cristalli di granato giallo; qualche volta con rari cristalli di idocrasio e di fassaite;

b) In blocchi costituiti quasi esclusivamente da granato massivo con cristalli specialmente chiari, e spesso nella combinazione più ricca di forme, e con qualche raro cristallo di idocrasio e di fassaite;

c) In blocchi costituiti prevalentemente da granato giallo in cristalli e spesso da subtrasparente a translucido, con cristalli di idocrasio a facce opacate da una sottile patina giallastra;

d) In blocchi costituiti prevalentemente da granato chiaro spesso a grossi cristalli con vene e cumuli di fassaite e qualche raro cristallo di idocrasio bruno giallastro;

e) In grossi blocchi presso a poco a parti uguali con idocrasio bruno giallastro; spesso con nuclei di materiale massivo che rivelano la loro provenienza da terreni sedimentarî in un giacimento di contatto;

f) Entro blocchi come quelli indicati in *b* e *c* per la fassaite;

g) In rari cristalli entro blocchi costituiti prevalentemente da idocrasio;

h) In cristalli sciolti nei tufi, o meglio nel terreno smosso ove affiora il conglomerato, o nelle sabbie delle valli adiacenti alle località di affioramento del conglomerato stesso.

La *melanite*, spesso decisamente nera come quella di Frascati o bruna con leggerissimi accenni al gialliccio, si presenta nel giacimento come termine decisamente distinto dal precedente. La forma infatti è quasi invariabilmente quella tipica della melanite dei Monti Albani nella combinazione }110{ }211{ colla }110{ ordinariamente predominante: soltanto in un piccolo cristallino non decisamente nero, ma bruno gialliccio predomina fortemente la forma }211{ accompagnata da faccette rombe della forma }110{ molto piccole. Le dimensioni variano da pochi millimetri a qualche centimetro e raggiungono le proporzioni addirittura gigantesche di 6 cm. in un individuo eccezionale che fu trovato sciolto, ma che si mostra evidentemente staccato da un blocco sanidinico. Le facce sono di rado nitide e lucenti: spesso si mostrano alterate e distorte come per effetto di fusioni, o di compressioni ad uno stato plastico.

La melanite si trova legata all' esistenza di blocchi di tipo esclusivamente sanidinico; e più specialmente:

a) In vene ed interstizî di blocchi sanidinici piuttosto friabili con individui

[1] V. *Su di alcuni minerali toscani con segni di poliedria.* Gia citato.

del feldispato abbastanza distinti in unione con titanite e sostanza bianca o giallastra informe;

b) In geodi o nella massa di blocchi sanidinici a struttura granulare quasi compatta con titanite alterata e sostanza bianca o giallastra;

c) In individui sciolti nel terreno smosso o nelle sabbie, dovuti al facile disgregamento dei blocchi sanidinici.

V. L' *idocrasio* è il terzo termine del gruppo predominante tra i minerali del giacimento. Si presenta anch' esso in un' estesa serie di cristallizzazione benchè nell' insieme dei caratteri meno varia di quella del granato. I cristalli più frequenti sono di color bruno giallastro, e di circa un centimetro nel senso della maggior dimensione, che è abitualmente secondo l' asse [*z*]; ma poi si hanno dei minuti cristallini di 2-3 mm. di larghezza per 3-4 di lunghezza fino a raggiungere individui di oltre 3 cm. di lunghezza per 1,5-2 di larghezza: eccezionalmente si trova nella mia collezione qualche individuo non molto regolarmente conformato e incrostato di fassaite della lunghezza di oltre 4 cm. per 3 di larghezza. Il colore poi varia fino al giallo verdastro chiaro in individui piuttosto piccoli subtrasparenti, incastrati in aggregati paralleli, non molto lucenti. I cristalli di color bruno sono per solito i più lucenti: abbondano i cristalli decisamente opachi, con colori incerti, privi di ogni splendore. Tra i tanti casi di aggregazione pei quali i cristalli si intersecano e si compenetrano alla rinfusa (secondo il carattere generale di questi blocchi a granato ed idocrasio) sono notevoli degli elegantissimi aggregati paralleli secondo l' asse [*z*], che formano dei blocchi esclusivamente costituiti da questo minerale perfettamente cristallizzato. Le misure eseguite su un certo numero di cristalli dei più caratteristici dettero le seguenti combinazioni:

}110{ }100{ }111{ }001{

che è piuttosto rara;

}110{ }100{ }210{ }111{ }001{

che è molto frequente, e si potrebbe dire tipica nel giacimento;

}110{ }100{ }210{ }111{ }001{ }331{
}110{ }100{ }210{ }111{ }001{ }101{

non rare;

}110{ }100{ }210{ }111{ }001{ }101{ }331{

non frequente, specialmente coi caratteri determinati, nell' individuo misurato, dallo sviluppo predominante della }100{;

}110{ }100{ }210{ }111{ }001{ }101{ }331{ }311{

nettissima in uno splendido individuo bruno di regolarità eccezionale e non soverchiamente rara;

}110{ }100{ }210{ }310{ }111{ }001{ }101{ }331{ }311{ }511{

rara specialmente per la presenza della forma }310{; e finalmente la combinazione

}110{ }100{ }210{ }111{ }001{ }101{ }331{ }311{ }511{ }211{ }312{

decisamente rara e notevole per la predominanza del diottaedro }211{ tra le forme piramidali.

In tutto *dodici* forme sviluppate nettamente: con }110{ ordinariamente predominante tra i prismi verticali e }111{ tra le piramidi, mentre è per solito mediocremente sviluppata la base.

L' idocrasio si trova:

a) In blocchi costituiti da cristalli ben distinti di questo solo minerale, ordinariamente di color bruno ed aggruppati alla rinfusa;

b) In eleganti aggregati di aspetto colonnare, costituiti unicamente da gruppi di individui di questo minerale, paralleli secondo [*z*], a color bruno tendente al giallo-verdastro, con splendore debole e tendente leggermente al grasso;

c) In blocchi ove il minerale si mostra massivo con dei cristalli solidamente incastrati qua e là;

d) Nei blocchi nominati in *b*, *c*, *d*, *g* per la colofonite;

e) Nei blocchi nominati in *b*, *d*, *e*, *f*, per la fassaite;

f) In cristalli sciolti nelle località di affioramento del conglomerato e valli adiacenti.

VI. La *mica* si trova di rado in cristalli; per solito è in lamelle o pacchetti lamellari più o meno contorti nella massa dei blocchi. Può essere compresa tutta quanta nel gruppo *merosseno*. In genere non è molto frequente; tuttavia non è neanche rara quella di colore bruno-nerastro, mentre è rara quella verde, che fu trovata specialmente in cristalli.

I blocchi nei quali fu trovata la mica bruno-nerastra sono:

a) Blocchi costituiti prevalentemente da sanidino, e, specialmente, con magnetite ed apatite, o con augite e titanite;

b) Blocchi costituiti prevalentemente da mica in lamelle, o pacchetti piuttosto estesi e contorti, con poco feldispato;

c) Blocco feldispatico notevole, citato per l' amfibolo.

La mica verdastra infine fu trovata in un grossissimo blocco costituito quasi a parti uguali da pirosseno verdastro ad individui deformi, da questa mica e da calcite.

VII. La *nefelina* fu da me trovata in un singolarissimo proietto costituito in gran parte dalla stessa nefelina, poi da pirosseno nero-verdastro in cristalli mal conformati, da cristallini monometrici alquanto alterati superficialmente, ma che mostrano nette le forme del rombododecaedro o dell' ottaedro combinato col cubo (Haüyna), e finalmente da feldispato che mostra una marcata tendenza a trasformarsi in un minerale bianco d'aspetto perlaceo, che potrebbe essere *nacrite*.

La nefelina si mostra qui in individui di dimensioni addirittura insolite, giacchè raggiunge i 30 mm. di lunghezza per 8 a 10 di larghezza. Rarissima nel giacimento, vi apparisce con aspetto strano, e per così dire, appena tollerata. Infatti gli individui vi si mostrano tutti più o meno alterati e corrosi e coperti da una patina bianca che ne aumenta le intime relazioni coi notati cristallini monometrici. Il minerale, facile

a riconoscere per la forma ed i caratteri fisici, specialmente dopo frattura, fu verificato coi saggi, ai quali si ottenne deposizione di silice gelatinosa.

VIII. L' *Haüyna* è rara in cristalli un po' decifrabili; e relativamente non è frequente neanche in granuli grigio-verdastri, nei quali è riconoscibile specialmente coi saggi: spesso è più o meno alterata in sostanza bianca o giallastra.

Nell'abbondante collezione del materiale Vulsinio da me accumulato in circa cinque anni non è stata *mai* da me trovata in blocchi essenzialmente pirossenici. Si trova specialmente negli interstizî di blocchi sanidinici più o meno friabili, come quelli citati in *a*) per la magnetite; e più raramente nelle geodine di blocchi sanidinici a grana fina, più resistenti, che qualche rarissima volta mostrano una certa schistosità come quelli del Cimino.

In un blocco di quelli suindicati (V. *a*, magnetite) l' Haüyna si trova abbondante, coi caratteri tipici, in cristallini che raggiungono la grandezza di circa due millimetri: è di color celeste nei cristalli non alterati; lo splendore però è in tutti debole e tendente al grasso; i varî cristallini osservati benchè incompleti e deformi lasciano riconoscere le combinazioni:

$$\{100\}\ \{110\}\ ;\ \{110\}\ \{111\}\ ;\ \text{ed anche}\ \{100\}\ \{110\}\ \{211\}.$$

Notevoli poi sono alcuni cristallini di color giallastro nell'interno ed ordinariamente coperti da una patina biancastra, i quali si mostrano abbondanti in rombododecaedri o in ottaedri troncati dal cubo nelle geodi del proietto già nominato per la nefelina. I saggi fatti sul carbone con soda dettero una splendida colorazione di « hepar » con macchie rossigne che sono abbastanza caratteristiche per l' Haüyna, e si ebbe un' intensa reazione di zolfo sulla lamina d' argento. Data poi la variazione delle forme, in cristalli ben netti, compresa la combinazione $\{100\}\ \{111\}$, si possono includere anche questi cristallini nell' Haüyna; tantopiù che questa specie, senza essere frequentissima, si trova qua e là sotto aspetti multiformi nel giacimento.

Qui debbo ricordare come io abbia avuto occasione di accennare più di una volta ad una sostanza bianca o bianco-giallastra, specialmente come alterazione dell' Haüyna. Ora una sostanza dello stesso aspetto, bianca, bianco-giallastra o di colore bianco sporco, abbastanza friabile, si trova frequentemente tra gl' interstizî dei blocchi sanidinici anche senza relazioni palesi con l' Haüyna. Però per quanto nell' insieme dei blocchi la sostanza possa dirsi tutt' altro che rara, pure si trova in condizioni tali da rendere oltremodo laboriosa la cernita di una quantità sufficiente per prove chimiche attendibili. Perciò non è possibile pronunziare un giudizio abbastanza approssimativo sulla sua natura; giacchè per la forma qualche rara volta si mostra in minuti aggregati rombododecaedrici, in modo da richiamare l' idea della *Noscanite*; ma qualche volta prende piuttosto l' aspetto di minuti bacilli a sezione più o meno lontanamente esagonale, terminati da teste arrotondate, in modo da richiamare invece l' idea della *Davyna*; più frequentemente poi è addirittura informe. In ogni modo la presenza di questa sostanza non è trascurabile; perchè è uno degli elementi che entrano con maggiore frequenza e con maggiore evidenza a determinare la « facies » dei blocchi sanidinici della regione.

IX. L' *anortite* non è mai stata da me veduta in cristalli un po' definiti: tuttavia deve ritenersi per tale un feldispato che si può osservare in individui piuttosto piccoli nella massa di qualche blocco pirossenico a struttura granulare e di colore verde cupo, o più raramente in qualche individuo abbastanza grandetto come ne ho uno io nella massa di un blocco di augite nera. Il minerale che presenta una grande analogia con quello di alcuni individui mal conformati tra i cristalli di anortite ben distinta che si osservano frequentemente nella regione Cimina, è riconoscibile nell' insieme dei suoi caratteri per la sua completa solubilità nell' acido cloridrico con deposizione di silice gelatinosa, e per un abbondante precipitato con ossalato ammonico dopo separazione dell' allumina.

X. L' *ortoclase* nella var. *sanidino* è degno di attenzione per le condizioni nelle quali si trova nel giacimento. Raramente si trova in individui ben netti entro geodi in modo da permettere uno studio esatto delle varie forme. Per solito si trova in geminati secondo la legge di Karlsbad; e son rari i cristalli che appariscono geminati secondo la legge di Baveno; meno rari quelli semplici. Per solito sono finamente tabulari secondo (010).

Il sanidino entra come costituente essenziale di un buon numero di blocchi che sono stati compresi specialmente sotto le indicazioni della *magnetite*, dell' *augite*, della *melanite*, della *mica* e dell' *Haüyna*; ma tutti questi blocchi possono essere raggruppati in tre categorie:

a) Massi molto friabili a grossa grana, anzi a cristallizzazione distinta in individui variamente intrecciati e con interstizî piuttosto spaziosi; ove si trovano come accessorî degli ottaedri anche grandetti di magnetite, dei cristallini di augite, lamelle di mica e più raramente aghetti di apatite e cristallini di Haüyna;

b) Massi a grana più fina e meno friabili, ma con abbondanza di vene e nuclei d' individui sanidinici in aggregati molto friabili; nei quali si mostrano come accessorî specialmente l' augite, la titanite e la già detta sostanza bianca o bianco-giallastra; più raramente dei minutissimi aggregati di melanite;

c) Massi a struttura granulare, talvolta quasi compatti e molto resistenti; nei quali è il più frequente accessorio la melanite, nera o intensamente bruna con accenni al giallastro, in cristallini distribuiti specialmente in vene ed in geodi.

Si deve notare che i massi relativamente più fragili ove entrano in abbondanza degli individui di sanidino abbastanza distinti e sottili, come nei gruppi *a* e *b*, sono di gran lunga i più frequenti. Sono molto rari i pezzi ove il feldispato a struttura granulare richiama spontaneamente l' idea di rocce antiche, come nel Cimino, mostrando talvolta anche qualche imperfetto accenno ad una certa schistosità.

XI. La *titanite*, nella var. *semelina* non è rara; ma è spesso molto alterata. Si trova nei massi feldispatici. In cristallini abbastanza netti di color giallo a facce lucenti si trova specialmente nella categoria *b* dei massi indicati per l' *ortoclase*; ma poi più o meno alterata apparisce anche negli altri massi feldispatici, specialmente ove si mostrano riuniti in individui un po' alterati ed iridescenti la magnetite ed il pirosseno o la mica bruna.

XII. L' *apatite* si presenta ordinariamente in eleganti cristallini aciculari a zone incolore e brunastre, le quali qualche volta dividono l' individuo in due metà a stra-

tificazione isomorfa, una decisamente chiara e l'altra bruna fino a nero; abbondano anche i cristallini poco allungati, e sono questi che si mostrano più spesso incolori e con vivo splendore vitreo; non mancano poi di quelli di circa 3 mm. di larghezza per 6 o 7 di lunghezza, che sono ordinariamente grigiastri: molti trovandosi in blocchi alterati son coperti da una patina terrosa, grigio-giallastra. La forma ordinaria è quella data dalla combinazione del prisma di prim' ordine colla piramide fondamentale, con approssimazione notevole nelle misure specialmente per minerale dei blocchi erratici. Il minerale oltrechè col goniometro è facilmente identificabile coi saggi: dalla soluzione nitrica si ha abbondante precipitato (calcio) per l' aggiunta di acido solforico ed alcool, e si ottiene in modo molto deciso la nota colorazione gialla (ac. fosforico) col molibdato ammonico.

L' apatite si trova nei blocchi sanidinici; e specialmente tra quelli indicati in *a*, *b* e *c* per la magnetite. È notevole tra tutti un blocco sanidinico molto alterato con mica e magnetite, nel quale l' apatite si può appena considerare come minerale accessorio; perchè si trova abbondantissima in minuti cristallini aciculari chiari fino a cristallini di mm. 3 × 7 più o meno macchiati da altre specie e specialmente da titanite, negli interstizî; ma soprattutto è notevole in accentramenti di minuti cristallini grigiastri in varî punti della massa.

XIII. La *calcite* è stata trovata in un notevole blocco già indicato per la mica di color verdastro. Questo blocco, come ho già accennato, si mostra costituito da pirosseno verdastro in individui mal conformati che ricordano la fassaite, e più abbondantemente d' aspetto granulare, con numerosi cristalli di mica verdastra e con calcite abbondantemente sparsa nella massa. La calcite si trova in masse cristalline bianche più o meno distinte, che si mostrano finamente corrose alla superficie secondo direzioni di sfaldatura; nell' interno invece sono spesso fresche e quasi trasparenti.

Il minerale sembra abbastanza raro nel giacimento: in parte però è probabile che ciò si debba alla facilità colla quale questi blocchi si possono esser disgregati. Cosa da tenersi in conto sempre pel giudizio sulla frequenza relativa dei varî blocchi.

Ora dall' insieme dei dati suesposti riguardo alle condizioni di giacitura, alla costituzione mineralogica ed alla struttura dell' abbondante materiale erratico da me preso a studiare, risulta chiara l' importanza che questo viene ad assumere non solo dal lato mineralogico, ma anche da quello litologico e geologico.

Infatti i blocchi erratici nei centri vulcanici più accuratamente studiati cominciano ormai a mostrarsi con una tale estensione che non è più il caso di riferirli a fenomeni troppo parziali, come sembra che giudicasse anche il vom Rath riguardo a quelli della « Corte del re » e della « Buca dei fiori » presso Pitigliano. Si comincia a vedere che la loro esistenza si collega a fenomeni eruttivi più o meno costanti di tale importanza da poter caratterizzare, almeno in buon numero di casi, l'attività dei singoli centri forse con significato non minore di quello che si attribuisce ai materiali massivi.

Una delle cose che più vivamente colpiscono chi osservi con cura del materiale erratico appartenente a diversi centri eruttivi è nello stesso tempo la grande facilità colla quale può essere in genere ricondotto ad una comune causa di origine, e l' im-

pronta speciale che segna le particolari condizioni nelle quali questa causa generale ha avuto la sua esplicazione in ogni singolo centro.

I blocchi minerali erratici dei Vulsini, come quelli di altri giacimenti, hanno una « facies » speciale. Se nell' insieme ve ne sono poi di quelli che stabiliscono relazioni tra il nostro giacimento e quelli appartenenti ad altri centri, pure la quantità relativa dei blocchi delle varie sorta, la loro costituzione mineralogica, e più ancora le peculiari condizioni di paragenesi e di cristallizzazione delle singole specie che entrano a comporli e la struttura danno dei caratteri che non solo sono sufficienti nel complesso a definire la formazione, ma che potrebbero anche permettere ad un occhio esercitato di distinguere presso a poco il 90 per cento di questi massi in un miscuglio appartenente a varî centri.

Limitandomi ai centri eruttivi principali della zona mediterranea, della quale conosco il materiale « de visu » non solo per le mie ricerche ma anche per la gentilezza del mio illustre maestro prof. G. Strüver, direttore del Museo mineralogico dell' Università di Roma, rileverò alcuni dei caratteri salienti.

Nel nostro mancano, o debbono essere scarsissimi, addirittura eccezionali (io in varî anni non ne ho trovati), i massi « a struttura zonata » propriamente detti, ove abbonda spesso l' Haüyna: come si hanno specialmente nei centri più meridionali del distretto Tirreno, a cominciare dai Sabatini. Ed anche cristallizzata l' Haüyna nei Vulsinî è ristretta ai massi feldispatici e non è stata trovata in quelli pirossenici o di altra natura. Mancano o saranno rarissimi lo Spinello e la Sarcolite; ma soprattutto si fa notare la mancanza della Wollastonite: abbondante specialmente nei Sabatini.

Come minerale accessorio nei massi a granato ed idocrasio si ha sempre la fassaite (sono anzi questi massi a granato, idocrasio e fassaite che determinano, come ho già accenato, il carattere mineralogico saliente di questo giacimento) e mai la mica verde che è piuttosto frequente in unione con questi minerali nei Sabatini.

Il Somma, i Monti Albani col Lazio, ed i vulcani Sabatini presentano massi « a struttura zonata »; tutti presentano massi a granato giallo ed idocrasio, ma più abbondantemente i Sabatini; tutti presentano anche in maggiore o minore abbondanza massi di pirosseno verde con anortite e con pleonasto. Invece i Vulsinî si riattaccano al gruppo specialmente per l' abbondanza dei blocchi a granato giallo (meglio « colofonite » como ho già detto), idocrasio e fassaite; ma, come abbiamo veduto, scarseggiano in generale i blocchi pirossenici non fassaitici, benchè ve ne siano alcuni con anortite.

Il Cimino (meglio il vulcano di Vico), che pur avendo dei caratteri molto particolari si collega in modo abbastanza deciso coi Sabatini, coi Monti Albani e col Somma specialmente pei massi pirossenici con anortite e pleonasto, ha scarse affinità col nostro, determinate specialmente da massi feldispatici con mica bruna ed augite. A parte il lago di Laac, col quale ha forse maggiore analogia, il Cimino si collega coi Vulsinî come col Somma anche per alcuni massi feldispatici a melanite; ma tra le due regioni vi sono caratteri di differenza che possono raggiungere un notevole significato.

Qui nei Vulsinî, ricchi in massi con colofonite o con idocrasio, che non sono stati

accertati nei Cimini ([1]), non mancano soltanto il quarzo, la Damburite, ed altri minerali come la tormalina, che io ho trovati non troppo rari (ad eccezione di quest'ultima) nei Cimini, per quanto manchino anche nelle altre regioni; ma è oltremodo rara la nefelina, che in altre regioni, e soprattutto nei Cimini, è abbastanza frequente. Importa inoltre notare che nei Cimini la nefelina, entro blocchi feldispatici specialmente in unione a titanite ed amfibolo, è ordinariamente freschissima a splendore marcatamente grasso, in modo da ricordare l' eleolite, mentre nei Vulsinî si trovò alterata ed in individui così eccezionali per grandezza e per l' aspetto generale da far quasi credere che debbano alla loro gigantesca costituzione l' essere scampati alle azioni trasformatrici dell' attività vulcanica. Anche la melanite nei massi feldispatici dei Vulsinî mostra spesso, come ho già detto, di aver subìto l' azione ignea successivamente alla sua formazione.

Sole l' orneblenda e l' augite (minerali in genere molto resistenti alle variazioni delle condizioni di formazione) si mostrano molto simili nei massi delle due regioni; gli altri minerali portano le tracce di modificazioni di diversa intensità: molto maggiori pei Vulsinî.

Sicchè per tutto questo materiale non è soltanto la costituzione mineralogica dei blocchi diversi che si fa notare; ma sono anche le diverse modificazioni tanto delle singole specie quanto della massa dei blocchi, specialmente feldispatici.

E non è inutile rilevare come accanto a specie e massi come quelli feldispatici, che appariscono di formazione precedente ed *alterati* in seguito dall' azione ignea propria del vulcano, vi siano nei Vulsinî, come nella maggior parte delle altre regioni, dei blocchi come quelli a colofonite, idocrasio e fassaite con cristalli freschi a splendore vivo e forme spesso regolarissime, i quali sembrano *dovuti* a quest' azione ignea del vulcano stesso.

Per spiegare questo esteso complesso di fenomeni che in mezzo a tante variazioni mostra nondimeno una connessione causale tanto palese non solo per la giacitura del materiale, ma anche per la natura delle azioni che in genere sembrano aver preso parte a produrlo, sarebbe difficile trovare una teoria sostanzialmente diversa da quella enunciata dal prof. Strüver pei Sabatini ([2]); perchè tale teoria, è per così, dire scritta sui blocchi stessi, quando ci si riporti appunto coll'osservazione, come avverte l' insigne ricercatore, al loro insieme quale si mostra nei varî giacimenti. Tuttavia, per meglio caratterizzare le speciali condizioni dell' attività vulcanica dei singoli centri, specialmente in seguito alle mie osservazioni sulle interessanti formazioni Cimine, son venuto

([1]) Durante la pubblicazione di questo lavoro ho trovato dei blocchi a *granato* ed *idocrasio* in alcuni punti della roccia detta *peperino* (*necrolite*, Brocchi): e sono soprattutto interessanti perchè completano le indicazioni generiche che di alcuni rari campioni della storica collezione Medici-Spada esistente nel Museo dell' Università di Roma.

Però, per le loro condizioni di giacitura, per la loro *facies* molto speciale e per i rapporti di quantità rispetto ai blocchi del giacimento principale, *che è quello dipendente più propriamente dal cratere di Vico*, non portano, almeno per ora, alcuna variazione alle vedute qui esposte. — Vedi L. Fantappiè, *Sopra alcuni blocchi a granato ed idocrasio nella regione Cimina.* Riv. di Miner. e Crist. Ital., vol. XX, 1898.

([2]) V. loc. cit. — Estr. pag. 14-17.

nell'opinione che sia opportuno distinguere il materiale erratico in due gruppi appunto in ordine ad una certa diversità di grado, ed *in parte* anche di modo, nell'attività vulcanica rispetto ai materiali preesistenti che possono aver servito alla formazione dei blocchi.

Infatti considerando specialmente i blocchi sanidinici ed anche quelli pirossenici di natura essenzialmente augitica con anortite ed a struttura più o meno granulare e talvolta quasi compatta, bisogna riconoscere che l' attività vulcanica si manifesta su di essi in un grado ed anche in un modo alquanto diverso che su gli altri, dipendentemente da un complesso di condizioni che io ho avuto occasione di accennare nei miei lavori sul Cimino [1].

È evidente che il granato giallo, l' idocrasio e la fassaite, minerali tipici di contatto anche in giacimenti di altra natura, si formarono qui per le reazioni tra le rocce sedimentarie ed il magma vulcanico, perchè includono spesso dei nuclei appartenenti a rocce sedimentarie non completamente trasformate e si trovano in compagnia nello stesso giacimento con una quantità di frammenti di rocce eruttive non appartenenti a formazioni in posto della località. Non è dubbio che i massi feldispatici abbiano subìto delle trasformazioni, che, come ho detto, variano di intensità da giacimento a giacimento e spesso cancellano i caratteri di struttura che possono avvicinarli a materiali di terreni cristallini antichi e vi inducono anche cambiamenti mineralogici pei quali è interessante notare ad es. l' unione dell' Haüyna colla Nefelina. Fenomeni simili si hanno (specialmente in certi giacimenti) anche in gran parte dei blocchi pirossenici. Tuttavia l' osservazione estesa e prolungata di questo materiale porta spontaneamente a rilevare che nei blocchi feldispatici la *titanite*, minerale ordinario delle rocce antiche di tipo granitico [2], si trova, insieme alla mica, all' augite, all' amfibolo (con varia frequenza specialmente questi ultimi, secondo le formazioni), presso a poco sempre: ed i varî blocchi poi variano più o meno accentuatamente, secondo i varî centri vulcanici, da quelli costituiti da individui più o meno distinti di sanidino a quelli a struttura granulare, fino a somigliare decisamente delle rocce di tipo granitico; colla sola differenza di qualche raro cristallo di sanidino individualizzato nella massa, e talvolta anche senza questo carattere.

Anche per certi blocchi pirossenici non può sfuggire una notevole somiglianza con rocce basiche antiche.

Perciò sembra ovvio che certi materiali come quelli sopra indicati si debbano riportare a rocce cristalline antiche, le quali abbiano risentito meno profondamente degli altri materiali l' azione trasformatrice del vulcano, e più specialmente per azione fisica e per sostanze allo stato gassoso (come vien rivelato dai piccoli lembi e frange di sostanza fusa e dai granuli arrotondati esistenti nella massa interna dei blocchi) senza essere state in relazione troppo intima col magma igneo centrale.

Si può quindi ritenere che i blocchi minerali erratici siano dovuti a momenti *esplosivi* che si mostrano estesi ai varî centri. E sembra che i prodotti delle esplosioni

(1) V. specialmente: *Nuove osservazioni su minerali dei « blocchi erratici » nella regione Cimina*. Riv. di Mineral. e Cristall. italiana, vol. XVIII, 1897.

(2) — Specialmente sieniti: ed infatti manca in generale il *quarzo*, benchè non sia raro ne' Cimini.

vulcaniche in genere possano distinguersi in tre gruppi, caratterizzati principalmente dal diverso grado di modificazione portata nei varî materiali costitutivi dall' attività propria del vulcano; e cioè: 1° prodotti dovuti al frazionamento di materiali intimamente inglobati e fatti proprî del nucleo igneo vulcanico, come sono ad es. le scorie ed i lapilli, le pozzolane e le ceneri, ed in genere i materiali più o meno nettamente detritici o tufacei, in dipendenza della varia azione delle acque interne ed esterne; 2° materiali dovuti all' azione di *contatto* (tipo la colofonite e l' idocrasio) del nucleo igneo colle rocce incassanti, specialmente di natura sedimentaria; 3° *materiali di terreni preesistenti*, specialmente di natura plutonica (tipo i blocchi sanidinici con titanite, mica e pirosseno o amfibolo), più o meno trasformati, e strappati alla loro sede originaria prima che abbiano potuto subire un' alterazione sostanziale molto profonda per parte del nucleo eruttivo.

A parte l' ovvia natura dei materiali della prima categoria dei quali non è qui il luogo di parlare, si possono dunque classificare nelle altre due le varie specie dei blocchi erratici.

Tra questi i blocchi minerali feldispatici vengono a costituire un gruppo che è notevole per la maggiore o minore facilità colla quale da un lato può esser distinto dai materiali che rivelano una decisa azione di contatto e dall' altro dai materiali trachitici.

Però nello stesso modo che si debbono riconoscere certi passaggi tra i materiali feldispatici e gli altri dovuti al metamorfismo vulcanico, così non sono da trascurare le intime relazioni che nella gradazione già accennata vengono a stabilirsi tra questi materiali erratici a costituzione feldispatica e certe rocce eruttive: credo anzi che l' osservazione dei diversi gradi di alterazione che presentano questi materiali possa riuscire molto interessante per le questioni di litologia eruttiva.

INDICE DEL VOL. II. — SERIE V.

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-98) 1° Sem. Fasc. 11°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 4°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*